D. HUKUM-HUKUM ALJABAR LOGIKA

Kita telah mempelajari kalimat-kalimat dalam aljabar logika yang menggunakan kata-kata penghubung logika misalnya non, dan, atau, maka dan lain-lainnya. Ternyata dalam bahasa sehari-hari, kata penghubung tersebut saling berkaitan sedemikian hingga sesuatu kata penghubung dapat dinyatakan dalam satu atau lebih dari kata penghubung yang lain. Oleh karena itu dua pernyataan akan dinyatakan ekuivalen bila keduanya mempunyai nilai - nilai logik yang identik, misalnya $p \vee q$ ekuivalen dengan $\bar{p} \longrightarrow q$ sebab keduanya mempunyai nilai logik yang identik.

p	q	$p \vee q$	$\bar{p} \longrightarrow q$
B	B	B	B
B	S	B	B
S	B	B	B
S	S	S	S

Dari tabel tampak bahwa kedua nilai logik dari dua pernyataan $p \vee q$ dan $\bar{p} \longrightarrow q$ identik (setara).

Dengan dasar identitas atau kesetaraan inilah timbul suatu ketentuan yang kemudian dikenal dengan Hukum-Hukum Aljabar Logika. Setiap hukum dalam aljabar logika dapat ditunjukkan kebenarannya dengan kesetaraan dari nilai-nilai logiknya.

dari nilai-nilai logikanya.

Hukum Aljabar Logika.

1. Komutative (tukar tempat)

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

$p \vee q \equiv q \vee p$

2. Assosiative (perserikatan)

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

3. Distributive (oenyebaran)

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

4. Absorpsi (penyerapan)

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

5. De Morgan

$\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$

$\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$

$p \wedge q \equiv \overline{\bar{p} \vee \bar{q}}$

$p \vee q \equiv \overline{\bar{p} \wedge \bar{q}}$

6. Idempotent (kesamakuatan)

$p \wedge p \equiv p$

$p \vee p \equiv p$

7. Identity (kesetaraan)

$p \wedge B \equiv p$

$p \wedge S \equiv S$

$p \vee B \equiv B$

$p \vee S \equiv p$

8. Complement (negation)

$p \wedge \bar{p} \equiv S$ (kontradiksi)

$p \vee \bar{p} \equiv B$ (tautologi)

$\bar{p} \equiv p$ (evolution $\equiv$ obversi)

$\bar{B} \equiv S$

$\bar{S} \equiv B$

9. Kesyaratan (conditional)

$p \longrightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$

$p \longrightarrow q \equiv \overline{p \wedge \bar{q}}$

$p \longrightarrow q \equiv \bar{q} \longrightarrow \bar{p}$ (kontraposisi)

$\bar{p} \longrightarrow q \equiv p \vee q$

$\bar{p} \longrightarrow \bar{q} \equiv q \longrightarrow p$ (inversi, konversi)

$B \longrightarrow p \equiv p$

$S \longrightarrow p \equiv B$

10. Doeble Kesyaratan (konkurensi, biconditional)

$p \equiv q$ konkurensi $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

$p \equiv q$ konkurensi $(\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee p)$

$p \equiv q$ konkurensi $(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$

$p \equiv q$ konkurensi $q \equiv p$

$p \equiv q$ konkurensi $\bar{q} \equiv \bar{p}$

$p \equiv B$ konkurensi p

$p \equiv S$ konkurensi $\bar{p}$

11. $p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})$

<u>Contoh Penggunaan Hukum Logika.</u>

a. Nyatakan " $\vee$ " hanya dengan " $\wedge$ " dan "-".

$p \vee q \equiv \bar{\bar{p}} \vee \bar{\bar{q}} \equiv \overline{\bar{p} \wedge \bar{q}}$ (De Morgan)

b. Nyatakan " $\wedge$ " hanya dengan " $\vee$ " dan "-".

$p \wedge q \equiv \bar{\bar{p}} \wedge \bar{\bar{q}} \equiv \overline{\bar{p} \vee \bar{q}}$ (De Morgan)

c. Tulislah Negasi dari proposisi :

"Apabila malas maka ia tidak lulus"

Andaikata p : Ia malas

q : Ia lulus

Kita peroleh proposisi $p \longrightarrow \bar{q}$, hingga negasinya adalah $\overline{p \longrightarrow \bar{q}}$, sedang $\overline{p \longrightarrow \bar{q}} \equiv \overline{\bar{p} \vee \bar{q}} \equiv \bar{\bar{p}} \wedge \bar{\bar{q}} \equiv p \wedge q$ yang ber - arti Ia malas dan lulus.

Jadi negasi dari "Apabila malas maka ia tidak lulus" ada - lah "Ia malas dan lulus".

d. Buktikan bahwa $p \leftrightarrow q . \equiv .(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$.

<u>Bukti</u> :

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	(pengertian)
$(\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee p)$	(kesyaratan)
$(B \wedge (\bar{p} \vee q)) \wedge ((\bar{q} \vee p) \wedge B)$	(identity)
$((\bar{p} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee q)) \wedge (\bar{q} \vee p) \wedge (\bar{q} \vee q)$	(komplement)
$(\bar{p} \vee (p \wedge q)) \wedge ((\bar{q} \vee (p \wedge q))$	(distribusi)
$((p \wedge q) \vee \bar{p}) \wedge ((p \wedge q) \vee \bar{q})$	(komutasi)
$(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$	(distribusi)

terbukti.

e. Tunjukkan bahwa kalimat "Siti rajin dan lulus" adalah sama saja dengan kalimat "Tidak benar Siti rajin maka ia tidak lulus".

Ditunjukkan :

Andaikata p : Siti rajin

q : Siti lulus

Dari kalimat "Siti rajin dan lulus" diperoleh $p \wedge q$. Dari kalimat "Tidak benar Siti rajin maka ia tidak lulus" di - peroleh $\overline{p \rightarrow \bar{q}}$.

Sekarang harus ditunjukkan : $p \wedge q . \equiv . \overline{p \rightarrow \bar{q}}$

$p \wedge q . \equiv . \bar{\bar{p}} \wedge \bar{\bar{q}}$

$\equiv . \overline{\bar{p} \vee \bar{q}}$

$\equiv . \overline{p \rightarrow \bar{q}}$ (dapat)

f. Tentukan nilai logik dari kalimat "Apabila Siti lulus maka dunia berhenti berputar".

<u>Ditentukan</u> :

Orang yang menyatakan seperti kalimat tersebut, juga mempunyai pengertian bahwa Siti benar-benar tidak akan lulus, hal ini diketahui lebih dahulu bahwa Siti benar-benar bodoh dan tentunya tidak lulus. Tetapi orang ini menyatakan bahwa Siti lulus. Jadi apa yang dinyatakan orang ini tidak sesuai dengan apa kenyataannya. Karena itu entesedent dari kalimat tersebut bernilai logik "salah", sedang konsekuennya bernilai logik "salah", karena itu kalimat yang berbentuk implikasi tersebut akan bernilai logik "benar" sebab dalam tabel implikasi diperoleh sebagai berikut :

$$S \longrightarrow S \;.\equiv.\; B$$

Telah dapat ditentukan bahwa nilai logika dari pernyataan "Apabila Siti lulus maka dunia berhenti berputar" adalah "B".

g. Buktikan : $(p \wedge (\bar{p} \longrightarrow q)) \longrightarrow p$ tautologi.

<u>Bukti</u> :

$$(p \wedge (\bar{p} \longrightarrow q)) \longrightarrow p.\equiv.\,(p \wedge (p \vee q)) \longrightarrow p$$

$$\equiv.\, p \longrightarrow p \equiv.\, \bar{p} \vee p \quad \text{(tautologi)}$$

h. Buktikan bahwa $(p \wedge \bar{q}) \longrightarrow (p \longrightarrow q)$(bukan tautologi).

Bukti :

$$(p \wedge \bar{q}) \longrightarrow (p \longrightarrow q).\equiv.\,\overline{p \wedge \bar{q}} \vee (\bar{p} \vee q)$$

$$\equiv.\,\bar{p} \vee q \vee \bar{p} \vee q$$

$$\equiv.\,\bar{p} \vee q \quad \text{(bukan tautologi)}.$$

i. Buktikan bahwa :

$(p \wedge q) \vee \overline{(p \vee q)} \wedge (\bar{p} \equiv q)$ (kontradiksi.

Bukti :

$((p \wedge q) \vee \overline{(p \vee q)} \wedge (\bar{p} \equiv q)$

$\equiv .((p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})) \wedge ((\bar{p} \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow \bar{p}))$

$\equiv .((p \wedge q) \vee \bar{p}) \wedge ((p \wedge q) \vee \bar{q}) \wedge (p \vee q) \wedge (\bar{q} \vee \bar{p}))$

$\equiv .(p \vee \bar{p}) \wedge (q \vee \bar{p}) \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge (q \vee \bar{q}) \wedge (p \vee q) \wedge (\bar{q} \quad \bar{p})$

$\equiv .B \wedge (q \vee \bar{p}) \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge B \wedge (p \vee q) \wedge (\bar{q} \vee \bar{p})$

$\equiv .(q \vee \bar{p}) \wedge (\bar{q} \vee \bar{p}) \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge (p \vee q)$

$\equiv .((q \wedge \bar{q}) \vee \bar{p}) \wedge (p \vee (\bar{q} \wedge q))$

$\equiv .(S \vee \bar{p}) \wedge (S \vee p)$

$\equiv .S \vee (\bar{p} \wedge p)$

$\equiv .S \vee S$

$\equiv$ S (kontradiksi)

j. Buktikan apakah $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) . \Longrightarrow . \ p \longrightarrow r$ benar.

<u>Bukti</u> :

Proposisi tersebut akan merupakan implikasi logika bila dapat ditunjukkan bahwa $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) . \longrightarrow . p \longrightarrow r$ tautologi.

$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) . \longrightarrow .p \longrightarrow r$

$\equiv .(\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee r) . \longrightarrow .\bar{p} \vee r$

$\equiv .\overline{(\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee r)} \vee \bar{p} \vee r$

$\equiv .\overline{\bar{p} \vee q} \vee \overline{\bar{q} \vee r} \vee \bar{p} \vee r$

$\equiv .(p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{r}) \vee \bar{p} \vee r$

$\equiv .(p \wedge \bar{q}) \vee \bar{p} \vee (q \wedge \bar{r}) \vee r$

$\equiv .((p \vee \bar{p}) \wedge (\bar{q} \vee \bar{p}) \vee (q \vee r) \wedge (\bar{r} \vee r)$

$\equiv .(\bar{q} \vee \bar{p}) \vee (q \vee r)$

$\equiv .\bar{q} \vee q \vee \bar{p} \vee r$

$\equiv .B \vee \bar{p} \vee r$

$\equiv .B$ (terbukti).

k. Buktikan apakah $(p \vee q) \longrightarrow q . \longleftrightarrow . \overline{p \wedge \bar{q}} \vee (p \longrightarrow q)$ benar.

Bukti :

Proposisi tersebut akan merupakan suatu ekuivalensi logis bila dapat ditunjukkan bahwa :

$(p \vee q) \longrightarrow q . \longleftrightarrow . \overline{p \wedge \bar{q}} \vee (p \longrightarrow q)$ tautologi.

$$
\begin{aligned}
(p \vee q) \longrightarrow . \longleftrightarrow . \overline{p \wedge \bar{q}} \vee (p \longrightarrow q) & \\
\equiv\ & . \overline{p \vee q} \vee q . \longleftrightarrow . \bar{p} \vee q \vee \bar{p} \vee q \\
\equiv\ & . (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee q . \longleftrightarrow . \bar{p} \vee q \\
\equiv\ & . (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee q) . \longleftrightarrow . \bar{p} \vee q \\
\equiv\ & . (\bar{p} \vee q) \wedge B . \longleftrightarrow . \bar{p} \vee q \\
\equiv\ & . \bar{p} \vee q \longleftrightarrow \bar{p} \vee q \\
\equiv\ & . B \text{ (terbukti)}.
\end{aligned}
$$