Regresi Linier Berganda

Dr. Agr. Sc. Ernoiz Antriyandarti, SP, MP, M.Ec

Regresi Linier Berganda

Model regresi linier berganda melibatkan lebih dari satu variabel bebas. Modelnya :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k$$

Dimana

Y = variabel terikat

X_i = variabel bebas (i = 1, 2, 3, ..., k)

β_0 = intersep

β_i = koefisien regresi (i = 1, 2, 3, ..., k)

Model penduganya adalah

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots + b_k X_k$$

Keadaan-keadaan bila koefisien-koefisien regresi, yaitu b1 dan b2 mempunyai nilai :

- Nilai=0 ⇨ variabel Y tidak dipengaruh oleh X1 dan X2
- Nilainya negatif ⇨ terjadi hubungan dengan arah terbalik antara variabel Y dengan variabel-variabel X1 dan X2
- Nilainya positif ⇨ terjadi hubungan yang searah antara variabel Y dengan variabel bebas X1 dan X2

Regresi vs Korelasi

- Analisis Korelasi: tujuan utama adalah untuk mengukur kekuatan atau tingkat hubungan linier antara dua variabel (keduanya dianggap acak)
- Analisis Regresi: mencoba memperkirakan atau memprediksi nilai rata-rata dari satu variabel (dependen, dan diasumsikan bersifat stokastik) berdasarkan nilai-nilai tetap dari variabel lain (independen, dan non-stokastik), antara variabel dependen dan independen mempunyai hubungan kausalitas

Menaksir Koefisien Regresi Dengan Menggunakan Matriks

Dari hasil Metode Kuadrat Terkecil didapatkan persamaan normal :

$$nb_0 \quad + \quad b_1 \sum X_{1i} \quad + \quad b_2 \sum X_{2i} \quad + \ldots + \quad b_k \sum X_{ki} = \sum Y_i$$

$$b_0 \sum X_{1i} + b_1 \sum X_{1i}{}^2 + b_2 \sum X_{1i} X_{2i} + \ldots + b_k \sum X_{1i} X_{ki} = \sum X_{1i} Y_i$$

.....

$$b_0 \sum X_{ki} + b_1 \sum X_{ki} X_{1i} + b_2 \sum X_{ki} X_{2i} + \ldots + b_k \sum X_{ki}{}^2 = \sum X_{ki} Y_i$$

Menaksir Koefisien Regresi Dengan Menggunakan Matriks

Tahapan perhitungan dengan matriks :

1. Membentuk matriks ***A***, ***b*** dan ***g***

$$A = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} & \cdots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^{2} & \sum X_{1i} X_{2i} & \cdots & \sum X_{1i} X_{ki} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki} X_{1i} & \sum X_{ki} X_{2i} & \cdots & \sum X_{ki}^{2} \end{bmatrix}$$

Menaksir Koefisien Regresi Dengan Menggunakan Matriks

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_k \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} g_0 = \sum Y_i \\ g_1 = \sum X_{1i} Y_i \\ \dots \\ g_k = \sum X_{ki} Y_i \end{bmatrix}$$

Menaksir Koefisien Regresi Dengan Menggunakan Matriks

2. Membentuk persamaan normal dalam bentuk matriks

$$\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{g}$$

3. Perhitungan matriks koefisien *b*

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}^{-1}\ \boldsymbol{g}$$

Metode Pendugaan Parameter Regresi

Dengan Metode Kuadrat Terkecil, misalkan model terdiri dari 2 variabel bebas

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - b_0 - b_1 X_{1i} - b_2 X_{2i}\right)^2$$

Tahapan pendugaannya :

1. Dilakukan turunan pertama terhadap b_0 , b_1 dan b_2

$$\frac{\partial\left(\sum e_i^{\,2}\right)}{\partial b_0} = -2\left(Y_i - b_0 - b_1 X_{1i} - b_2 X_{2i}\right)$$

$$\frac{\partial\left(\sum e_i^{\,2}\right)}{\partial b_1} = -2\left(Y_i - b_0 - b_1 X_{1i} - b_2 X_{2i}\right) X_{1i}$$

$$\frac{\partial\left(\sum e_i^{\,2}\right)}{\partial b_2} = -2\left(Y_i - b_0 - b_1 X_{1i} - b_2 X_{2i}\right) X_{2i}$$

Metode Pendugaan Parameter Regresi

2. Ketiga persamaan hasil penurunan disamakan dengan nol

$$nb_0 + b_1 \sum X_{i1} + b_2 \sum X_{i2} = \sum Y_i$$

$$b_0 \sum X_{1i} + b_1 \sum X_{i1}{}^2 + b_2 \sum X_{1i} X_{i2} = \sum X_{1i} Y_i$$

$$b_0 \sum X_{2i} + b_1 \sum X_{i1} X_{2i} + b_2 \sum X_{i2}{}^2 = \sum X_{2i} Y_i$$

Metode Pendugaan Parameter Regresi

3. Nilai b_1 dan b_2 dapat diperoleh dengan memakai aturan-aturan dalam matriks

$$b_1 = \frac{J_{X_2X_2} J_{X_1Y} - J_{X_1X_2} J_{X_2Y}}{J_{X_1X_1} J_{X_2X_2} - \left(J_{X_1X_2}\right)^2}$$

$$b_2 = \frac{J_{X_1X_1} J_{X_2Y} - J_{X_1X_2} J_{X_1Y}}{J_{X_1X_1} J_{X_2X_2} - \left(J_{X_1X_2}\right)^2}$$

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X}_1 - b_2 \bar{X}_2$$

Uji Kecocokan/Kesesuaian Model

1. Dengan Koefisien Determinasi

$$R^2 = \frac{JKR}{JKT}$$

- Untuk mengetahui prosentase pengaruh variable-variable X1 dan X2 terhadap variable Y digunakan koefisien determinasi
- ***R*²** menunjukkan proporsi variasi total dalam respon Y yang dapat diterangkan oleh model

$$\sqrt{R^2} = r \qquad\qquad r^2 = \frac{(b_1 \sum x_1 y) + (b_2 \sum x_2 y)}{\sum y^2}$$

r merupakan koefisien korelasi antara Y dengan kelompok X_1 , X_2 , X_3 , … , X_k

Uji Kecocokan/Kesesuaian Model

2. Dengan Pendekatan Analisis Ragam

Tahapan Ujinya :

1. Hipotesis =

   $H_0 : \boldsymbol{\beta} = 0$

   $H_1 : \boldsymbol{\beta} \neq 0$

   dimana

   $\boldsymbol{\beta}$ = matriks [$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$]

Uji Kecocokan/Kesesuaian Model

2. Tabel Analisis Ragam

Komponen Regresi	SS	db	MS	F_{hitung}
Regresi	SSR	k	MSR=SSR / k	$\dfrac{MSR}{s^2}$
Eror	SSE	n – k – 1	s^2 = SSE / n-k-1	
Total	SST	n – 1		

Uji Kecocokan/Kesesuaian Model

Dimana :

$$SSR = SST - SSE = \sum_{i-1}^{n} (\hat{y}_i - \overline{y})^2$$

$$SSE = \sum_{i-1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$SST = \sum_{i-1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$$

Uji Kecocokan/Kesesuaian Model

3. Pengambilan Keputusan

H_0 ditolak jika $\boxed{F_{hitung} > F_{tabel(k\ ,\ n-k-1)}}$

pada taraf kepercayaan α

Contoh Output

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,916[a]	,839	,803	3,453

a. Predictors: (Constant), Minat (X2), Motivasi (X1)

Y = Prestasi

R^2 = 0.839, artinya 83.9% dari Prestasi dapat dijelaskan oleh variabel minat dan motivasi, dan 16.1% dejelaskan oleh variabel lainnya.

Contoh Output

ANOVA[a]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	559,332	2	279,666	23,450	,000[b]
	Residual	107,335	9	11,926		
	Total	666,667	11			

a. Dependent Variable: Prestasi (Y)

b. Predictors: (Constant), Minat (X2), Motivasi (X1)

Variabel Minat dan Motivasi secara bersama-sama mempengaruhi Prestasi secara signifikan

Uji Parsial Koefisien Regresi

Tahapan Ujinya :

1. Hipotesis =

   $H_0 : \beta_j = 0$

   $H_1 : \beta_j \neq 0$

   dimana β_j merupakan koefisien yang akan diuji

Uji Parsial Koefisien Regresi

2. Statistik uji :

$$t = \frac{b_j - \beta_j}{s_{bj}}$$

Dimana :

b_j = nilai koefisien b_j

s =

$$\sqrt{SSE / n-k-1}$$

$$s_{bj} = \frac{s}{\sqrt{J_{X_j X_j}\left(1-r_{12}^2\right)}}$$

$$r_{12} = \frac{J_{X_1 X_2}}{\sqrt{\left(J_{X_1 X_1}\right)\left(J_{X_2 X_2}\right)}}$$

Uji Parsial Koefisien Regresi

3. Pengambilan keputusan

H_0 ditolak jika $\boxed{t_{hitung} > t_{\alpha/2(db= n-k-1)}}$

pada taraf kepercayaan α

Contoh Output

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	9.152	3.938		2.324	.028
	Motivasi	.124	.163	.099	.760	.454
	Gaji	.711	.128	.723	5.550	.000

a. Dependent variable: Kinerja_Karyawan

Variabel **Motivasi** tidak berpengaruh nyata terhadap variabel **Kinerja Karyawan**, sedangkan variabel **Gaji** berpengaruh positif secara signifikan terhadap **Kinerja Karyawan**.

Data

Terdapat 3 tipe data:

- **Time series data**
- **Cross-sectional data;**
- **Pooled data/Panel Data**