1. Amalia Putri (K1322011) 3. Atha Haufaldy (K1322023) 5. Auni Zati Bayan (K1322026)
2. Amanda Lingga (K1322012) 4. Aulia Al Hatta (K1322026) 6. Annisa Sahwa (K1322017)

proyek 13 - 15

1. Untuk fungsi - fungsi yang diberikan ikuti langkah yang berikut :
   (a) Dengan menggunakan geogebra buat sketsa grafik fungsi f dan f' pada interval yg ditentukan
   (b) cari titik di mana $f'(x) = 0$ dan $f'(x)$ tidak ada
   (c) Hitung nilai fungsi pada titik yg diperoleh dibagian b pada titik ujung selang
   (d) Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi

→ • $f(x) = x^{2/3}(3-x)$, $[-2, 2]$ a)

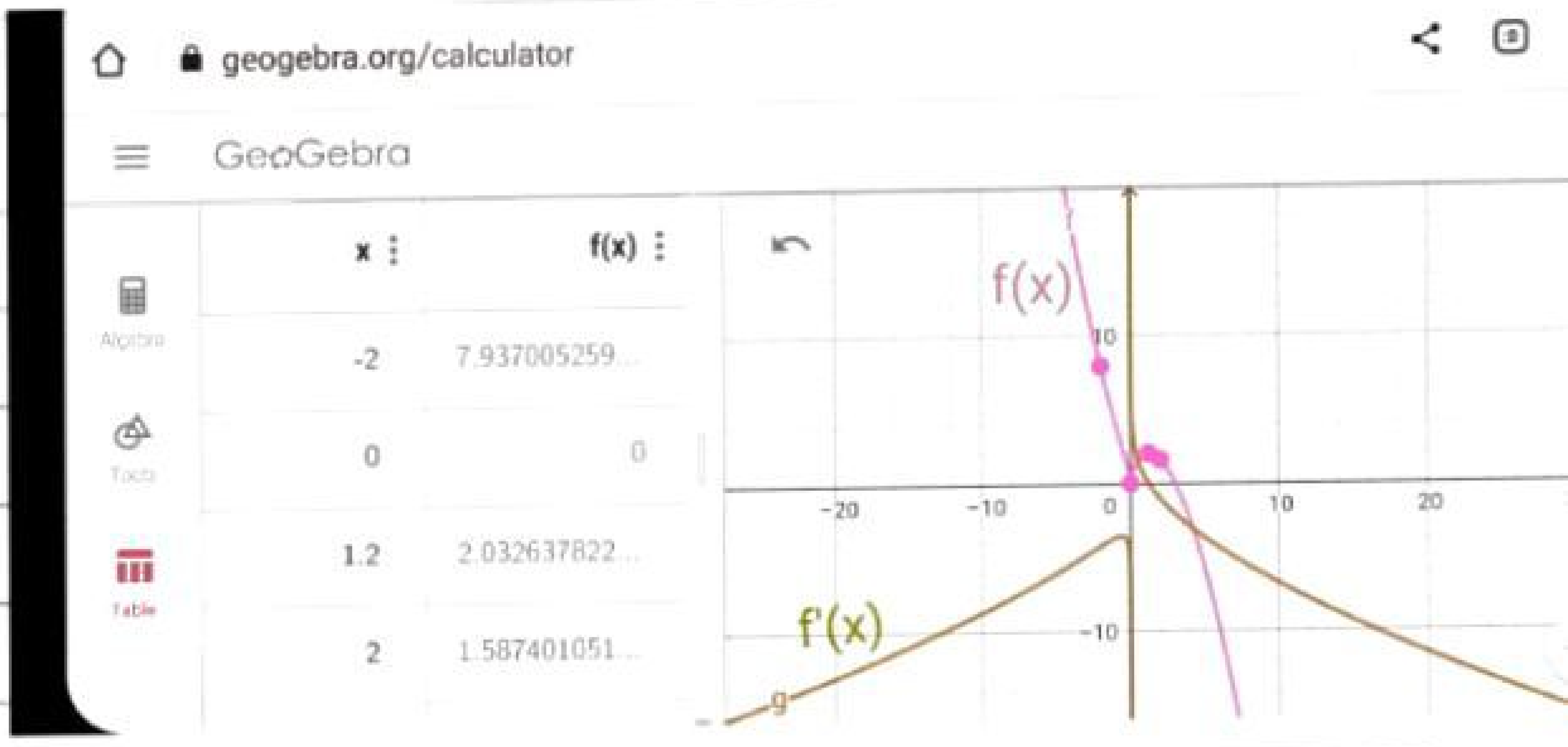
• $f(x) = 3x^{2/3} - x^{5/3}$

$f'(x) = 2x^{-1/3} - \frac{5}{3}x^{2/3}$

$f'(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

$f'(x) = \frac{6 - 5\sqrt[3]{x^3}}{3\sqrt[3]{x}}$

$f'(x) = \frac{6-5x}{3\sqrt[3]{x}}$



. mencari titik stasioner

b) • $f'(x) = 0$

$\frac{6-5x}{3\sqrt[3]{x}} = 0$

$6 - 5x = 0$

$-5x = -6$

$x = \frac{6}{5}$

. mencari titik singular

• $f'(x)$ tidak ada

$\frac{6-5x}{3\sqrt[3]{x}}$ = tidak ada

$x = 0$

. mencari nilai nilai max, min, dan nilai fungsi pada titik ujung selang

c dan d) $f(-2) = (-2)^{2/3}(3-(-2)) = 7,937$ Nilai max

$f(0) = (0)^{2/3}(3-0) = 0$ Nilai MIN

$f(\frac{6}{5}) = (\frac{6}{5})^{2/3}(3-\frac{6}{5}) = 2,032$

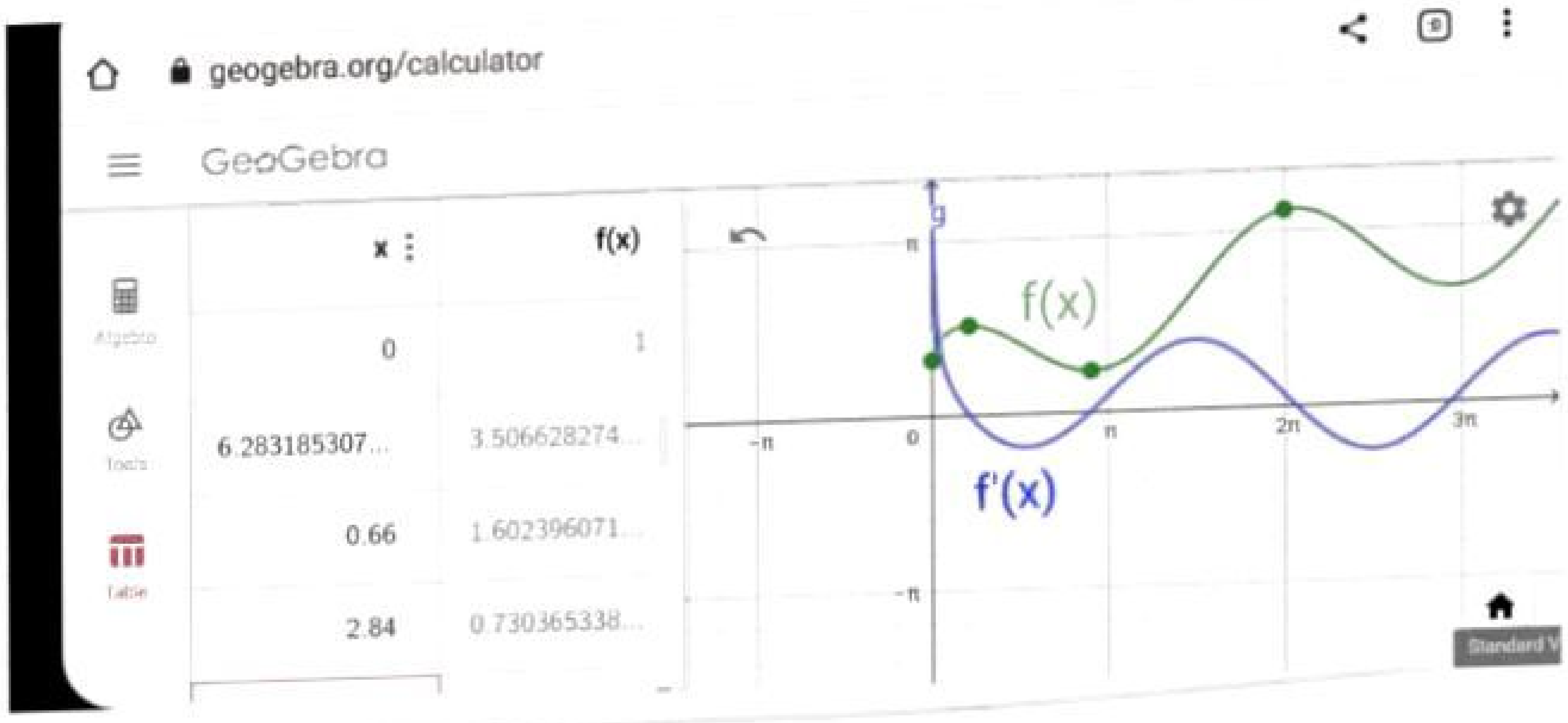
$f(2) = (2)^{2/3}(3-2) = 1,587$

$\rightarrow$ · $f(x) = \sqrt{x} + \cos x \quad [0, 2\pi]$

$f(x) = x^{1/2} + \cos x$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} - \sin x$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x$



· Mencari titik stasioner

$f'(x) = 0$

$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x = 0$

$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sin x$

$\frac{1}{2} = \sin x \, (\sqrt{x})$

$\sin \frac{\pi}{3} = \sin x \, (\sqrt{x}) \iff \sin x \, (\sqrt{x}) = \sin \frac{\pi}{3}$

· $x(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ atau $x(\sqrt{x}) = (\pi - \frac{\pi}{3}) + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{3\sqrt{x}} + \frac{2k\pi}{\sqrt{x}}, \; k \in Z$

$x = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{2k\pi}{\sqrt{x}}, \; k \in Z$

$x = \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{9} + \frac{4\pi^2 k}{3} + 4\pi^2 k^2}$

$x = \sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{9} + \frac{8\pi^2 k}{3} + 4\pi^2 k^2}$

· Mencari titik singular

$f'(x) =$ tidak ada

$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x =$ tidak ada

$x = 0$

· Mencari nilai max, nilai min dan nilai fungsi pada ujung selang

· $f(0) = \sqrt{0} + \cos 0 = 1$

· $f(2\pi) = \sqrt{2\pi} + \cos 2\pi = 3{,}506$ Nilai max

· $f(0{,}66) = \sqrt{0{,}66} + \cos 0{,}66 = 1{,}602$

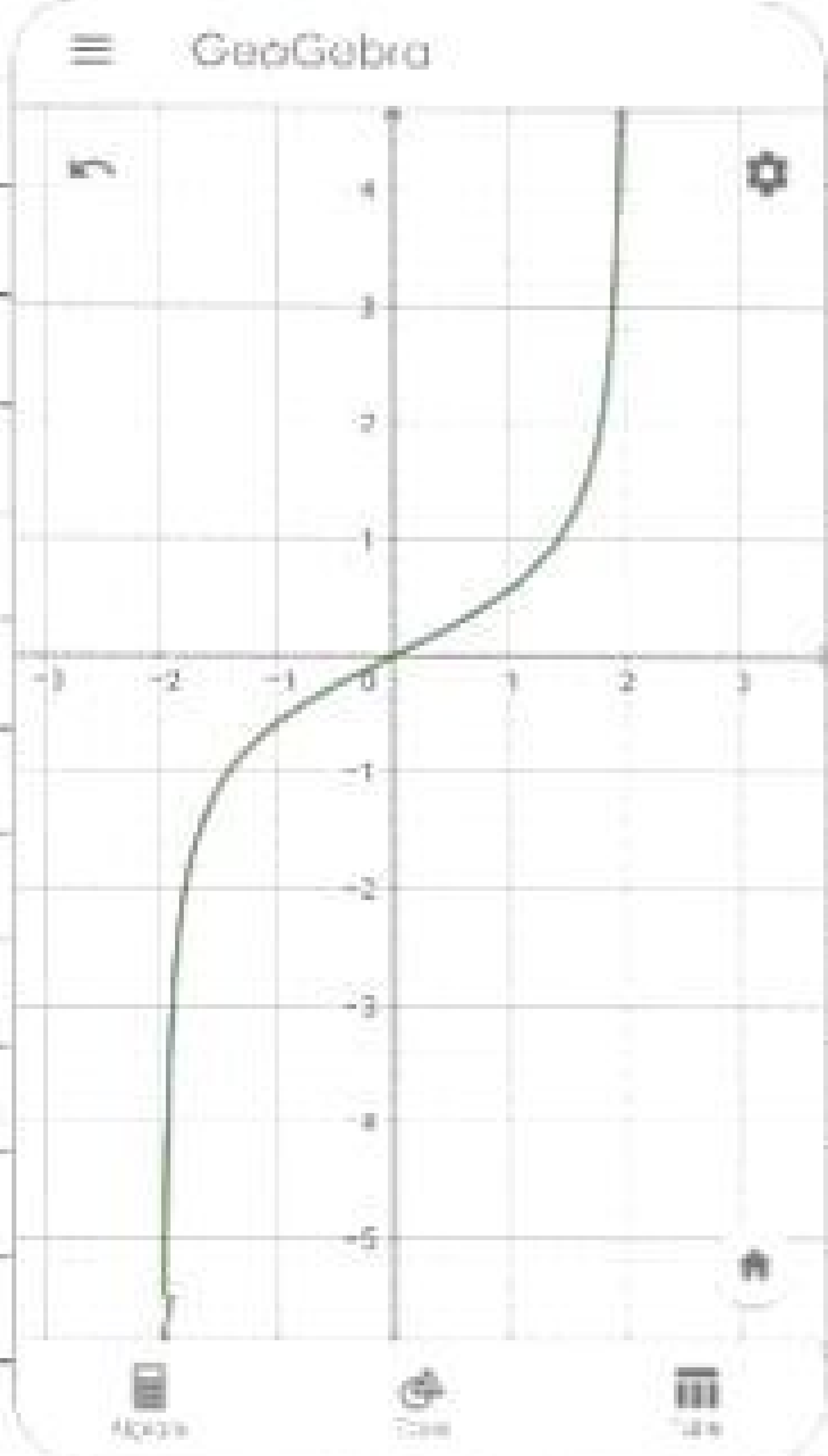
· $f(2{,}84) = \sqrt{2{,}84} + \cos 2{,}84 = 0{,}730$ Nilai Min

Proyek Tahap 13 - 15

2] Buat sketsa grafik berikut dengan geogebra kemudian deskripsikan kemonotonan, kecekungan, nilai ekstrim lokal, titik belok dan asimtot (jika ada) dan

* $y = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

Gambar sketsa grafik $\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$



» $y = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} = f(x)$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \text{ terdefinisi}\}$

agar $f(x)$ terdefinisi maka

$\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} \geq 0$

$\Leftrightarrow 4 - x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (2-x)(2+x) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ Pembuat nol : $x = -2$ atau $x = 2$

$$\overset{-}{\quad}\ [_{-2}\ \overset{+}{\quad}\ ]_{2}\ \overset{-}{\quad}$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\} = [-2, 2]$

» Kemonotonan

Grafik tersebut naik pada selang $(-2, 2)$

Bukti : $y = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$$y' = \frac{1(\sqrt{4-x^2}) - x(-x)(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{4-x^2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{4-x^2} + x^2(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(4-x^2)}$$

$$= \frac{(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\left((4-x^2) + x^2\right)}{(4-x^2)}$$

$$= \frac{4}{(4-x^2)^{3/2}}$$

Dapat dilihat bahwa $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ tidak punya titik stasioner.

$$\underset{-2}{|}\ \overset{+}{\quad}\ \underset{0}{\circ}\ \overset{+}{\quad}\ \underset{2}{|}\quad f'$$

pada selang $(-2, 2)$ f naik (Terbukti)

Jika $f'(x) > 0$ maka f naik

Jika $f'(x) < 0$ maka f turun

∴ Jadi, punya asimtot tegak di $x = -2$ dan $x = 2$

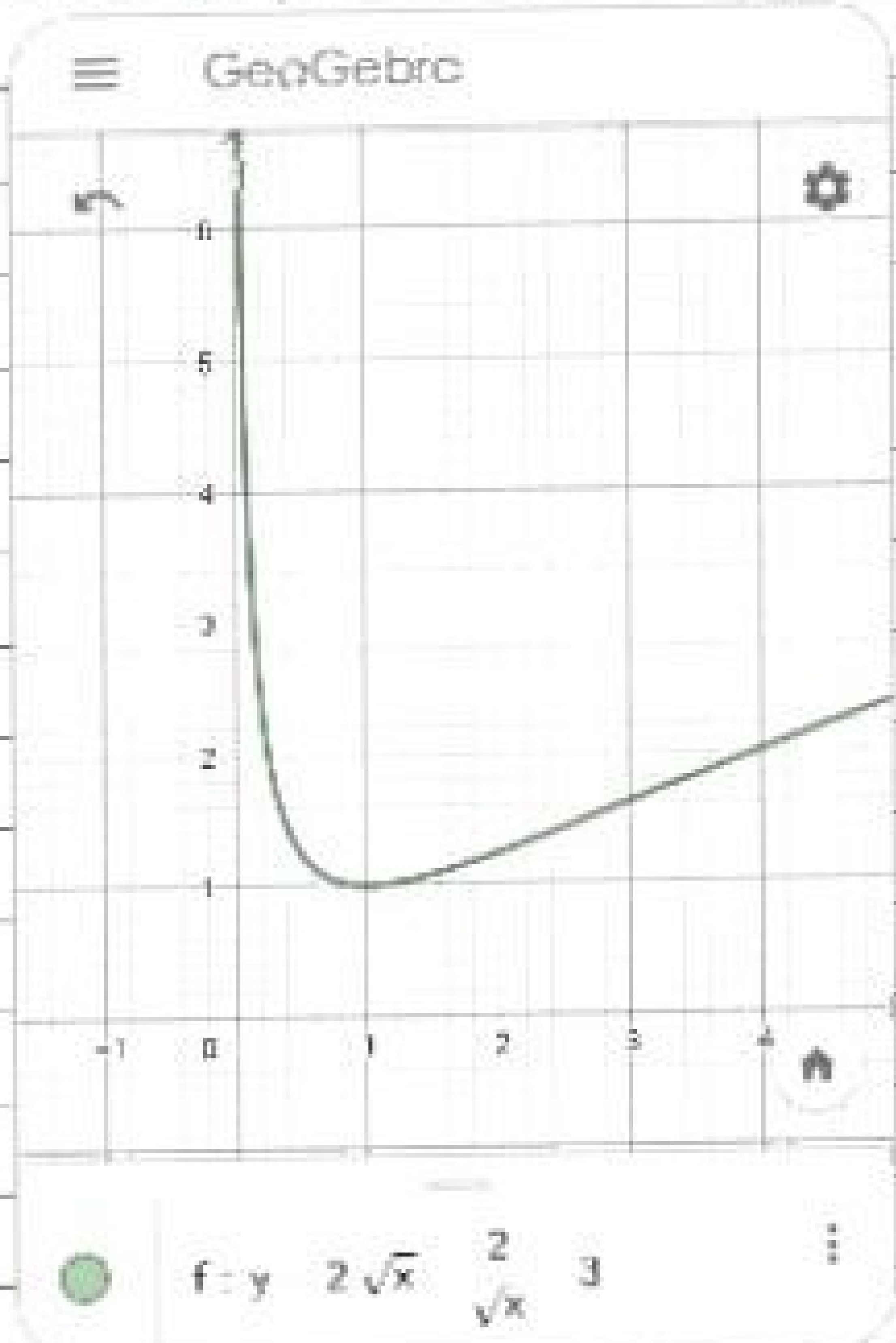
Perhatikan : • $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ tidak ada / tdk terdefinisi

∴ Jadi, tidak punya asimtot datar

∴ Karena tidak punya asimtot datar maka tidak punya asimtot miring. (Terbukti)

* $y = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3$

Gambar sketsa grafik $2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3$



», $y = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3 \text{ terdefinisi}\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, \infty)$

» Kemonotonan

$y = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3$

$y' = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$

$y' = \frac{x - 1}{x\sqrt{x}}$

$y' = 0$ jika $x = 1$

$$\begin{array}{ccccc} & - & & + & \\ 0 & & 1 & & \end{array}$$

Jadi, pada selang $(0, 1)$ f turun

" $(1, \infty)$ f naik

(Terbukti)

Jika $f'(x) > 0$ maka f naik

Jika $f'(x) < 0$ maka f turun

> Kecekungan

Grafik tersebut cekung ke bawah pada selang $(-2,0)$ dan cekung ke atas pada selang $(0,2)$

Bukti : $y' = \dfrac{4}{(4-x^2)^{3/2}}$

$$y'' = \frac{0.(4-x^2)^{3/2} - 4(-3x)(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}{((4-x^2)^{3/2})^2}$$

$$= \frac{12x.(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(4-x^2)^3}$$

$$= \frac{12x}{(4-x^2)^{5/2}}$$

$y'' = 0$ jika $x = 0$

$$\begin{array}{ccccc} & - & & + & \\ \hline -2 & & 0 & & 2 \end{array} \quad f''$$

- Jika $f''(x) > 0$ pada selang I, maka f cekung ke atas pada selang tersebut.
- Jika $f''(x) < 0$ pada selang I, maka f cekung ke bawah.

Jadi, pada selang $(-2,0)$ f cekung kebawah, pada selang $(0,2)$ f cekung ke atas. (Terbukti)

> Nilai ekstrim lokal

- Titik ujung selang $x = -2$ dan $x = 2$
- Titik stasionernya tidak ada (berdasarkan y' tadi)
- Titik singular tidak ada

Titik kritis : $x = -2$ dan $x = 2$

$f(-2)$ tidak terdefinisi dan $f(2)$ tidak terdefinisi

$\therefore$ Jadi, tidak punya nilai ekstrim lokal

> Titik belok

Titik $(0, f(0)) = (0,0)$ adalah titik belok karena berdasarkan $(f''(x))$ terjadi perbedaan kecekungan.

> Asimtot

Memiliki asimtot tegak di $x = -2$ dan $x = 2$, tidak mempunyai asimtot datar dan asimtot miring.

Bukti : Perhatikan : • $\displaystyle\lim_{x \to -2^+} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$\displaystyle\lim_{x \to -2^+} x = -2 < 0$

$\displaystyle\lim_{x \to -2} \sqrt{4-x^2} = 0$ jk $x \to -2^+$ maka $\sqrt{4-x^2} \to 0^+$

$\therefore \displaystyle\lim_{x \to -2^+} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = -\infty$

• $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$\displaystyle\lim_{x \to 2^+} x = 2 > 0$

$\displaystyle\lim_{x \to 2} \sqrt{4-x^2} = 0$ jk $x \to 2^+$ maka $\sqrt{4-x^2} \to 0^+$

lim x

> Kecekungan

Grafik tersebut cekung ke atas pada selang

Bukti : $y' = \dfrac{x-1}{x\sqrt{x}}$

$y'' = \dfrac{x}{x\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

$= -\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} - \left(-\dfrac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{(x^{\frac{3}{2}})^2}\right)$

$= \dfrac{-x+3}{2x^2\sqrt{x}}$

$y'' = 0$ jika $x = 3$

$\underset{0}{\bullet}\ \ + \ \ \underset{3}{\bullet}\ \ + \qquad y''$

- jika $f''(x) > 0$ maka f cekung ke atas pada selang tersebut
- jika $f''(x) < 0$ maka f cekung ke bawah pada selang tersebut

Jadi, pada selang $(0,3)$ dan $(3,\infty)$ f cekung ke atas

> Nilai ekstrim lokal

Berdasarkan uji turunan pertama ~~dp~~ dapat dilihat pada titik $x = 1$ adalah nilai minimum lokal

$x = 1 \rightarrow f(1) = 1$

Jadi, titik $(1,1)$ adalah titik minimum lokalnya.

> Titik belok

Berdasarkan uji turunan kedua dapat dilihat bahwa fungsi tersebut tidak punya titik belok karena tidak ada perbedaan kecekungan.

> Asimtot

Fungsi tersebut memiliki asimtot ~~t~~ tegak di $x = 0$, tidak punya asimtot datar dan miring.

Bukti : $\lim\limits_{x\to 0} 2\sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 3 = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x+2-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} 2x+2-3\sqrt{x} = 2 > 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ jk $x \to 0^+$ maka $\sqrt{x} \to 0^+$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x+2-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \infty$

Jadi, asimtot tegaknya di $x=0$, y menuju ∞

Perhatikan : $\lim_{x \to \infty} 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x + 2 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$= +\infty$$

Jadi, fungsi tersebut tidak punya asimtot datar.
Karena tidak punya asimtot datar maka tidak punya asimtot miring juga.