Diskusi 13-15

Kelompok 2

Alfiyana Damayanti (K1321008)

Charyta Putri M. (K1321028)

Diva Puspita Sari (K1321032)

Heni Setiyowati (K1321044)

Muhammad Mafaza R (K1321055)

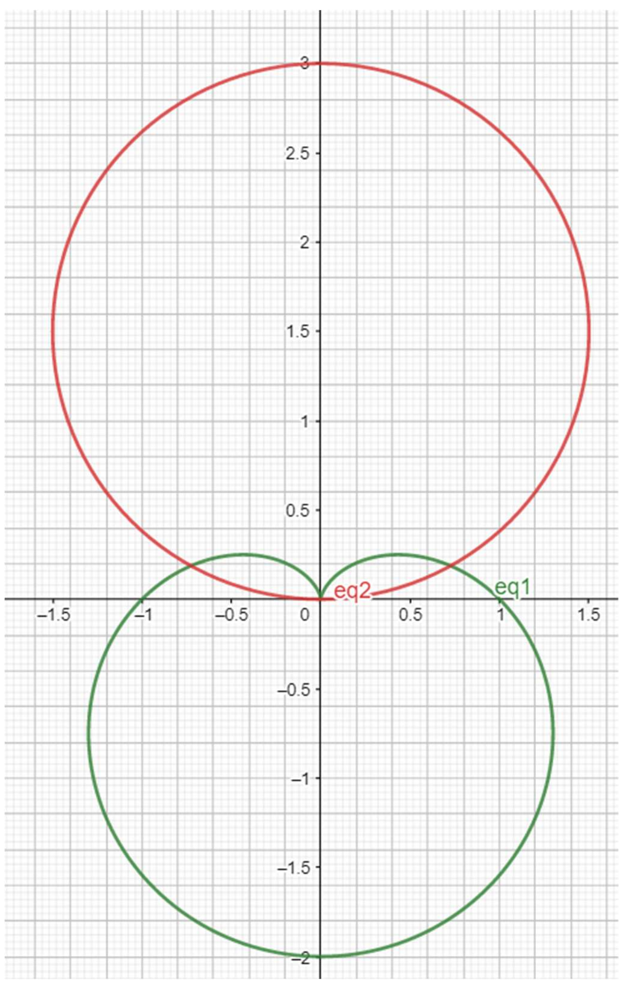
Nesthi Wahyuningsih (K1321060)

Ruqoyyatul Ulya U.U (K1321073)

No 1

Susunlah suatu integral lipat (tidak usah dihitung) untuk menetukan luas daerah yang terletak dalam kardioid $r = 1 - \sin\theta$ dan diluar lingkaran $r = 3\sin\theta$

Jawab :



Menentukan titik potong $r = 1 - \sin\theta$ dan $r = 3\sin\theta$ untuk $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$1 - \sin\theta = 3\sin\theta$

$\sin\theta = \frac{1}{4}$

$\theta = \sin^{-1}\frac{1}{4}$

dari ilustrasi diperoleh S

$S = S_1 \cup S_2$

$= S_1 \cup (S_{21} - S_{22})$

$S_{2.1} = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq 1 - \sin\theta \; ; \; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \sin^{-1}\frac{1}{4}\}$

$S_{2.2} = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq 3\sin\theta \; ; \; 0 \leq \theta \leq \sin^{-1}\frac{1}{4}\}$

akan dicari luas daerah S

$\iint_S = \iint_{S_1} dA_1 + \iint_{S} dA_2$

$= 2\iint_{S_2} dA_2$

$= 2\left(\iint_{S_{21}} dA_{21} - \iint_{S_{22}} dA_{22}\right)$

$= 2\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\sin^{-1}\frac{1}{4}}\int_0^{1-\sin\theta} r\,dr\,d\theta - \int_0^{\sin^{-1}\frac{1}{4}}\int_0^{3\sin\theta} r\,dr\,d\theta\right.$

$A_S = 2\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\sin^{-1}\frac{1}{4}}\int_0^{1-\sin\theta} r\,dr\,d\theta - \int_0^{\sin^{-1}\frac{1}{4}}\int_0^{3\sin\theta} r\,dr\,d\theta\right.$

No. :

2. Susun integral lipat (tidak usah dihitung) untuk mencari volume dari benda pejal yang dibatasi oleh permukaan - permukaan yang gambarnya diberikan :

$z = 4 - 2x$

- Jejak dibidang xy $(z = 0)$

  $4 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$ (garis)

- Jejak dibidang xz $(y = 0)$

  $z = 4 - 2x$ (garis)

- Jejak dibidang yz $(x = 0)$

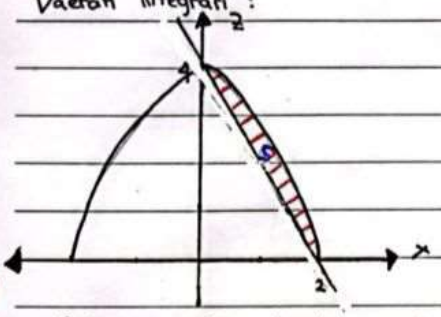
  $z = 4$ (garis)

$z = 4 - x^2 - y^2 \Rightarrow$ • Jejak dibidang xy $(z = 0)$: $4 - x^2 - y^2 = 0$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{4 - x^2 - z}$ $\qquad \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ (lingkaran)

- Jejak dibidang xz $(y = 0)$: $z = 4 - x^2$ (parabola)
- Jejak dibidang yz $(x = 0)$: $z = 4 - y^2$ (parabola)

Daerah Integrasi :

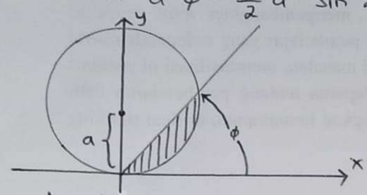


Volume benda pejal yang dibatasi oleh permukaan $z = 4 - x^2 - y^2$ dan $z = 4 - 2x$ dapat dipandang sebagai 2 kalinya volume benda pejal dibawah permukaan $y = \sqrt{4 - x^2 - z}$ di atas S dengan $S = \{(x, z) \mid 4 - 2x \le z \le 4 - x^2, 0 \le x \le 2\}$

Sehingga volume benda pejal tersebut dapat dihitung :

$$V = 2\left(\iint_S \sqrt{4 - x^2 - z}\, dA\right) = 2\left(\int_0^2 \int_{4-2x}^{4-x^2} \sqrt{4 - x^2 - z}\, dz\, dx\right)$$

3. Buktikan bahwa luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini adalah $a^2\phi - \frac{1}{2}a^2 \sin 2\phi$!



Jawab

Daerah yang diarsir merupakan tembereng, sehingga :

L. tembereng = L. juring − L. segitiga

Luas segitiga yang diketahui sisi − sudut − sisi, yaitu :

$$L\Delta = \frac{1}{2} \cdot a^2 \sin \phi$$

dan luas juringnya, yaitu :

$$L = \frac{\phi}{360°} \cdot \pi \cdot a^2$$

Maka :

$$\begin{aligned} L.\text{ tembereng} &= L.\text{ juring} - L.\text{ segitiga} \\ &= \frac{\phi}{360°} \cdot \pi \cdot a^2 - \frac{1}{2} a^2 \sin \phi \\ &= \frac{\phi}{2} a^2 - \frac{1}{2} a^2 \sin \phi \quad \times 2 \\ &= \phi a^2 - \frac{1}{2} a^2 \sin 2\phi \\ &= a^2 \phi - \frac{1}{2} a^2 \sin 2\phi \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa luas daerah yang diarsir pada gambar tersebut adalah $a^2\phi - \frac{1}{2}a^2 \sin 2\phi$ (Terbukti)

4). Buat sketsa benda pejal yang dibatasi oleh silinder $x^2+z^2=9$. Bidang-bidang $x=0$, $y=0$, $z=0$ dan $x+2y=2$. Kemudian hitung volumenya.

Jawab:

Perhatikan jejak $x^2+z^2=9$ pada

Bidang $xy\ (z=0) \to x=\pm 3$

Bidang $yz\ (x=0) \to z=\pm 3$

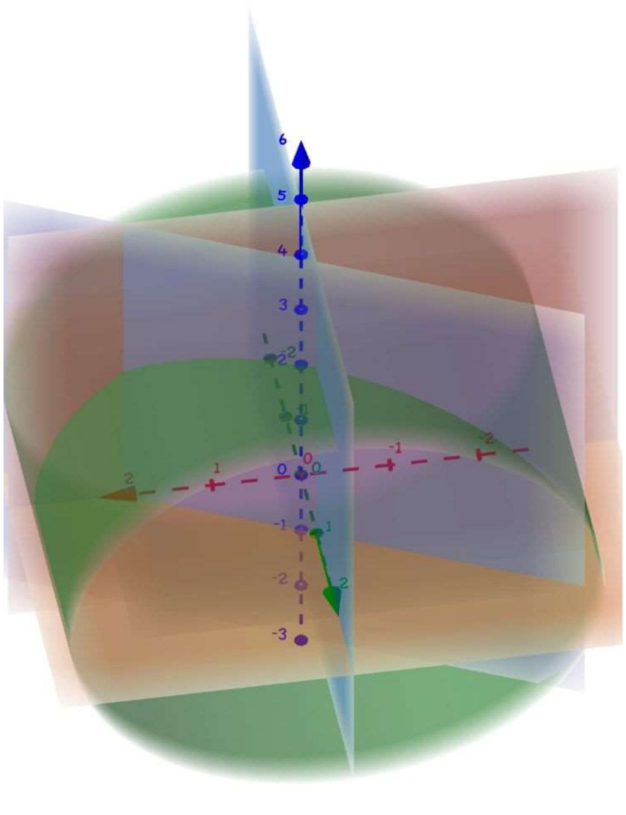
Bidang $xz\ (y=0) \to x^2+z^2=9$

Perhatikan jejak $x+2y=2$ pada

Bidang $xy\ (z=0) \to x=2-2y$

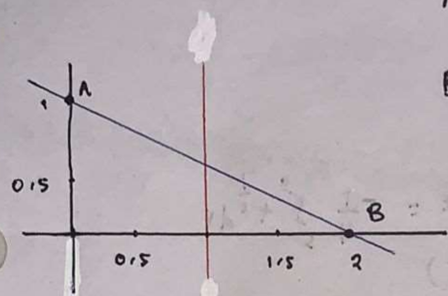
Bidang $yz\ (x=0) \to y=1$

Bidang $xz\ (y=0) \to x=2$



Volume benda pejal tersebut dapat dicari dengan integral lipat atas $z = \sqrt{9-x^2}$ pada S merupakan daerah segitiga ABC.

Perhatikan ilustrasi berikut:



A titik potong $x+2y=2$ dan $x=0$, $A(0,1)$

B titik potong $x+2y=2$ dan $y=0$, $B(2,0)$

$x+2y=2 \sim y=\frac{1}{2}(2-x)$

Pandang S sebagai himpunan y sederhana

$S = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2 ;\ 0 \le y \le \frac{1}{2}(2-x)\}$

Sehingga misal V adalah volume benda pejal yang dimaksud, maka:

$$V = \iint_S \sqrt{9-x^2}\, dA$$
$$= \int_0^2 \int_0^{1-\frac{x}{2}} \sqrt{9-x^2}\, dy\, dx$$
$$= \int_0^2 \left(1-\frac{x}{2}\right)\sqrt{9-x^2}\, dx$$
$$= \int_0^2 \sqrt{9-x^2}\, dx - \frac{1}{2}\int_0^2 x\sqrt{9-x^2}\, dx$$

Perhatikan untuk $\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\, dx$.

Misal : $x = 3\sin u \rightarrow dx = 3\cos u\, du$

saat $x=0 \rightarrow u=\sin^{-1}(0)$, saat $x=2 \rightarrow u=\sin^{-1}\frac{2}{3}$

$$\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\, dx = \int^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} \sqrt{9-9\sin^2 u}\ 3\cos u\, du = \int^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 9\cos^2 u\, du = \frac{9}{2}\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} \cos 2u + 1\, du$$
$$= \frac{9}{2}\left(\int_0^{2\sin^{-1}\frac{2}{3}} \frac{\cos 2u}{2}\, d(2u) + \int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} du\right) = \frac{9}{4}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$
$$= \frac{9}{2}\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2}{3} =$$
$$= \frac{9}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2}{3} = \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$

* Perhatikan untuk

$-\frac{1}{2}\int_0^2 x\sqrt{9-x^2}\,dx$

Misal : $9-x^2=t \rightarrow -2x\,dx=dt$

$\rightarrow x\,dx = \frac{-dt}{2}$

Saat $x=0 \rightarrow t=9$

saat $x=2 \rightarrow t=5$

$= -\frac{1}{2}\int_0^2 x\sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_9^5 t^{\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{1}{4}\int_5^9 t^{\frac{1}{2}}\,dt$

$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_5^9 = -\frac{1}{6}(27-5\sqrt{5})$

$= -\frac{9}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{5}$

Hal ini berarti

$V = \int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^2 x\sqrt{9-x^2}\,dx$

$= \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2}{3} - \frac{9}{2} + \frac{5}{6}\sqrt{5}$

$= \frac{7\sqrt{5}}{3} - \frac{9}{2} + \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2}{3}$

No.

Date

Diskusi Kalkulus 13-15

5. Dengan menggunakan koordinat polar, tent volume benda pejal diatas bid xy yg dibatasi oleh permukaan $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 18$ dan $x^2 + y^2 = 4$.

penyelesaian :

- perhatikan untuk $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 18$

jejak bid xy $(z=0) \rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 18$

$x^2 + y^2 = 9$ [⊙ P(0,0) dg r = 3]

jejak bid xz $(y=0) \rightarrow 2x^2 + z^2 = 18$

$\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{18} = 1$ [ellips]

jejak bid yz $(x=0) \rightarrow 2y^2 + z^2 = 18$

$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{18} = 1$ [ellips]

- perhatikan untuk $x^2 + y^2 = 4$

jejak bid xy $(z=0) \rightarrow x^2 + y^2 = 4$ [⊙ P(0,0) dg r = 2]

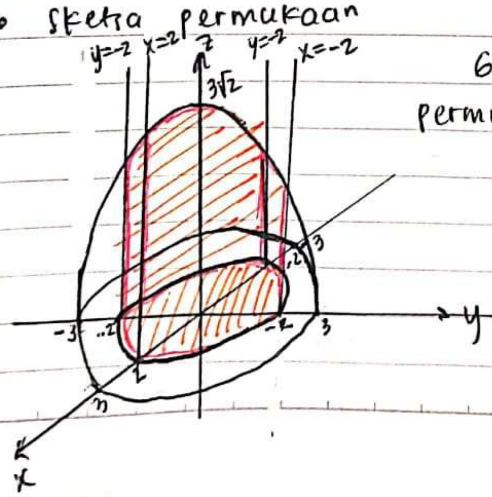
jejak bid xz $(y=0) \rightarrow x^2 = 4$

$(x+2)(x-2) = 0$ [garis $x = 2$ dan $x = -2$]

jejak bid yz $(x=0) \rightarrow y^2 = 4$

$(y+2)(y-2) = 0$ [garis $y = 2$ dan $y = -2$]

- sketsa permukaan



Gambar di samping adalah permukaan $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 18$

$z^2 = -2(x^2 + y^2) + 18$

$z^2 = -2r^2 + 18$

$z = \sqrt{18 - 2r^2}$

dg daerah integrasi lingkaran

$x^2 + y^2 = 4$

$r^2 = 4 \Leftrightarrow r = 2 \vee r = -2$ (TM)

No.

Date

shg bisa ditulis $S = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 2 \,;\, 0 \le \theta \le 2\pi\}$
maka volumenya adalah

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{18-2r^2}\; r\, dr\, d\theta$$

dimisalkan $u = 18 - 2r^2$ $\rightarrow$ $r=0$ maka $u=18$

$du = -4r\, dr$ $\quad r=2$ maka $u=10$

$\frac{du}{-4} = r \cdot dr$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_{18}^{10} u^{1/2} \cdot \frac{du}{-4}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{10}^{18} \frac{1}{4} u^{1/2}\, du\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{6} \cdot u^{3/2}\right]_{10}^{18} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{6} \cdot 18\sqrt{18} - \frac{1}{6}\, 10\sqrt{10}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{6}\left(54\sqrt{2} - 10\sqrt{10}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\left(54\sqrt{2} - 10\sqrt{10}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{6}\left[54\sqrt{2}\,\theta - 10\sqrt{10}\,\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left(54\sqrt{2}\,(2\pi) - 10\sqrt{10}\,(2\pi)\right) - (0-0)\right]$$

$$= 9\sqrt{2}\,(2\pi) - \frac{5}{3}\sqrt{10}\,(2\pi)$$

$$= \pi\left(18\sqrt{2} - \frac{10\sqrt{10}}{3}\right)$$ satuan volume.