Kelompok 5

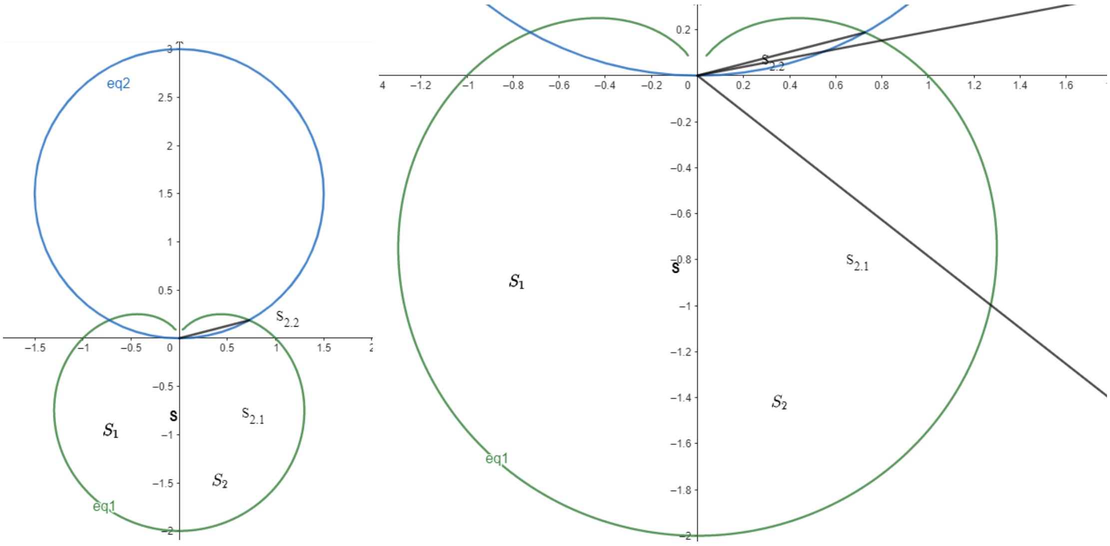
1. Alridani Alif Nursavana (K1321010)
2. Bagus Aqil Saputra (K1321025)
3. Hafidz Ahmad Muzakky (K1321042)
4. Irene Chelsyana Febrianti (K1321049)
5. Maretha Putri Axandra (K1321052)
6. Marsella Friskana Puteri (K1321053)
7. Ririn Dwi Is Yuliyanti (K1321071)

Diskusi Kalkulus Peubah Banyak Tahap 13-15

1. Susunlah suatu integral lipat (tidak usah di hitung) untuk menentukan luas daerah yang terletak di dalam kardioid $r = 1 - \sin\theta$ dan di luar lingkaran $r = 3\sin\theta$

Jawab:

Misal daerah yang dimaksud adalah S, maka berikut adalah ilustrasi dari S.



Menentukan titik potong $r = 1 - \sin\theta$ dan $r = 3\sin\theta$ untuk $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

$1 - \sin\theta = 3\sin\theta \leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{4} \leftrightarrow \theta = \sin^{-1}\frac{1}{4}$

Dari ilustrasi di atas S dapat dipandang sebagai

$S = S_1 \cup S_2 = S_1 \cup (S_{2.1} - S_{2.2})$

Dengan $S_{2.1} = \left\{(r,\theta)|0 \leq r \leq 1 - \sin\theta\,; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \sin^{-1}\frac{1}{4}\right\}$ dan $S_{2.2} = \left\{(r,\theta)\middle|0 \leq r \leq 3\sin\theta\,; 0 \leq \theta \leq \sin^{-1}\frac{1}{4}\right\}$.

Kemudian akan dicari luas daerah S

$$\iint_S \, dA \quad = \iint_{S_1} dA_1 + \iint_{S_2} dA_2 \qquad \text{karena } S_1 \text{ dan } S_2 \text{ simetris maka}$$

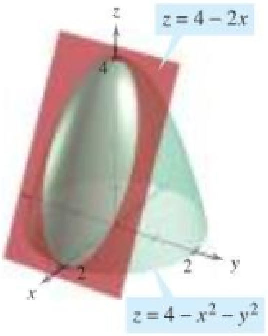
$$= 2 \iint_{S_2} dA_2$$

$$= 2\left(\iint_{S_{2.1}} dA_{2.1} - \iint_{S_{2.2}} dA_{2.2}\right)$$

$$= 2\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\sin^{-1}\frac{1}{4}} \int_0^{1-\sin\theta} r dr\, d\theta - \int_0^{\sin^{-1}\frac{1}{4}} \int_0^{3\sin\theta} r dr\, d\theta\right)$$

Sehingga $A_S = 2\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\sin^{-1}\frac{1}{4}} \int_0^{1-\sin\theta} r dr\, d\theta - \int_0^{\sin^{-1}\frac{1}{4}} \int_0^{3\sin\theta} r dr\, d\theta\right)$.

2. Susun integral lipat (tidak usah dihitung) untuk mencari volume dari benda pejal yang dibatasi oleh permukaan-permukaan yang gambarnya diberikan.



Jawab:

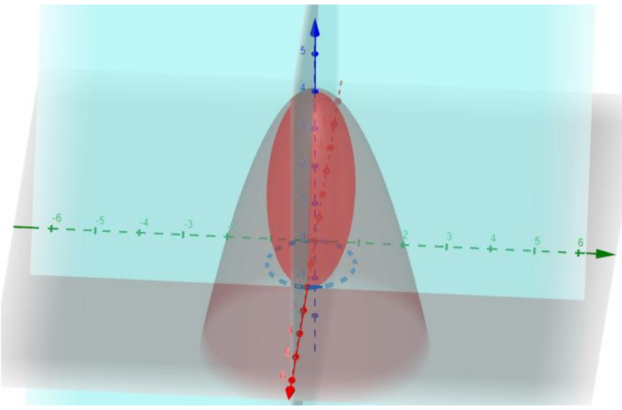
Untuk mencari volume suatu benda pejal dengan menghitung integral lipat suatu persamaan permukaan, perlu diketahui daerah integrasinya.

Daerah integrasi dari benda pejal di antara $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ dan $g(x,y) = 4 - 2x$ adalah daerah di dalam proyeksi kurva $h: z = 4 - x^2 - y^2; z = 4 - 2x$ pada bidang xy. Mencari proyeksi kurva h pada bidang xy sama saja dengan mencari nilai (x,y) pada bidang xy di mana $f(x,y) = g(x,y)$.

$4 - x^2 - y^2 = 4 - 2x \leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1; z = 0$

Berarti daerah integrasi untuk mencari benda pejal yang dimaksud adalah
$S = \{(x,y) | (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$

Perhatikan ilustrasi berikut



Dari ilustrasi tersebut, permukaan f dan g simetri terhadap bidang $y = 0$ pada $S = \{(x, y) | (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$.*

Akan dibuktikan bahwa pernyataan $(*)$ benar,

Akan ditunjukan bahwa $\forall a, b \in R \ni (a, 0 + b), (a, 0 - b) \in S \rightarrow f(a, 0 + b) = f(a, 0 - b)$

Ambil sebarang $a, b \in R$ sehingga $(a, 0 + b), (a, 0 - b) \in S$ perhatikan bahwa

$f(a, 0 + b) = 4 - a^2 - b^2$ dan $f(a, 0 - b) = 4 - a^2 - (-b)^2 = 4 - a^2 - b^2 = f(a, 0 + b)$

Telah ditunjukan $\forall a, b \in R \ni (a, 0 + b), (a, 0 - b) \in S \rightarrow f(a, 0 + b) = f(a, 0 - b)$ berarti permukaan f simetri terhadap bidang $y = 0$ pada S.

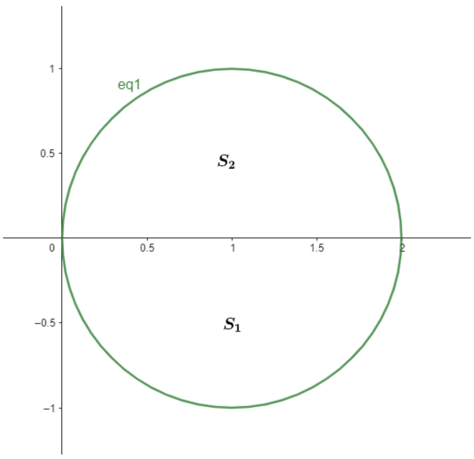
Akan ditunjukan bahwa $\forall a, b \in R \ni (a, 0 + b), (a, 0 - b) \in S \rightarrow g(a, 0 + b) = g(a, 0 - b)$

Ambil sebarang $a, b \in R$ sehingga $(a, 0 + b), (a, 0 - b) \in S$ perhatikan bahwa

$g(a, 0 + b) = 4 - 2a$ dan $f(a, 0 - b) = 4 - 2a = g(a, 0 + b)$

Telah ditunjukan $\forall a, b \in R \ni (a, 0 + b), (a, 0 - b) \in S \rightarrow g(a, 0 + b) = g(a, 0 - b)$ berarti permukaan g simetri terhadap bidang $y = 0$ pada S.

Perhatikan ilustrasi S



Misal volume benda pejal yang dimaksud adalah V maka $V = \iint_S \ f(x, y) - g(x, y) \, dA$

Pandang $S = S_1 \cup S_2$ karena f dan g simetri terhadap $y = 0$ maka

$V = 2 \iint_{S_2} f(x, y) - g(x, y) \, dA$

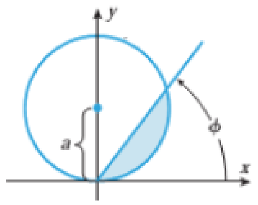
Kemudian pandang S_2 sebagai himpunan y sederhana

$$S_2 = \left\{(x, y) \middle| 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq \sqrt{1 - (x - 1)^2}\right\}$$

Sehingga jika $f(x, y) - g(x, y) = 2x - x^2 - y^2$

$$V = 2\iint_{S_2} f(x,y) - g(x,y)\, dA = 2\left(\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} 2x - x^2 - y^2 dy\, dx\right)$$

3. Buktikan bahwa luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini adalah $a^2\phi - \frac{1}{2}a^2 \sin 2\phi$



Jawab:

Cari persamaan dari lingkaran dan sinar pada daerah tersebut

Persamaan lingkaran

$x^2 + (y-a)^2 = a^2 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2 \leftrightarrow x^2 + y^2 = 2ay$

Jika $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta \rightarrow x^2 + y^2 = 2ay \equiv r^2 = 2ar\sin\theta \equiv r = 2a\sin\theta$

Persamaan sinar $\theta = \varphi$

Misal daerah yang diarsir adalah S, pandang S sebagai himpunan r sederhana maka

$S = \{(r,\theta) | 0 \le r \le 2a\sin\theta\, ; 0 \le \theta \le \varphi\}$

Misal luas S adalah A_S maka

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_S dA \\ &= \int_0^{\varphi}\int_0^{2a\sin\theta} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\varphi} 2a^2 \sin^2\theta\, d\theta \\ &= a^2 \int_0^{\varphi} 1 - \cos 2\theta\, d\theta \\ &= a^2\left(\int_0^{\varphi} d\theta - \int_0^{2\varphi} \frac{\cos 2\theta}{2} d(2\theta)\right) \\ &= a^2\left(\theta\, \Big|_{0\ \theta}^{\varphi} - \frac{1}{2}\sin 2\theta\, \Big|_{0\ \ 2\theta}^{2\varphi}\right) \\ &= a^2\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) \end{aligned}$$

Terbukti bahwa luas daerah yang diarsir (A_s) adalah $a^2\varphi - \frac{1}{2}a^2 \sin 2\varphi$.

4. Buat sketsa benda pejal yang dibatasi oleh silinder $x^2 + z^2 = 9$, bidang-bidang $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ dan $x + 2y = 2$, kemudian hitung volumenya.

Jawab:

Perhatikan jejak $x^2 + z^2 = 9$ pada

Bidang xy $(z = 0) \to x = \pm 3$

Bidang $yz(x = 0) \to z = \pm 3$

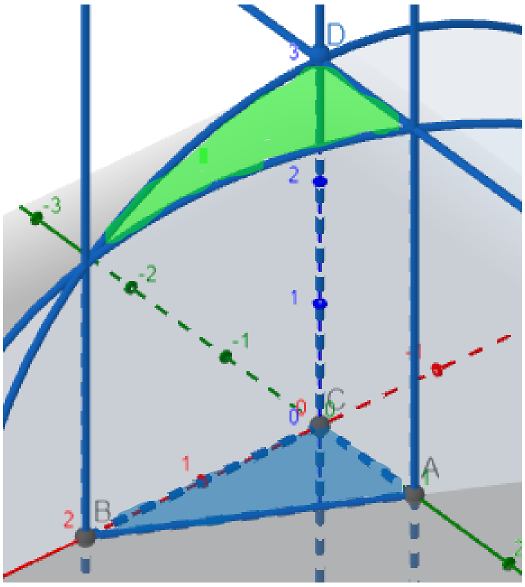
Bidang $xz(y = 0) \to x^2 + z^2 = 9$

Perhatikan jejak $x + 2y = 2$ pada

Bidang xy $(z = 0) \to x = 2 - 2y$

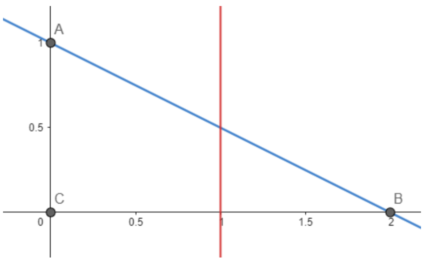
Bidang $yz(x = 0) \to y = 1$

Bidang $xz(y = 0) \to x = 2$



Volume benda pejal tersebut dapat dicari dengan integral lipat atas $z = \sqrt{9 - x^2}$ pada S merupakan daerah segitiga ABC.

Perhatikan ilustrasi S berikut



A titik potong $x + 2y = 2$ dan $x = 0$, $A(0,1)$

B titik potong $x + 2y = 2$ dan $y = 0$, $B(2,0)$

$$x + 2y = 2 \sim y = \frac{1}{2}(2 - x)$$

Pandang S sebagai himpunan y sederhana

$S = \left\{(x,y) \middle| 0 \le x \le 2; 0 \le y \le \frac{1}{2}(2-x)\right\}$

Sehingga misal V adalah volume benda pejal yang dimaksud, maka

$$\begin{aligned} V &= \iint_S \sqrt{9-x^2}\, dA \\ &= \int_0^2 \int_0^{1-\frac{x}{2}} \sqrt{9-x^2} dy\, dx \\ &= \int_0^2 \left(1-\frac{x}{2}\right)\sqrt{9-x^2} dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{9-x^2} dx - \frac{1}{2}\int_0^2 x\sqrt{9-x^2} dx \end{aligned}$$

Perhatikan untuk $\int_0^2 \sqrt{9-x^2}dx$,

Misal $x = 3\sin u \to dx = 3\cos u\, du$

Saat $x = 0 \to u = \sin^{-1}(0)$, saat $x = 2 \to u = \sin^{-1}\frac{2}{3}$

$$\int_0^2 \sqrt{9-x^2}dx = \int_{\sin^{-1}0}^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} \sqrt{9-9\sin^2 u}\, 3\cos u\, du = \int_{\sin^{-1}0}^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 9\cos^2 u\, du = \frac{9}{2}\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} \cos 2u + 1 du$$

$$= \frac{9}{2}\left(\int_0^{2\sin^{-1}\frac{2}{3}} \frac{\cos 2u}{2} d(2u) + \int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} du\right) = \frac{9}{4}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$

$$= \frac{9}{2}\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2}{3} = \frac{9}{2}.\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2}{3} = \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$

Perhatikan untuk $-\frac{1}{2}\int_0^2 x\sqrt{9-x^2}dx$

Misal $9 - x^2 = t \to -2xdx = dt \to xdx = -\frac{dt}{2}$

Saat $x = 0 \to t = 9$

Saat $x = 2 \to t = 5$

$$-\frac{1}{2}\int_0^2 x\sqrt{9-x^2}dx = \frac{1}{4}\int_9^5 t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{4}\int_5^9 t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{4}.\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_5^9 = -\frac{1}{6}\left(27 - 5\sqrt{5}\right) = -\frac{9}{2} + \frac{5}{6}\sqrt{5}$$

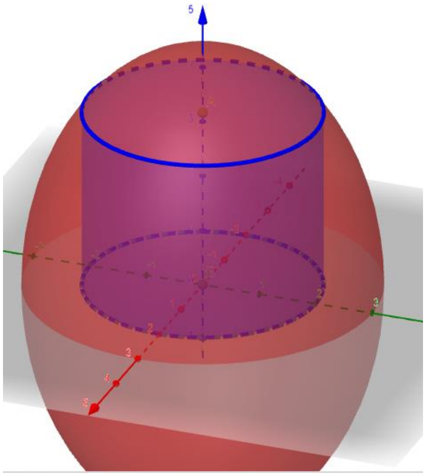
Berarti

$$V = = \int_0^2 \sqrt{9-x^2}dx - \frac{1}{2}\int_0^2 x\sqrt{9-x^2}dx = \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2}{3} - \frac{9}{2} + \frac{5}{6}\sqrt{5} = \frac{7\sqrt{5}}{3} - \frac{9}{2} + \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$

5. Dengan menggunakan koordinat polar, tentukan volume bend apejal di atas bidang-xy yang dibatasi oleh permukaan $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 18$ dan $x^2 + y^2 = 4$

Jawab:

Berikut ilustrasi dari benda pejal yang dimaksud soal nomer 5



Misal volume benda pejal tersebut adalah V maka

$V = \iint_S \sqrt{18 - 2(x^2 + y^2)}\, dA$ dengan

$S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\} = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 2; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{18 - 2r^2}.rdrd\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{9 - r^2}.rdrd\theta$

Misal $9 - r^2 = p \rightarrow -2rdr = dp \rightarrow rdr = -\frac{dp}{2}$

Saat $r = 0 \rightarrow p = 9$, Saat $r = 2 \rightarrow p = 5$

Sehingga $V = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_9^5 \sqrt{p}(-\frac{dp}{2})\, d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \int_5^9 \sqrt{p} dp\, d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}(27 - 5\sqrt{5}) d\theta$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{2}{3}(27 - 5\sqrt{5}) \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{2}{3}(27 - 5\sqrt{5}) 2\pi = \frac{2}{3}\pi(27 - 5\sqrt{5})\sqrt{2}$