Persamaan Diferensial Ordiner

pengertian

Persamaan diferensial merupakan gabungan suatu fungsi yang tidak diketahui dan fungsi turunannya.

Variabel yang didiferensialkan disebut ***variabel tak bebas*** dan variabel tempat variabel tak bebas didiferensialkan disebut ***variabel bebas*** *(independen)*.

lanjutan ....

Jika fungsi tersebut mencakup satu variabel bebas, maka disebut ***persamaan diferensial ordiner***.

Fungsi dengan lebih dari satu variabel bebas disebut ***persamaan diferensial parsial***.

lanjutan

Jika suatu fungsi turunan tertingginya adalah turunan pertama, maka persamaan tersebut disebut ***persamaan diferensial orde satu***.

Suatu ***persamaan orde dua*** akan mempunyai turunan kedua sebagai turunan tertinggi.

Penyelesaian persamaan differensial **orde ke-n** membutuhkan **n kondisi** yang diketahui.

Ada 2 problem dlm PD

1. *masalah harga awal* (*initial value problem*) yaitu jika kondisi telah ditentukan pada variabel bebas tertentu atau pada titik tertentu (umumnya pada kondisi awal t = 0)

Ada 2 problem dlm PD

2. *masalah harga batas* (*boundary value problem*) yaitu jika PD dispesifikasikan dengan 2 titik yang berbeda

PD berikut

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3xy + 7y = \cos(2x)$$

dengan y(0) = 1 dan y(π) = 0

Contoh:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\,\frac{dy}{dx} = e^x$$

jika $y(\pi) = 1$ $y'(\pi) = 2$ Initial value problem

Jika diketahui:

$y(0) = 1$ $y(1) = 1$ Boundary value problem

Ada dua kategori utama metode numerik dalam penyelesaian persamaan differensial ordiner, yaitu

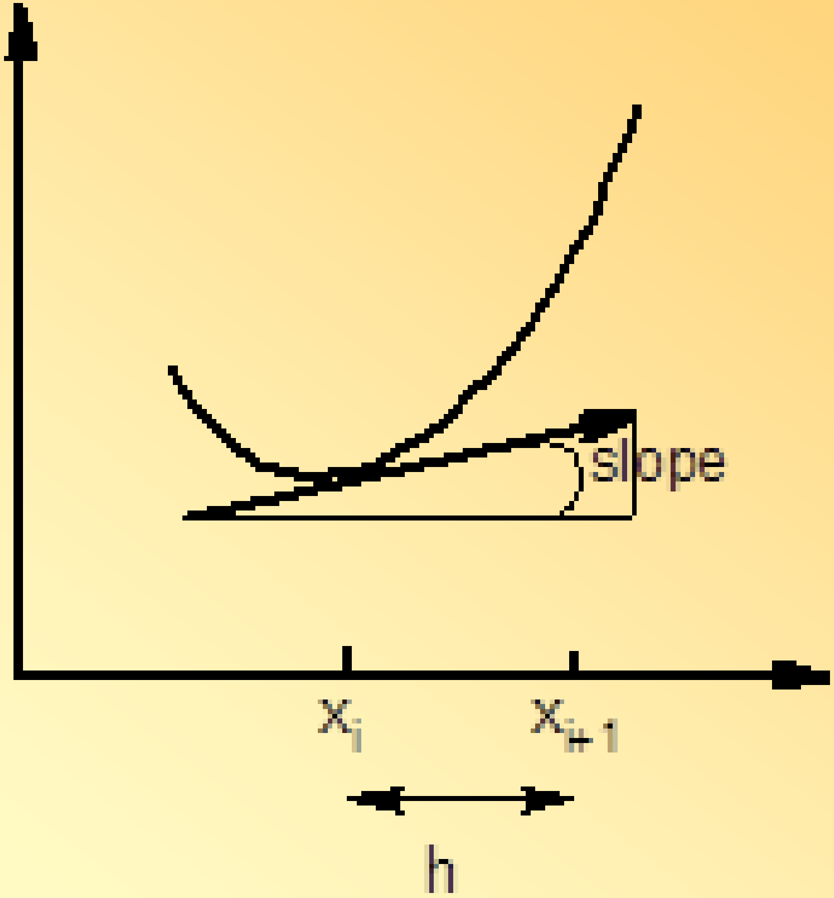
1. metode satu langkah, yaitu penyelesaian hanya dengan 1 langkah saja. Yang akan dibahas disini adalah metode Euler
2. metode multi langkah, yaitu penyelesaian dengan beberapa langkah. Yang akan dibahas adalah metode Runge-Kutta dan metode predictor-korektor.

Metode Euler

Metode Euler adalah salah satu metode satu langkah yang paling mendasar.

Semua metode satu langkah menggunakan suatu slope ϕ untuk mengekstrapolasikan suatu harga lama variabel tak bebas terhadap suatu harga baru variabel tak bebas tersebut.

Perbedaanya adalah pada cara memperkirakan besarnya slope tersebut


slope
x_i
x_{i+1}
h

Bentuk umum $y_{n+1} = y_n + \phi\, h$

Untuk metode Euler turunan pertama memberikan perkiraan langsung slope pada y_n.

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)\, h$$

Selesaikan dengan Metode Euler

$$dy/dt = y - 20 \qquad \text{dengan } y(0) = 100$$

Tentukan nilai y pada berbagai nilai t dari 0 sampai 5

h ambil 1 dan 0.5

$dy/dt = y - 20$

Pada $t = 0$, $y = 100$

$f_0 = dy/dt = y - 20 = 80$

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)\,h$$

$h = 1$

$t_1 = t_0 + h \quad = 0 + 1 = 1$

$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)\,h \quad = 100 + 80 \times 1 = 180$

$f_1 = dy/dt = y - 20 \quad = 180 - 20 = 160$

$t_2 = t_1 + h \qquad = 1 + 1 = 2$

$y_2 = y_1 + f(t_1,y_1)\ h \qquad = 180 + 160 \text{ x } 1 = 340$

$f_2 = dy/dt = y - 20 \qquad = 340 - 20 = 320$

$t_3 = t_2 + h \qquad = 2 + 1 = 3$

$y_3 = y_2 + f(t_2,y_2)\ h \qquad = 340 + 320 \text{ x } 1 = 660$

$f_3 = dy/dt = y - 20 \qquad = 660 - 20 = 640$

dst

Kerjakan utk h = 0.5

METODE RUNGE-KUTTA

Bentuk umum $y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n, h)$

$f(t_n, y_n, h)$ disebut *fungsi inkremen* yang dapat diinterpretasikan sebagai sebuah slope rata-rata sepanjang interval.

Fungsi inkremen dapat ditulis sebagai

$$f(t_n, y_n, h) = a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_nk_n$$

Ada beberapa jenis metode Runge-Kutta yang dapat digunakan tergantung dari pengembangan jumlah suku-suku yang berbeda pada fungsi inkremen. Metode Runge-Kutta yang paling popular adalah Metode Runge-Kutta klasikal yang menggunakan orde 4 (n = 4).

$$y_{n+1} = y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

dengan

$$k_1 = f(t_n, y_n)\, h$$

$$k_2 = f(t_n + h/2, y_n + k_1/2)\, h$$

$$k_3 = f(t_n + h/2, y_n + k_2/2)\, h$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + k_3)\, h$$

Selesaikan dengan Metode Runge-Kutta

$$dy/dt = y - 20 \qquad \text{dengan } y(0) = 100$$

Tentukan nilai y pada berbagai nilai t dari 0 sampai 5

$h = 1$

$dy/dt = f = y - 20$

Pada $t = 0$, $y = 100$, $f_0 = dy/dt = y - 20 = 80$

$$y_{n+1} = y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

$h = 1$

$t_1 = t_0 + h \quad = 0 + 1 = 1$

$k_1 = f(t_0, y_0) \quad = 80$

$k_2 = f(t_0 + h/2, y_0 + k_1/2) \quad = 120$

$k_3 = f(t_0 + h/2, y_0 + k_2/2) \quad = 140$

$k_4 = f(t_0 + h, y_0 + k_3) \quad = 220$

$y_1 = y_0 + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 = 236{,}7$

$t_2 = t_1 + h \qquad = 1 + 1 = 2$

$k_1 = f(t_0, y_0) \qquad = 236{,}7$

$k_2 = f(t_0 + h/2, y_0 + k_1/2) \qquad = 216{,}7$

$k_3 = f(t_0 + h/2, y_0 + k_2/2) \qquad = 379{,}2$

$k_4 = f(t_0 + h, y_0 + k_3) \qquad = 595{,}8$

$y_2 = y_1 + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 = 606{,}8$

dst

Kerjakan utk $h = 0.5$

Tugas

Selesaikan $dy/dt = 2\,y\,t$

dengan $y = 2$ untuk $t = 0$

Selesaikan dg metode Euler dan Runge-Kutta sampai $t = 3$

Gunakan $h = 0.05$ (dengan matlab)

Bandingkan dengan penyelesaian secara analitis

$y = 2\exp(t^2)$

Buat grafik sebagai perbandingan error masing-masing perhitungan.

function Runge-Kutta

```
function [tvals,yvals]=rkgen(func,tspan,startval,step)
b=[ ];c=[ ];d=[ ];order = 4;
b=[1/6 1/3 1/3 1/6]; d=[0 0.5 0.5 1];
c=[0 0 0 0; 0.5 0 0 0; 0 0.5 0 0; 0 0 1 0];
steps=(tspan(2)-tspan(1))/step+1;
y=startval;t=tspan(1);
yvals=startval;tvals=tspan(1);
for  j=2:steps
    k(1)=step*feval(func,t,y);
    for i=2:order
        k(i)=step*feval(func,t+step*d(i),y+c(i,1:i-1)*k(1:i-1)');
    end;
    y1=y+b*k';t1=t+step;
    tvals=[tvals,t1]; yvals=[yvals,y1];
    t=t1;y=y1;
end;
```

METODE PREDIKTOR KOREKTOR

- Pendekatan alternatif lain adalah dengan mendasarkan pengertian bahwa sekali perhitungan dimulai informasi yang berharga dari titik-titik terdahulu berada dalam pengaturan.
- Pendekatan ini disebut *metode multi langkah*.
- Metode prediktor-korektor adalah metode multi langkah yang menggunakan beberapa persamaan untuk memperkirakan harga variabel tak bebas ke-n+1.

Metode Prediktor - Korektor

- Sebagai contoh dapat digunakan metode Adam-Bashforth-Moulton.

$$y_{n+1} = y_n + h(55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3})/24$$

$$y'_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

$$y_{n+1} = y_n + h(9y'_{n+1} - 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2})/24$$

$$y'_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

- Terlihat dibutuhkan tiga titik awal untuk dapat menggunakan metode Adam-Bashforth-Moulton. Tiga titik awal ini dapat diperoleh dengan menggunakan metode Runge-Kutta.

function : ABM feat Runge-Kutta

```
function [tvals,yvals]=abm(func,tspan,startval,step)
b=[ ];c=[ ];d=[ ];order = 4;
b=[1/6 1/3 1/3 1/6]; d=[0 0.5 0.5 1];
c=[0 0 0 0; 0.5 0 0 0; 0 0.5 0 0; 0 0 1 0];
steps=(tspan(2)-tspan(1))/step+1;
y=startval;t=tspan(1);fval(1)=feval(func,t,y);
ys(1)=startval;yvals=startval;tvals=tspan(1);
```

LANJUT SLIDE BERIKUTNYA

lanjutan

```
% Tiga langkah awal dengan Metode Runge-Kutta
for  j=2:4
    k(1)=step*feval(func,t,y);
    for i=2:order
        k(i)=step*feval(func,t+step*d(i),y+c(i,1:i-1)*k(1:i-1)’);
    end;
    y1=y+b*k’;ys(j)=y1;t1=t+step;
    fval(j)=feval(func,t1,y1);
    tvals=[tvals,t1]; yvals=[yvals,y1];
    t=t1;y=y1;
end;
```

LANJUT SLIDE BERIKUTNYA

lanjutan

```
% Langkah selanjutnya dg ABM orde 4
for I=5:steps
    y1=ys(4)+step*(55*fval(4)-59*fval(3)+37*fval(2)-9*fval(1))/24;
    t1=t+step;fval(5)=feval(func,t1,y1);
    yc=ys(4)+step*(9*fval(5)+19*fval(4)-5*fval(3)+fval(2))/24;
    fval(5)=feval(func,t1,yc);
    fval(1:4)=fval(2:5);
    ys(4)=yc;
    tvals=[tvals,t1];yvals=[yvals,yc];
    t=t1; y=y1;
end
```

LATIHAN

Selesaikan $dy/dt = 2yt$

dengan $y = 2$ untuk $t = 0$

Penyelesaian secara analitis $y = 2\exp(t^2)$

```
t0=0; tf=2; tinc=0.25; steps=floor((tf-t0)/tinc+1);
[t,y1]=rkgen('F72',[t0 tf],2,tinc);
[t,y2]=abm('F72',[t0 tf],2,tinc);
disp('  t      Runge-Kutta   Prediktor-Korektor     Eksak ')
for i=1:steps
   fprintf('%8.2f%14.7f%18.7f%16.7f\n',t(i),y1(i),y2(i), 2*exp(t(i)*t(i)));
end
```

```
function v=F72(t,y)
v=2*t*y;
```

t	Runge-Kutta	Prediktor-Korektor	Eksak
0.00	2.0000000	2.0000000	2.0000000
0.25	2.1289876	2.1289876	2.1289889
0.50	2.5680329	2.5680329	2.5680508
0.75	3.5099767	3.5099767	3.5101093
1.00	5.4357436	5.4340314	5.4365637
1.25	9.5369365	9.5206761	9.5414664
1.50	18.9519740	18.8575896	18.9754717
1.75	42.6424234	42.1631012	42.7618855
2.00	108.5814979	106.2068597	109.1963001

FUNGSI ode

Matlab menyediakan fungsi-fungsi untuk penyelesaian persamaan differensial ordiner, a.l.

ode23, ode45, ode113

Untuk melakukan hal tersebut perlu ditulis sebuah fungsi M-File yang menghasilkan derivatif untuk nilai variabel tak bebas

Soal 1

Selesaikan $dy/dt = 2yt$ dengan $y = 2$ untuk $t = 0$

- Penyelesaian secara analitis $y = 2\exp(t^2)$

jawaban

```
yo = 2;
to = 0;
tn = 2;
n = 11;
datat = linspace(to,tn,n);
[t,y] = ode45('soal1',datat,yo)
yhit = 2.*exp(datat.^2)
plot(t,y,'o',datat,yhit,'-')
```

```
function dy_dt = soal1(t,y)
dy_dt=2*y*t;
```

Soal 2

Sebagai contoh penyelesaian PDO,

$$\frac{dC}{dt} = 1 - C - xk * C$$

$$\frac{dT}{dt} = 1 - T - \alpha * xk * C$$

$$xk = \beta * T^2$$

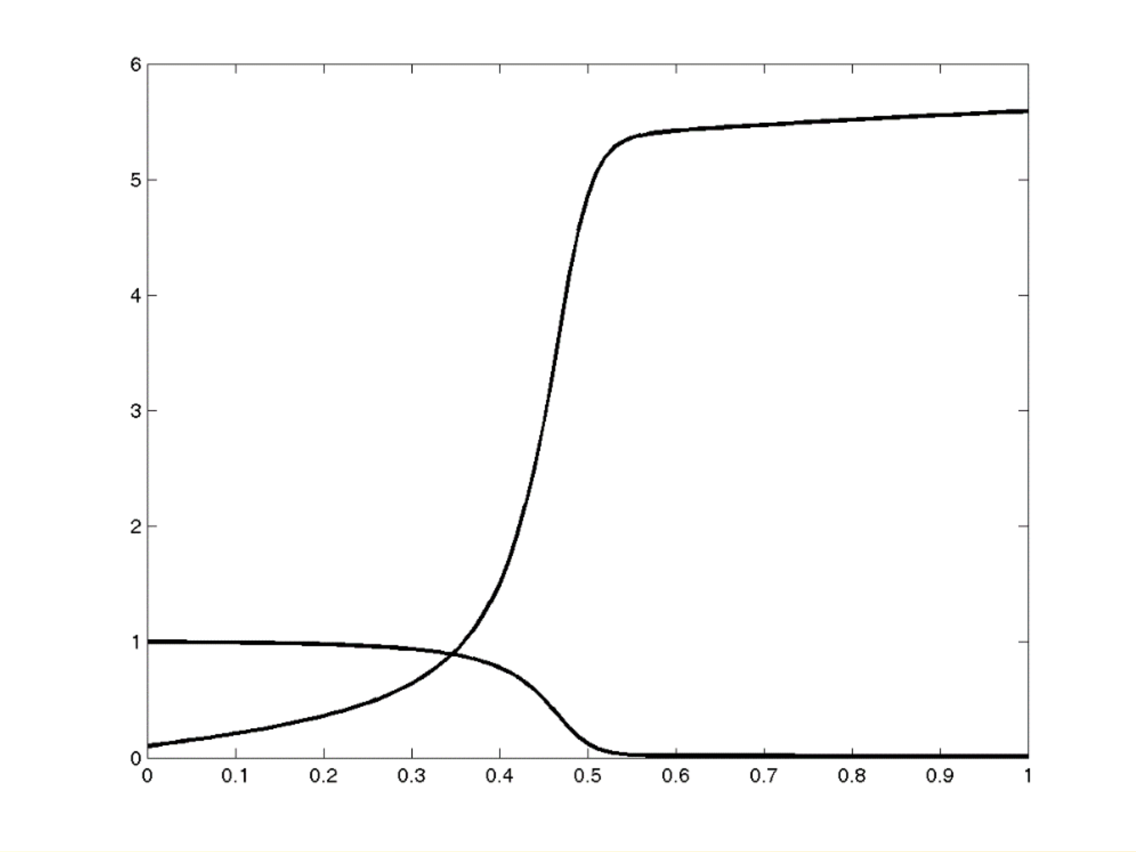
α = -5; β = 2;

Nilai awal Co = 1; To = 0.1;

to = 0; tf = 1;

```
clear all
global Alpha Beta
 Alpha = -5.; Beta  =  2.;
 y0(1) = 1. ; y0(2) = 0.1;
 t0 = 0.; tf = 1.;
[t y] = ode45('F73', [t0:0.01:tf], y0);
temp = [t y]; save ode.dat temp -ascii
plot(t, y, 'k-','linewidth',2)
```

```
function dydt = F73(time, y)
global Alpha Beta
c = y(1);
T = y(2);
xk = Beta*T*T;
dydt(1) = 1 - c - xk*c       ;
dydt(2) = 1 - T - Alpha*xk*c ;
 dydt = dydt';
```

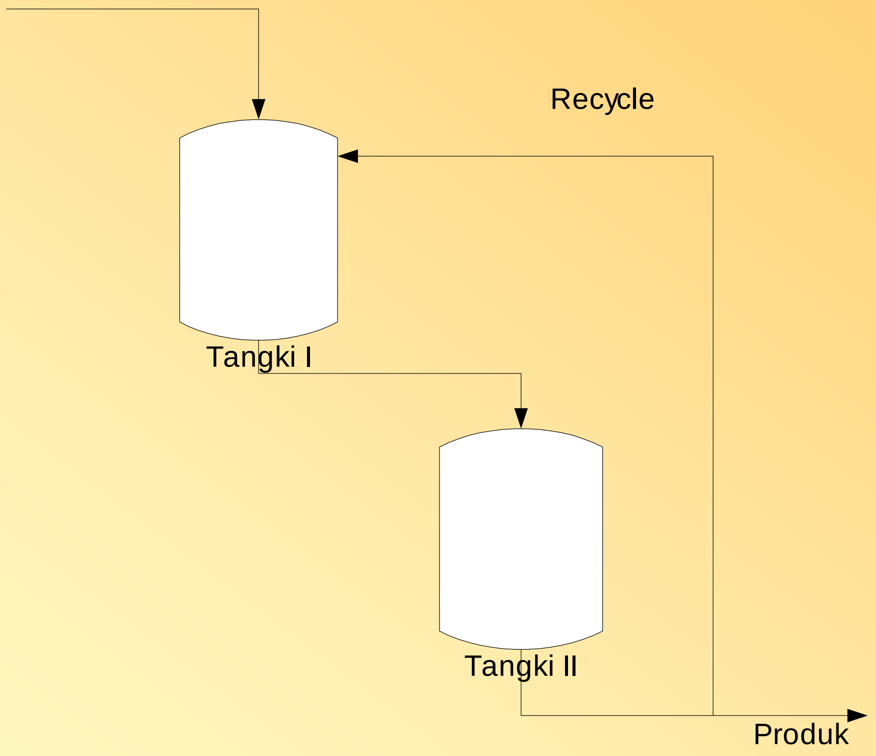

0
1
2
3
4
5
6
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Soal 3

Dua buah tangki dengan kapasitas 100 L diisi penuh dengan larutan garam dengan konsentrasi 20 g/L. Ke dalam tangki I dimasukkan air 5 L/menit, dan pada saat yang sama dari tangki I dialirkan 8 L/menit larutan ke tangki II. Dari tangki II dialirkan 8 L/menit tapi dipecah menjadi 2 aliran yaitu 3 L/menit dikembalikan (di-*recycle*) ke tangki I dan 5 L/menit diambil sebagai hasil.

Tentukan konsentrasi garam pada kedua tangki setelah 30 menit.

lanjutan

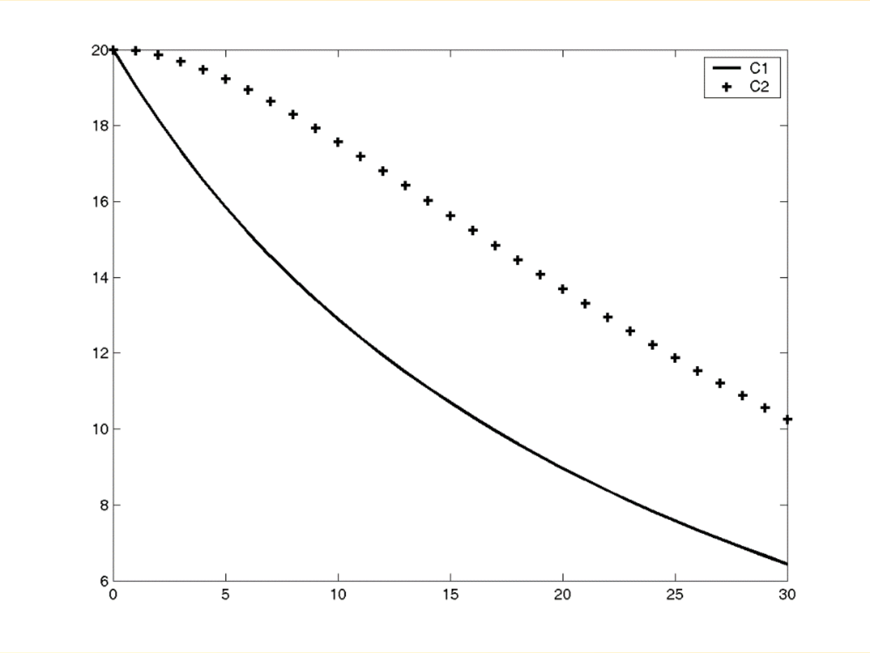


Neraca massa tangki I

$$dC1/dt = (q0*C0 + qR*C2 - q1*C1)/V1$$

Neraca massa tangki II

$$dC2/dt = (q1*C1 - q2*C2)/V2$$


C1
C2
20
18
16
14
12
10
8
6
0
5
10
15
20
25
30

```
C1o = 20; C2o = 20; Co = [C1o C2o];
to = 0; tn = 30; n = 31; datat = linspace(to,tn,n);
[t,C]= ode45('F74',datat,Co);
 plot(t,C(:,1),'k-',t,C(:,2),'k+','LineWidth',2);
legend('C1','C2')
t = t(n)
C1 = C(n,1)
C2 = C(n,2)
```

Program terkait

```
function dCdt = F74(t,C)
V1 = 100; V2 = 100; q0 = 5; q1 = 8; q2 = 8; qR = 3; qproduk = 5; C0 = 0;
dCdt1 = (q0*C0 + qR*C(2) - q1*C(1))/V1;
dCdt2 = (q1*C(1) - q2*C(2))/V2;
dCdt = [dCdt1
   dCdt2];
```

Soal 4

Dalam sistem yang tertutup, tiga komponen bereaksi dengan langkah sebagai berikut

$$A \xrightarrow{k_1} B$$

$$B + C \xrightarrow{k_2} A + C$$

$$2B \xrightarrow{k_3} C + B$$

mengikuti persamaan differensial berikut :

$$\frac{dC_A}{dt} = -k_1 C_A + k_2 C_B C_C$$

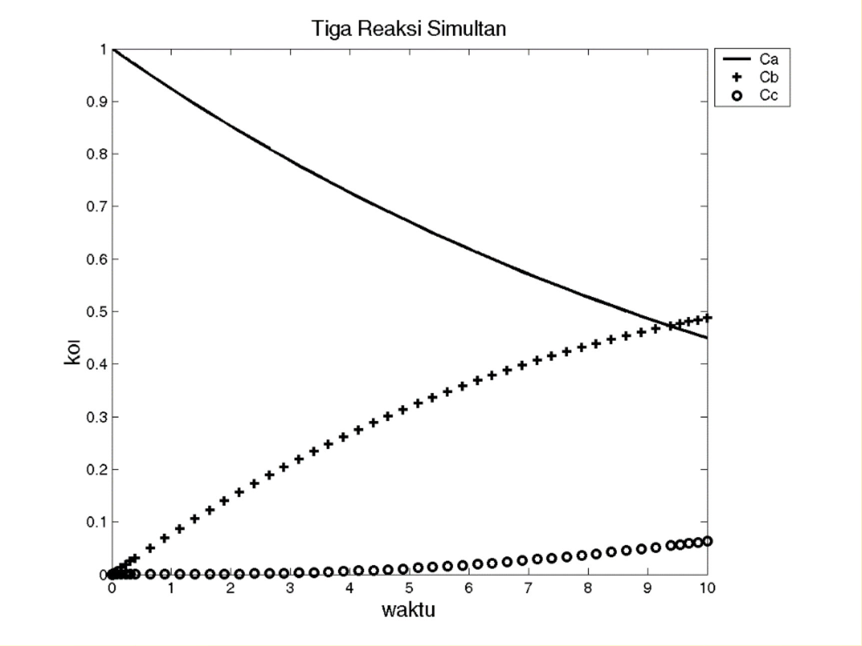
$$\frac{dC_B}{dt} = k_1 C_A - k_2 C_B C_C - k_3 C_B^2$$

$$\frac{dC_C}{dt} = k_3 C_B^2$$

$C_A(0) = 1$, $C_B(0) = C_C(0) = 0$.

Tentukan $C_A(10)$, $C_B(10)$, dan $C_C(10)$, jika $k_1 = 0{,}08$, $k_2 = 2 \times 10^{-4}$, $k_3 = 6 \times 10^{-2}$

08 Ordinary Differensial Equation

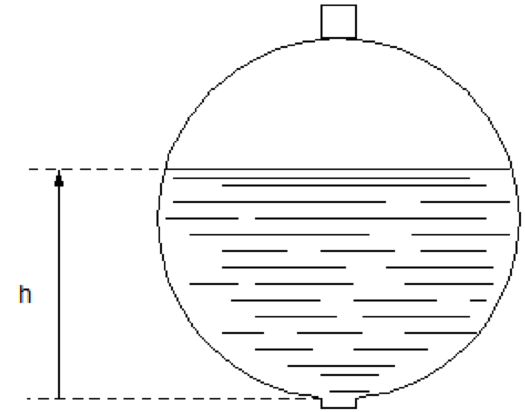


```
clear all
clc
global k1 k2 k3
k1 = 8e-2; k2 = 2e-4; k3 = 6e-2;
Cao = 1.0; Cbo = 0; Cco = 0;
Co = [Cao Cbo Cco];
to = 0; tn = 10; tspan = [to tn];
[t C] = ode45('F76',tspan,Co);
plot(t,C(:,1),'k-',t,C(:,2),'k+',t,C(:,3),'ko','LineWidth',2)
title('Tiga Reaksi Simultan','FontSize',14)
xlabel('waktu','FontSize',14)
ylabel('konsentrasi','FontSize',14)
legend('Ca','Cb','Cc',14)
```

Program terkait

```
function dC_dt=F76(t,C)
global k1 k2 k3
Ca = C(1); Cb = C(2); Cc = C(3);
 dC_dt(1) = -k1*Ca + k2*Cb*Cc;
dC_dt(2) = k1*Ca - k2*Cb*Cc - k3*Cb^2;
dC_dt(3) = k3*Cb^2;
dC_dt=dC_dt';
```

Tangki berisi air berbentuk bola diisi dari suatu lubang pada bagian puncak dan dikeluarkan melalui lubang yang lain pada bagian dasar kolom. Jika jari-jari tangki adalah r, maka volume air dalam tangki dapat dinyatakan sebagai fungsi h (tinggi cairan) sebagai berikut



$$V(h) = \pi r h^2 - \tfrac{1}{3}\pi h^3$$

Laju alir volum melalui lubang (q) merupakan fungsi tinggi cairan (h) dan dinyatakan dengan :

$$q = C_d A \sqrt{2gh}$$

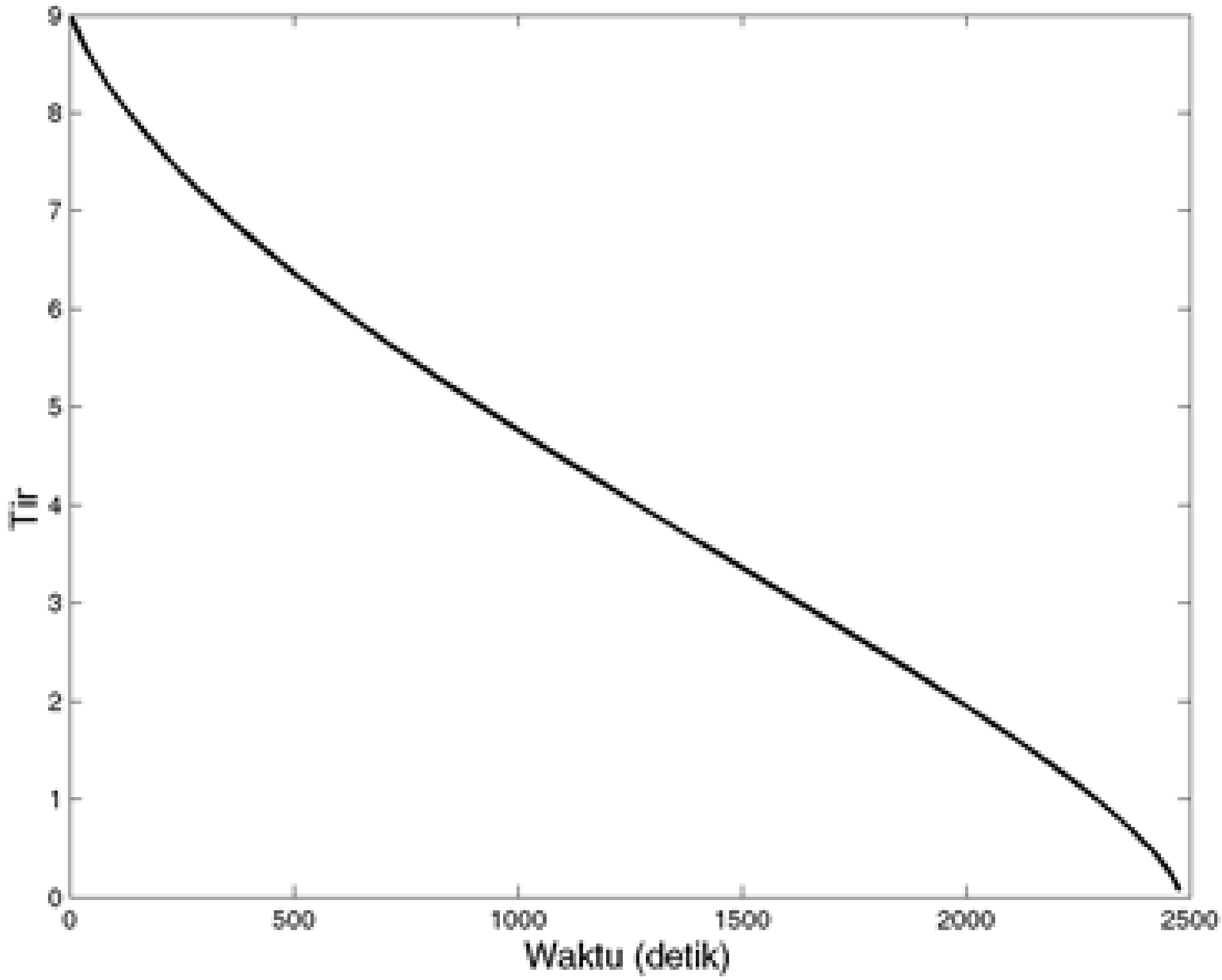
dengan
- A = luas lubang
- C_d = Konstanta, untuk air 0,6
- g = gravitasi

Tentukan waktu tangki menjadi kosong jika tinggi cairan mula-mula 9 ft. Tangki mempunyai jari-jari r = 5 ft dan lubang mempunyai diameter 1 in di dasar tangki. Gunakan g = 32,2 ft/second^2.

$$\frac{dV}{dt} = -q$$

$$2\pi r h \frac{dh}{dt} - \pi h^2 \frac{dh}{dt} = -C_d A \sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{C_d A \sqrt{2gh}}{\pi(2rh - h^2)}$$



Tir
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0
500
1000
1500
2000
2500
Waktu (detik)

```
clear all
ho = 9;            % ft
to = 0;            % menit
tn = 2475;         % menit
tspan = [to tn];
[t,h]=ode45('F79',tspan,ho);
% Plot hasil
plot(t,h,'k-','LineWidth',2)
xlabel('Waktu (detik)','FontSize',14)
ylabel('Tinggi (ft)','FontSize',14)
```

```
function hdot = F79(t,h)
Cd = 0.6;
r = 5;
dhole = 1/12;
A = pi*(dhole)^2;
g = 32.2;
 hdot = -Cd*A*(2*g*h)^0.5/(pi*(2*r*h-h^2));
```

Reaksi dehidrogenasi phase uap benzena dalam reaktor alir tubular

$$2C_6H_6 \rightarrow C_{12}H_{10} + H_2$$

$$C_6H_6 + C_{12}H_{10} \rightarrow C_{18}H_{14} + H_2$$

Kecepatan reaksi

$$r_1 = \frac{dx_1}{d(V/F)} = 14{,}96.10^6 e^{-15200/T}\left(p_B^2 - \frac{p_D p_H}{K_1}\right) \text{lbmol benzena bereaksi/(jam ft}^3\text{)}$$

$$r_2 = \frac{dx_2}{d(V/F)} = 8{,}67.10^6 e^{-15200/T}\left(p_B p_D - \frac{p_T p_H}{K_2}\right) \text{lbmol triphenil terbentuk//(jam ft}^3\text{)}$$

p_B = tekanan parsial benzena, atm

p_D = tekanan parsial diphenil, atm

p_T = tekanan parsial triphenil, atm

p_H = tekanan parsial hidrogen, atm

x_1 = konversi pada reaksi 1

x_2 = konversi pada reaksi 2

T = temperatur, 1033 K

V = volume reaktor, ft^3

F = laju alir bahan, lbmol/jam

P = tekanan total, 1 atm

$K_1 = 0{,}312$

$K_2 = 0{,}480$

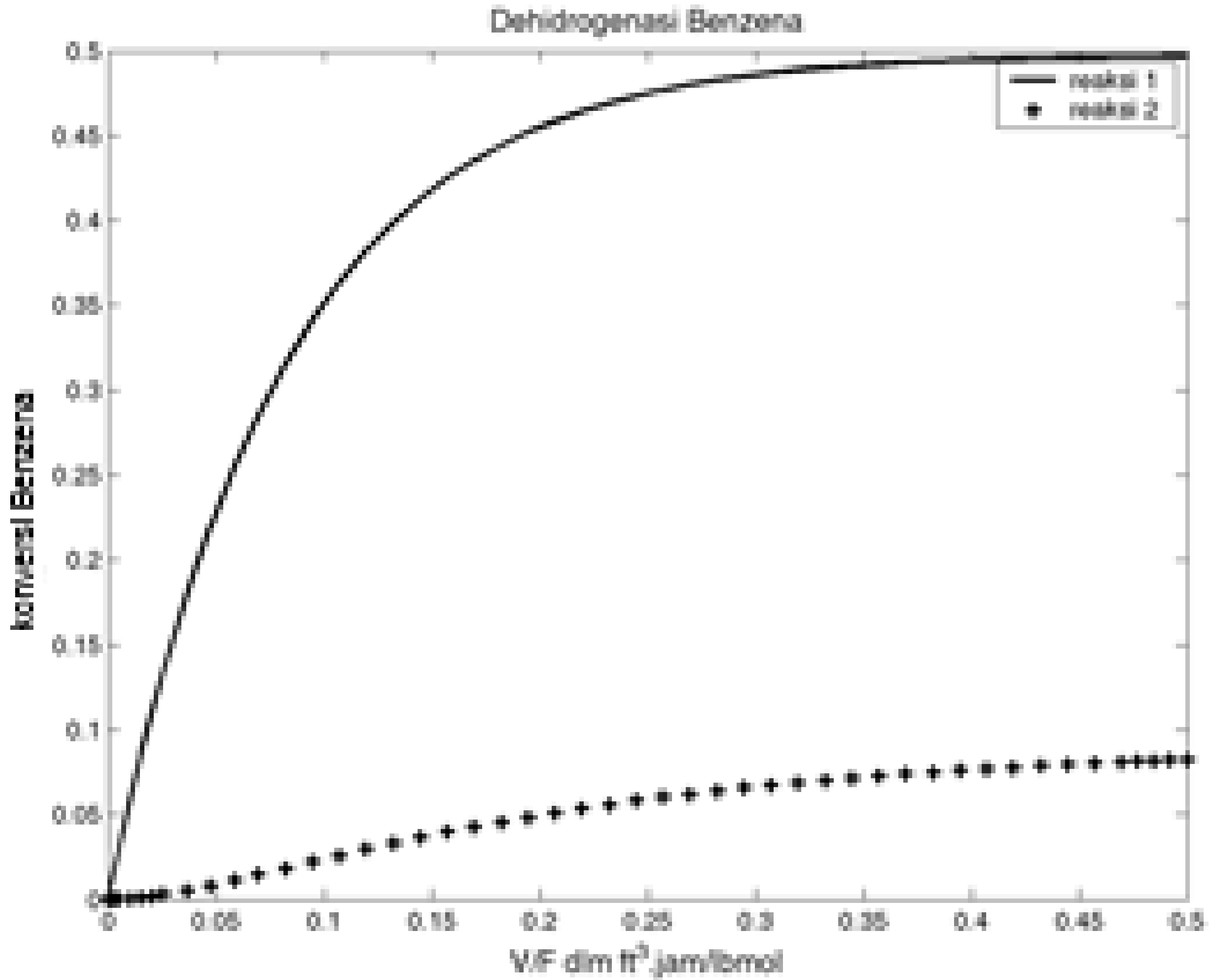
Jika umpan terdiri dari benzena murni 1 lbmol/ft^3 buktikan bahwa

$$\frac{dx_1}{d(V/F)} = 6{,}089\left[(1 - x_1 - x_2)^2 - \frac{\left(\frac{1}{2}x_1 - x_2\right)\left(\frac{1}{2}x_1 + x_2\right)}{0{,}312}\right]$$

$$\frac{dx_2}{d(V/F)} = 3{,}529\left[(1 - x_1 - x_2)\left(\frac{1}{2}x_1 - x_2\right) - \frac{x_2\left(\frac{1}{2}x_1 + x_2\right)}{0{,}480}\right]$$

Tentukan x_1 dan x_2 pada (V/F) = 0,5 ft^3jam/lbmol !

08 Ordinary Differensial Equation



```
global T K1 K2
T = 1033;
K1 = 0.312; K2 = 0.480;
x1o = 0; x2o = 0;
xo = [x1o x2o];
V_Fo = 0; V_Ff = 0.5;
V_Fspan = [V_Fo V_Ff];
[V_F,x]=ode45('F711',V_Fspan,xo);
plot(V_F,x(:,1),'k-',V_F,x(:,2),'k+','Linewidth',2)
title('Dehidrogenasi Benzena','FontSize',12)
xlabel('V/F dlm ft^3.jam/lbmol','FontSize',12)
ylabel('konversi Benzena','FontSize',12)
legend('reaksi 1', 'reaksi 2')
disp(['Pada V/F ',num2str(V_F(end))])
konversi = x(end,:)
```

```
function dx_dVF = F711(V_F,x)
global T K1 K2
dx_dVF(1) = 14.96*10^6*exp(-15200/T)*((1-x(1)-x(2))^2-...
    (0.5*x(1)-x(2))*(0.5*x(1)+x(2))/K1);
dx_dVF(2) = 8.67*10^6*exp(-15200/T)*((1-x(1)-x(2))*...
    (0.5*x(1)-x(2))-x(2)*(0.5*x(1)+x(2))/K2);
dx_dVF=dx_dVF';
```

MASALAH NILAI BATAS (BOUNDARY VALUE PROBLEM)

- Dalam persamaan differensial orde lebih dari satu, dibutuhkan nilai-nilai yang sudah diketahui untuk dapat mengevaluasi konstanta-konstanta dalam fungsi partikular. Beberapa nilai dispesifikasikan pada nilai variabel bebas yang sama yang biasanya merupakan nilai awal.
- Tetapi beberapa persoalan kadang nilai variabel bebas yang diketahui tidak pada nilai yang sama, karena nilai-nilai variabel bebas yang diketahui biasanya pada kondisi batas (*boundary condition*). Persoalan seperti ini disebut masalah nilai batas.

METODE *SHOOTING*

Metode *shooting* dapat diilustrasikan seperti sebuah meriam yang menembakkan pelurunya.

Meriam tersebut harus mempunyai sudut tertentu agar peluru bisa mengenai sasarannya.

Dalam penyelesaian persamaan differensial, sebuah nilai yang kritikal (biasanya *slope*) ditentukan nilainya.

Nilai awal yang telah diketahui dan nilai *slope* yang ditebak menyebabkan kita dapat menghitung titik-titik selanjutnya dengan metode-metode yang telah diberikan sebelumnya (metode Euler, Runge-Kutta, dan lain-lain).

Pada akhir perhitungan akan dibandingkan dengan nilai yang sudah diketahui. Jika ternyata nilai akhir hasil perhitungan tersebut telah sama dengan nilai yang diketahui maka nilai *slope* tebakan telah tepat. Tetapi jika nilai akhir hasil perhitungan berbeda dengan nilai yang diketahui maka harus ditentukan nilai *slope* yang baru.

Contoh:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + t\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - y = te^{2t}$$

$$y(0) = 1; \quad y(1) = e$$

Diselesaikan dengan mengubah menjadi PDO simultan order 1:

$$\frac{dy}{dt} = z$$

$$\frac{dz}{dt} = te^{2t} - tz^2 + y$$

Dibuat 3 m-file, yaitu 1 script file program utama dan 2 function

```
clc
clear all
x=0.5;
x1=fzero(@solver,x)
options=odeset('RelTol',1e-8,'AbsTol',[1e-8,1e-8]);
[t,u]=ode45(@equation1,[0 1],[1 x1],options)
```

```
function F = solver( x )
options=odeset('RelTol',1e-8,'AbsTol',[1e-8,1e-8]);
[t,u]=ode45(@equation1,[0 1],[1 x],options);
s=length(t);
F=u(s,1)-exp(1);
figure(1)
plot(t,u(:,1),t, exp(t))
end
```

```
function dy = equation1( t,y )
dy=zeros(2,1);
dy(1)=y(2);
dy(2)=t*exp(2*t)-t*y(2)^2+y(1);
end
```

FINITE DIFFERENCE METHOD

Metode beda hingga (*finite difference method*) sebenarnya adalah mengubah persamaan differensial ordiner menjadi sekumpulan persamaan aljabar, dengan suatu persamaan neraca untuk tiap titik atau volum terbatas dalam suatu sistem.

Teknik umum yang digunakan adalah dengan menempatkan derivatif dalam persamaan differensial ordiner dengan pendekatan beda hingga dalam suatu jaringan titik.

Pendekatan beda hingga

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \qquad \text{(forward)}$$

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \qquad \text{(backward)}$$

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} \qquad \text{(central)}$$

secara teoritis metode *central* lebih baik.

Untuk turunan kedua dengan metode *central*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \approx \frac{\dfrac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} - \dfrac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Contoh:

Selesaikan secara numerik dg Finite Difference Method

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0; \; y(0) = 0; \;\; y(1) = 1$$

$$h = \Delta x = 0{,}25$$

Penyelesaian:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + y_i = 0$$

$$y_{i-1} + (h^2 - 2)y_i + y_{i+1} = 0$$

$i = 0$	$x_0 = 0$	$y_0 = 0$
$i = 1$	$x_1 = 0{,}25$	$y_0 + (h^2 - 2)y_1 + y_2 = 0$
$i = 2$	$x_2 = 0{,}5$	$y_1 + (h^2 - 2)y_2 + y_3 = 0$
$i = 3$	$x_3 = 0{,}75$	$y_2 + (h^2 - 2)y_3 + y_4 = 0$
$i = 4$	$x_4 = 1$	$y_4 = 1$

Suatu batang silinder menghubungkan 2 dinding yang suhunya 400 ^{O}C dan 100 ^{O}C. Panjang silinder L = 10 cm dan diameter D = 1,2 cm. Sifat-sifat fisis batang silinder asumsikan konstan yaitu k = 0,2 kal/(det.cm ^{O}C) dan h = 0,00155 kal/(det cm^{2} ^{O}C).

Suhu udara luar, Tu = 30 ^{O}C. Asumsikan aliran hanya pada arah aksial saja.Buktikan bahwa

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{4h}{kD}\left(T - T_U\right) = 0$$

Tentukan distribusi suhu di dalam batang silinder dengan Δx = 2,5 cm.

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} + h'(T_\infty - T_i) = 0$$

$$-T_{i-1} + (2 + h'\Delta x^2)T_i - T_{i+1} = h'\Delta x^2 T_\infty$$

Fluida masuk pada koil pendingin sepanjang 10 m pada suhu 200 ^{0}C dan diinginkan keluar pada suhu 40 ^{0}C. Sebagai media pendingin digunakan air pada suhu 20 ^{0}C. Neraca panas proses adalah :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0{,}01\left(T - T_{pendingin}\right)$$

Tentukan distribusi suhu fluida, pada jarak 2,5 m, 5 m, dan 7,5 m !

Tentukan distribusi temperatur fluida pada 1 m, 2 m, 3 m, smp 9 m, dan 10 m

Fluida masuk pada koil pendingin sepanjang 10 m pada suhu 200 ^{0}C dan diinginkan keluar pada suhu 40 ^{0}C. Sebagai media pendingin digunakan air pada suhu 20 ^{0}C. Neraca panas proses adalah :

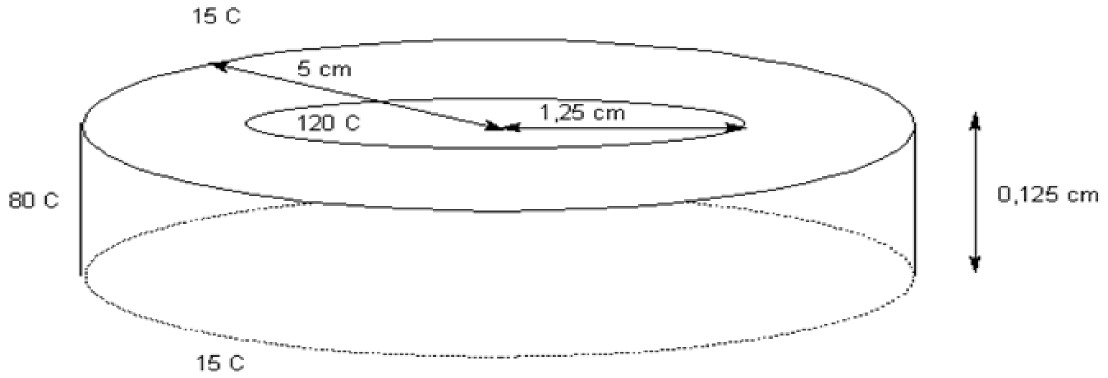
$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0{,}01(T - T_{pendingin})$$

Dua silinder berdiameter 2,5 cm dan 10 cm mempunyai ketebalan 0,125 cm. Didalamnya terdapat bahan dengan suhu 120 ^{O}C. Jika konduktivitas logam adalah k=40 W/m ^{O}C dan pada permukaan luas sisi tutup dan dasar panas hilang ke lingkungan dengan suhu 15 ^{O}C, serta koefisien transfer panas h=12 W/m^2 ^{O}C.

Buktikan :

$$kr\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + k\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{hr(T - T_u)}{L} = 0$$

Tentukan distribusi suhu di pipa sepanjang arah radial, jika permukaan luas silinder mempunyai suhu 80 ^{O}C.



Sebuah fin berbentuk lingkaran tipis digunakan untuk memindahkan panas.