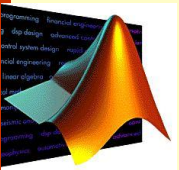
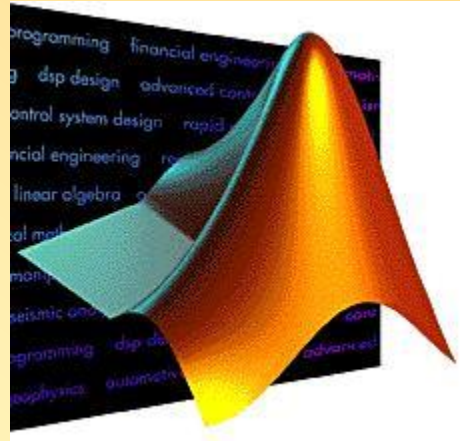


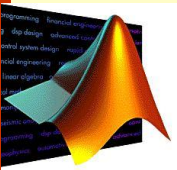
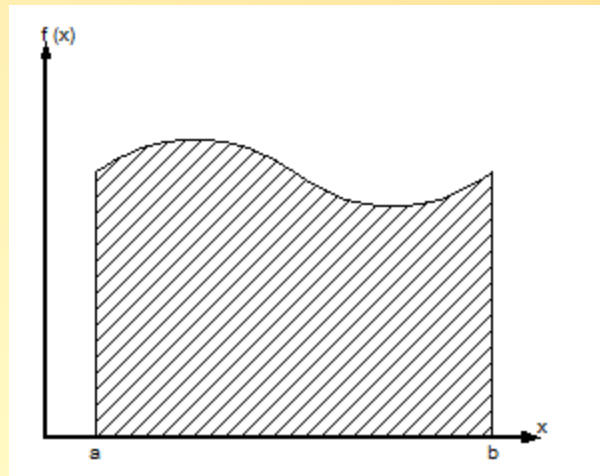
INTEGRASI NUMERIK



Secara matematis integrasi dinyatakan oleh :

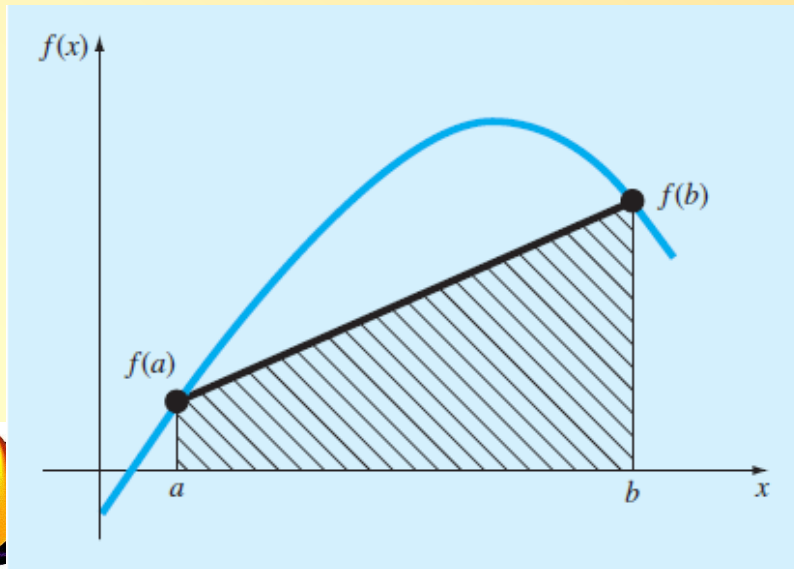
$$I = \int_a^b f(x) dx$$

which stands for the integral of the function $f(x)$ with respect to the independent variable x , evaluated between the limits $x = a$ to $x = b$.

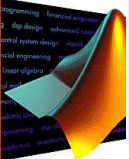


THE TRAPEZOIDAL RULE

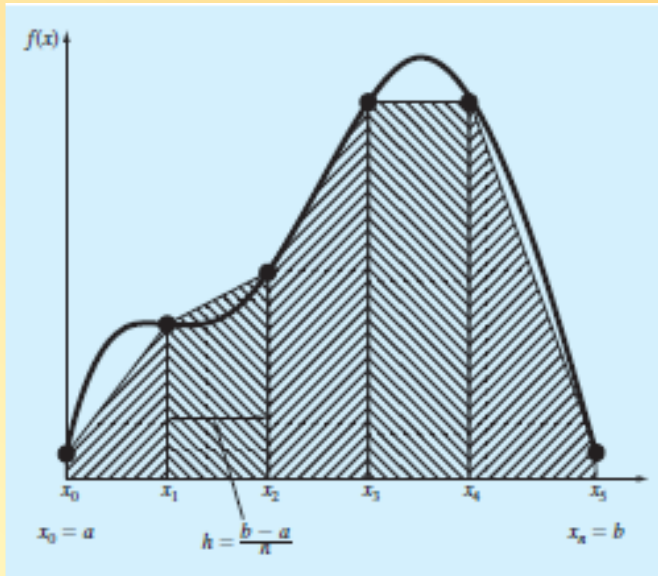
- Geometrically, the trapezoidal rule is equivalent to approximating the area of the trapezoid under the straight line connecting $f(a)$ and $f(b)$ in Fig. Recall from geometry that the formula for computing the area of a trapezoid is the height times the average of the bases. In our case, the concept is the same but the trapezoid is on its side. Therefore, the integral estimate can be represented as



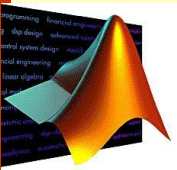
$$I = \text{width} \times \text{average height}$$



The Composite Trapezoidal Rule

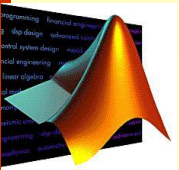


$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$



07 Numerical Integration

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) \, dx &= \frac{\Delta x}{2} (f(a) + f(x_1)) + \frac{\Delta x}{2} (f(x_1) + f(x_2)) + \dots + \frac{\Delta x}{2} (f(x_{n-1}) + f(b)) \\ &= \frac{\Delta x}{2} [f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b)] \\ &= \frac{(b-a)}{2n} [f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b)]\end{aligned}$$



Example

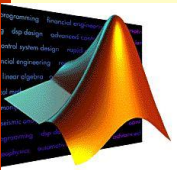
Find the integral of

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

from $a = 0$ to $b = 0.8$

- One segment trapezoidal rule
- Four segment trapezoidal rule
- Eight segment trapezoidal rule

Compare with the exact value.



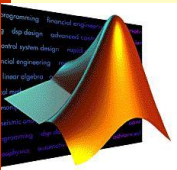
MATLAB M-file: trapz

Function `trapz`

`z = trapz(x,y)`

to find value of integral y from x used trapezoidal rule.

x and y are array the same size.



Soal 1a

Find the integral

$$y = x^2$$

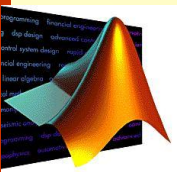
For x from 1 to 2

Exact value $y = 7/3 = 2.3333$

function **trapz**

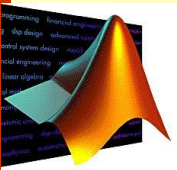
```
x = linspace(1,2,5);  
y = x.^2;  
z = trapz(x,y)
```

Try with the different n



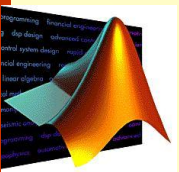
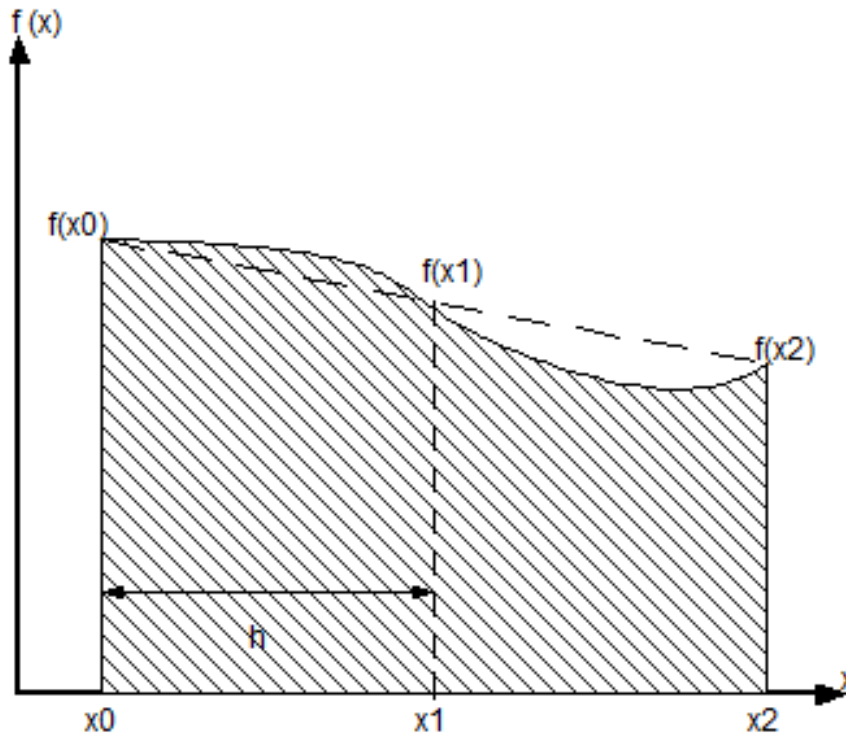
SIMPSON'S RULES

- another way to obtain a more accurate estimate of an integral is to use higher-order polynomials to connect the points.
- If there are two points equally spaced between $f(a)$ and $f(b)$, the four points can be connected with a third-order polynomial
- The formulas that result from taking the integrals under these polynomials are called *Simpson's rules*.



Simpson's 1/3 Rule

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

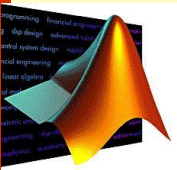


Aplikasi aturan Simpson pada seluruh pasangan interval dalam kisaran x_0 sampai

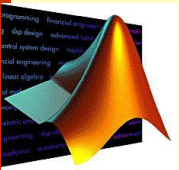
x_n

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \dots + \frac{h}{3}(f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n})$$

$$= \frac{h}{3} [f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2n-2}) + f_{2n}]$$



- Untuk menggambarkan penggunaan aturan Simpson, akan ditampilkan dua alternatif yaitu fungsi simp1 yang kita buat sendiri.



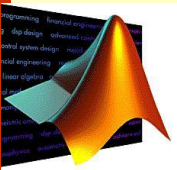
Function utk aturan simson

```
function q = simp1(func,a,b,m)
if (m/2)~= floor(m/2)
    disp('m harus genap ')
end
```

```
h = (b-a)/m;
x = [a:h:b];
y = feval(func,x);
```

```
v = 2*ones(m+1,1);
v2 = 2*ones(m/2,1);
v(2:2:m) = v(2:2:m) + v2;
v(1) = 1;
v(m+1) = 1;
```

```
q = y*v;
q = q*h/3;
```



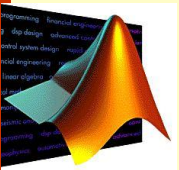
Tentukan integral

$$y = x^2$$

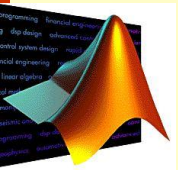
untuk x dari 1 sampai 2 dengan fungsi simp1

function fv = f43(x)

fv = x.^2;



```
n = 2; i = 1;
t = clock;
disp(' n   nilai integral')
while n<51200
    simpval=simp1('f43',1,2,n);
    fprintf('%3.0f%14.9f\n',n,simpval);
    n=2*n; i=i+1;
end
fprintf('\nwaktu = %4.2f detik', etime(clock,t));
```

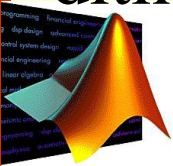


KUADRATUR GAUSS

Aturan trapesium dan aturan Simpson mempunyai karakteristik perkiraan integral yang didasarkan pada harga-harga fungsi berspasi genap.

Konsekuensinya letak titik-titik basis yang dipakai dalam persamaan ini sebelumnya telah ditentukan atau tetap.

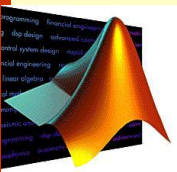
Misalnya aturan trapesium didasarkan kepada pengambilan luas di bawah garis lurus yang menghubungkan harga-harga fungsi pada kedua ujung interval integrasi. Akibatnya kesalahan yang ditimbulkan cukup besar



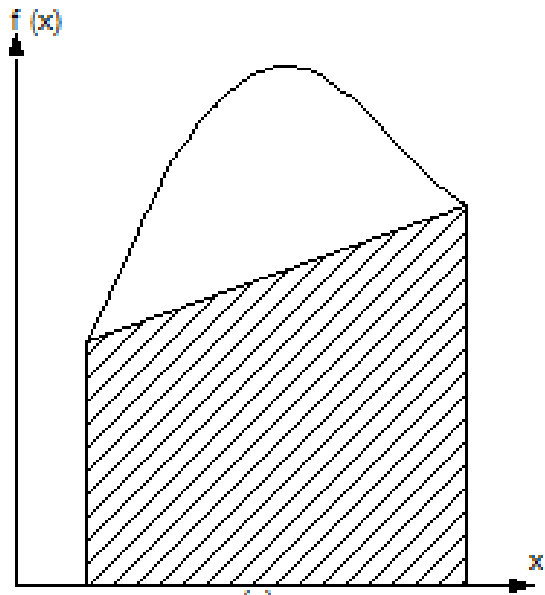
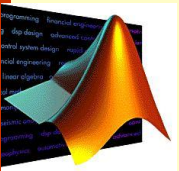
Misalkan kendala titik-titik basis yang tetap ini diperbaiki dengan menentukan dua titik pada tertentu kurva.

Dengan menempatkan titik-titik ini dengan bijaksana, dapat dibuat suatu garis lurus yang mengimbangi kesalahan positif dan negatif, sehingga perkiraan integral dapat diperbaiki.

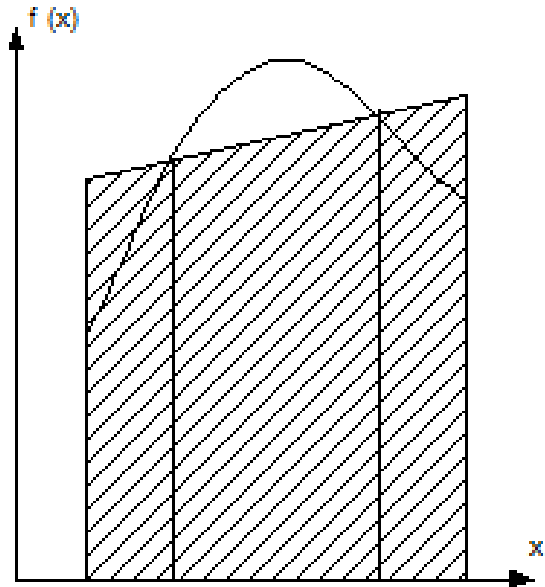
Kuadratur Gauss adalah suatu teknik untuk melaksanakan strategi ini.



07 Numerical Integration



(a)



(b)

Integral dinyatakan dengan

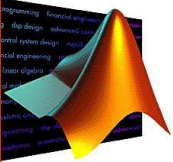
$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \quad \dots(4.5)$$

untuk $n = 2$, kita harus menentukan 4 parameter yaitu c_1 , c_2 , x_1 , dan x_2 .

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

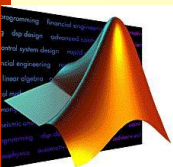
Aturan integrasi akan tepat untuk fungsi polinomial 1, x , x^2 , dan x^3 .

$f(x) = 1$	memberikan	$\int_{-1}^1 1 dx$	$= 2$	$= c_1 + c_2$
$f(x) = x$	memberikan	$\int_{-1}^1 x dx$	$= 0$	$= c_1 x_1 + c_2 x_2$
$f(x) = x^2$	memberikan	$\int_{-1}^1 x^2 dx$	$= 2/3$	$= c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2$
$f(x) = x^3$	memberikan	$\int_{-1}^1 x^3 dx$	$= 0$	$= c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3$



Tabel 4.1. Faktor Bobot c dan Argumen Fungsi x untuk Kuadratur Gauss

Titik	Faktor Bobot	Argumen Fungsi
2	$c_1 = 1,000000000$	$x_1 = -0,577350269$
	$c_2 = 1,000000000$	$x_2 = 0,577350269$
3	$c_1 = 0,555555556$	$x_1 = -0,774596669$
	$c_2 = 0,888888889$	$x_2 = 0$
	$c_3 = 0,555555556$	$x_3 = 0,774596669$
4	$c_1 = 0,347854845$	$x_1 = -0,861136312$
	$c_2 = 0,652145155$	$x_2 = -0,339981044$
	$c_3 = 0,652145155$	$x_3 = 0,339981044$
	$c_4 = 0,347854845$	$x_4 = 0,861136312$
5	$c_1 = 0,236926885$	$x_1 = -0,906179846$
	$c_2 = 0,478628670$	$x_2 = -0,538469310$
	$c_3 = 0,568888889$	$x_3 = 0$
	$c_4 = 0,478628670$	$x_4 = 0,538469310$
	$c_5 = 0,236926885$	$x_5 = 0,906179846$
6	$c_1 = 0,171324492$	$x_1 = -0,932469514$
	$c_2 = 0,360761573$	$x_2 = -0,661209386$
	$c_3 = 0,467913935$	$x_3 = -0,238619186$
	$c_4 = 0,467913935$	$x_4 = 0,238619186$
	$c_5 = 0,360761573$	$x_5 = 0,661209386$
	$c_6 = 0,171324492$	$x_6 = 0,932469514$



fungsi quad/quadgk

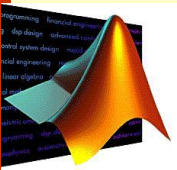
- Berdasarkan konsep integral dengan metode kuadratur Gauss
- Penggunaan fungsi **quad/quadgk** seperti pada penggunaan fungsi fzero

```
w=quad('function', a, b)
```

dengan **function** adalah nama fungsi yang ingin diintegrasikan

a adalah batas bawah

b adalah batas atas

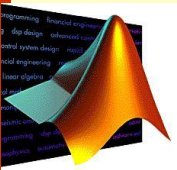


Fungsi lain **quadgk** lebih teliti daripada **quad**

```
w=quadgk('function', a, b)
```

Selain itu ada juga fungsi: **integral**

```
k=integral('function', a, b)
```



Soal 1b

Tentukan integral

$$y = x^2$$

untuk x dari 1 sampai 2 dengan fungsi quad

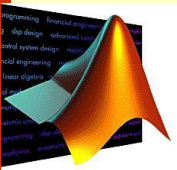
Secara analitis $y = 7/3 = 2.3333$

fungsi **quad** pada Matlab

```
function y = metodequad(x)
```

```
y = x.^2
```

```
z=quadgk(@metodequad,1,2)
```



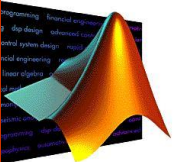
Soal 2

Suatu campuran gas mempunyai kapasitas panas

$$C_p = 7,053 + 1,2242 \cdot 10^{-3} T - 2,6124 \cdot 10^{-7} T^2$$

T dalam °F dan C_p dalam Btu/lbmol °F. Tentukan **panas yang dilepaskan** untuk menurunkan temperatur campuran gas panas tersebut dari 550 °F menjadi 200 °F.

$$q = \int_{T_o}^T C_p \, dT$$



lanjutan

function q = panas(T)

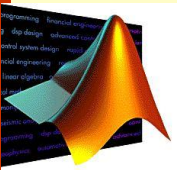
q = 7.053 + 1.2242*10⁻³.*T - ... 2.6124*10⁻⁷.*T.^2;

kalor=quadgk('panas',550,200)

T = linspace(550,200,100);

q = 7.053 + 1.2242*10⁻³.*T - ... 2.6124*10⁻⁷.*T.^2;

kalor = trapz(T,q)



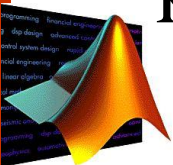
Soal 3

Suatu proses dengan katalis porous mempunyai kecepatan reaksi

$$-\frac{dC}{dt} = 0,7\eta C^2 \quad \eta = \frac{1,0357 + 0,3173\phi}{1 + 0,4172\phi}$$

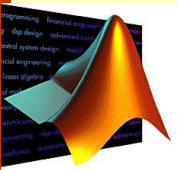
$$\phi = 12\sqrt{C}$$

Tentukan waktu yang dibutuhkan untuk menurunkan konsentrasi dari $C = 2$ mol/gr katalis menjadi 1 mol/g katalis.



lanjutan

```
Co = 2;  
Cn = 1;  
C = linspace(Cn,Co,101) ;  
phi = 12*sqrt(C);  
eta = (1.0357+0.3173*phi)./(1+0.4172*phi);  
x=1./(0.7.*eta.*C.^2);% karena kondisi batas dibalik,  
    % tanda negatif hilang  
t = trapz(C,x);
```



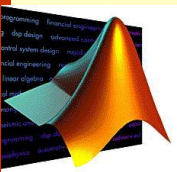
Suatu campuran gas mempunyai kapasitas panas

$$C_p = 7,053 + 1,2242 \cdot 10^{-3} T - 2,6124 \cdot 10^{-7} T^2$$

T dalam °F dan C_p dalam Btu/lbmol °F. Jika panas yang dilepaskan untuk menurunkan temperatur campuran gas panas tersebut dari 550 °F adalah 2616 Btu/lbmol gas sampai temperatur berapakah campuran gas tersebut dapat didinginkan.

$$q = \int_{T_0}^T C_p dt$$

Sampai berapakah campuran gas tersebut dapat didinginkan ?



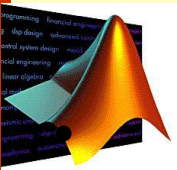
```
function fq=contoh46(Tn)
q = -2616;    % BTU/lbmol
To = 550;    % oF
% Integral secara numeris aturan trapesium
T=linspace(Tn,To,1000);
cp=-(7.053+1.2242.*10^-3.*T-2.6124.*10^-7.*T.^2);
qtebak=trapz(T,cp);
fq=qtebak-q;
```

Fungsi tersebut dapat dijalankan dari jendela *command*

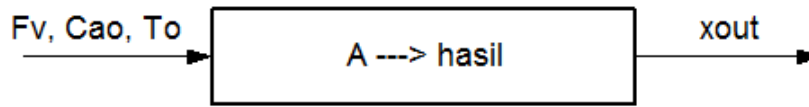
```
>> T = fzero('contoh46',150)
```

```
T =
```

```
199.9225
```



Reaktor plug flow beroperasi adiabatik digunakan untuk reaksi fase cair : $A \rightarrow$ produk



Gambar 4.6. Reaktor Plug flow adiabatik

Reaksi orde 2 eksotermis. Perubahan entalpi reaksi, ΔH_R konstan. Hubungan tetapan kecepatan reaksi (k) dengan temperatur (T) mengikuti persamaan :

$$k = A \cdot \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)$$

Diketahui $F_v = 200$ L/menit; $C_{A0} = 5$ gmol/L; $\rho = 1,1$ kg/L; $C_p = 0,8$ kcal/kg/K; $A = 3,12E+08$ L/gmol/menit; $E = 18.600$ cal/gmol; $\Delta H_R = -15$ kal/gmol; $R = 1,987$ cal/gmol/K; dan volum reaktor, $Vol = 8000$ L. Ingin dicari temperatur masuk T_0 yang memberikan konversi keluar $x_{out} = 0,8$.

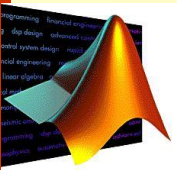
Dari neraca massa

$$V = \frac{F_v}{C_{A0}} \int_{x_{in}}^{x_{out}} \frac{1}{k(1-x)^2} dx$$

$$k = A \cdot \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)$$

Dari neraca panas

$$T = T_0 - \frac{C_{A0} \Delta H_R}{\rho C_p} x$$



function FV=contoh47(To)

Fv=200; % laju alir volum, L/menit

Cao=5; % konsentrasi umpan, gmol/L

rho=1.1; % densitas, kg/L

Cp=0.8; % kapasitas panas, kcal/kg/K

A=3.12*10^8; % konstanta Arrhenius, L/gmol/menit

E=18600; % konstanta Arrhenius, cal/gmol

Hr=-15; % panas reaksi, kcal/gmol

R=1.987; % konstanta gas ideal, cal/gmol/K

Vol=8000; % volume reaktor, L

xin=0; % konversi masuk reaktor

xout=0.8; % konversi keluar reaktor

x=linspace(xin,xout,1000);

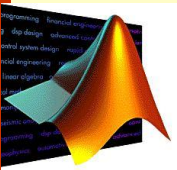
T=To-Cao*Hr/rho/Cp*x ;

k=A*exp(-E/R./T);

eq=1./k./(1-x).^2;

V=Fv/Cao*trapz(x,eq);

FV=Vol-V;

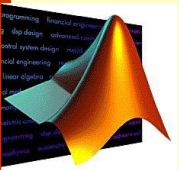


```
>> Totebakan=300;
```

```
>> To=fzero('contoh47',Totebakan)
```

To =

360.2898



Butir-butir padatan A dengan densitas $\rho = 2 \text{ g/mL}$, jari-jari awal $R_0 = 2 \text{ cm}$, berjumlah $N_b = 40.000$, dimasukkan dalam $W \text{ g}$ solven. Padatan A melarut dengan panas pelarutan $\lambda = 100 \text{ cal/g}$. Kelarutan A dalam solven sebagai fungsi suhu mengikuti persamaan

$$x_s = \exp\left(8,8053 - \frac{3333}{T}\right)$$

Waktu yang diperlukan padatan untuk melarut dinyatakan dengan persamaan

$$t = \frac{\rho}{k_x} \int_0^{R_0} \frac{dr}{(x_s - x)}$$

Persamaan-persamaan lainnya yang diperlukan,

$$x = (m_0 - m) / W$$

$$m = 4\pi r^3 \rho N_b / 3$$

$$T = T_0 + \frac{\lambda (m_0 - m)}{(W + m) C_p} x$$

Jika diketahui $W = 100.000 \text{ g}$, $k_x = 0,01 \text{ g}/(\text{cm}^2 \cdot \text{dtk})$ dan $T_0 = 350 \text{ K}$, Tentukan waktu (t) yang diperlukan padatan A untuk melarut.