Date:

No.:

Dasar - Dasar Matematika

Kelompok 3 / B

Diskusi Forum 6

1. Buktikan kebenaran dari "Jika $A \cap C = B \cap C$ dan $A \cup C = B \cup C$ maka $A = B$"

Bukti :

$(A \cap C = B \cap C) \wedge (A \cup C = B \cup C) \Rightarrow A = B$

Diketahui :

$(A \cap C = B \cap C) \Leftrightarrow (A \cap C \subseteq B \cap C) \wedge (B \cap C \subseteq A \cap C)$

berarti $\forall x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in (B \cap C)$ dan $\forall x \in (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap C)$

$(A \cup C = B \cup C) \Leftrightarrow (A \cup C \subseteq B \cup C) \wedge (B \cup C \subseteq A \cup C)$

berarti $\forall x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (B \cup C)$ dan $\forall x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cup C)$

Andaikan $\overline{A = B} \Leftrightarrow \overline{(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)}$

$\Leftrightarrow \overline{A \subseteq B} \vee \overline{B \subseteq A}$

$\Leftrightarrow \overline{\forall x \in A \to x \in B} \vee \overline{\forall x \in B \to x \in A}$

$\Leftrightarrow \exists x \in A \wedge x \notin B \vee \exists \forall B \wedge x \notin A$

$\exists x \in A \wedge x \in B^c \vee \exists x \in B \wedge x \in A^c$

(i) (ii)

(i) $\exists x \in A \wedge x \in B^c$

$\exists x \in (A \cap B^c)$

$\exists x \in (A \cap B^c \cap (C \cup C^c))$

$\exists x \in (A \cap (C \cap C^c) \cap B^c$

$\exists x \in ((A \cap C) \vee (A \cap C^c)) \cap B^c)$

$\exists x \in ((B \cap C) \vee (A \cap C^c)) \cap B^2)$ karena $\forall x \in (A \cap C)$

$\to x \in (B \cap C)$

$\exists x \in ((B \cap C) \cap B^c) \vee ((A \cap C^c) \cap B^c)$

$\exists x \in (B \cap B^c \cap C) \vee (A \cap C^c \cap B^c)$

No.: Date:

$\exists x \in (\emptyset \cap C) \vee (A \cap (B \cup C)^c)$

$\exists x \in (\emptyset) \vee (A \cap (A \cup C)^c)$ karena $\forall x \in (B \cup C) \to x \in (A \cup C)$

$\exists x \in (\emptyset \vee (A \cap A^c \cap C^c))$

$\exists x \in (\emptyset \vee (\emptyset \cap C^c)) \equiv \exists x \in (\emptyset \vee \emptyset) \equiv \exists x \in \emptyset$

kontradiksi

(ii) $\exists x \in B \wedge x \in A^c$

$\exists x \in (B \cap A^c)$

$\exists x \in (B \cap A^c \cap S)$

$\exists x \in (B \cap A^c \cap (C \cup C^c))$

$\exists x \in (B \cap (C \cup C^c) \cap A^c)$

$\exists x \in ((B \cap C) \vee (B \cap C^c)) \cap A^c)$

$\exists x \in ((A \cap C) \vee (B \cap C^c) \cap A^c)$ karena $\forall x \in (B \cap C) \to x \in (A \cap C)$

$\exists x \in ((A \cap C \cap A^c) \vee (B \cap C^c \cap A^c))$

$\exists x \in ((A \cap A^c) \cap C) \vee (B \cap (C \cup A)^c))$

$\exists x \in (\emptyset \cap C) \vee (B \cap (B \cup C)^c)$

$\exists x \in (\emptyset \vee ((B \cap B^c) \cap C^c)$

$\exists x \in (\emptyset \vee (\emptyset \cap C^c))$

$\exists x \in (\emptyset \vee \emptyset)$

$\exists x \in \emptyset$ kontradiksi

karena $\exists x \in A \wedge x \in B^c$ dan $\exists x\ B \wedge x \in A^c$ bernilai kontradiksi

maka $\overline{A = B}$ juga bernilai kontradiksi. Sehingga $A = B$ terbukti benar

terbukti bahwa $(A \cap C = B \cap C) \wedge (A \cup C = B \cup C) \Rightarrow A = B$

2. Misal $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat yang dilengkapi relasi R di mana aRb apabila 5 membagi $a-b$. Buktikan bahwa relasi itu merupakan relasi ekuivalen.

Relasi R pada himpunan $\mathbb{Z}$ dikatakan relasi ekuivalen apabila relasinya bersifat refleksif, simetris, dan transitif.

(i) Akan dibuktikan R bersifat refleksif di $\mathbb{Z}$, artinya

$\forall a.\ a \in \mathbb{Z} \rightarrow aRa$ apabila 5 membagi $a-a$.

Bukti:

Ambil sebarang a, $a \in \mathbb{Z}$ adib aRa

Perhatikan $a-a=0$

5 membagi 0 sehingga 5 membagi $a-a \Rightarrow aRa$.

(ii) Akan dibuktikan R bersifat simetris di $\mathbb{Z}$, artinya

$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad aRb \Rightarrow bRa$

Bukti:

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$ dan aRb adib bRa

aRb artinya 5 membagi $a-b$

$a-b = 5.k_0,\ \exists k_0 \in \mathbb{Z}$

bRa artinya 5 membagi $b-a$

$b-a = 5.l_0,\ \exists l_0 \in \mathbb{Z}$

$(-1)(a-b) = (-1)\, 5.k_0,\ \exists k_0 \in \mathbb{Z}$

$b-a = 5.(-k_0),\ \exists k_0 \in \mathbb{Z}$

pilih $l_0 = -k_0$

$b-a = 5.l_0,\ \exists l_0 = -k_0 \in \mathbb{Z}$

(iii) Akan dibuktikan R bersifat transitif di $\mathbb{Z}$, artinya

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ jika aRb dan $bRc \Rightarrow aRc$

Bukti:

Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$ dan aRb dan bRc adib aRc

aRb artinya 5 membagi $a-b \Leftrightarrow a-b = 5.k_0, \exists k_0 \in \mathbb{Z}$

bRc artinya 5 membagi $b-c \Leftrightarrow b-c = 5.l_0, \exists l_0 \in \mathbb{Z}$ +

$a-c = 5(k_0+l_0), \exists k_0, l_0 \in \mathbb{Z}$

aRc artinya 5 membagi $a-c \Leftrightarrow a-c = 5.m_0, \exists m_0 \in \mathbb{Z}$

pilih $m_0 = k_0 + l_0 \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow a-c = 5.m_0, \exists m_0 \in \mathbb{Z}$

Jadi, relasi R pada himpunan $\mathbb{Z}$ dikatakan relasi ekuivalen TERBUKTI.