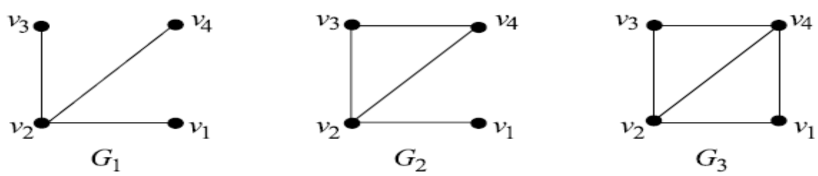
GRAPH HAMILTON

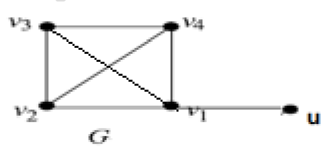
Graf hamilton diambil dari nama sir william rowan hamilton. Sebuah lintasan pada graph G yang memuat setiap vertek pada graph G tepat satu kali disebut sebagai lintasan hamilton. Sebuah cycle pada graph G yang memuat semua vertek pada graph G disebut sebagai cycle hamilton. Sebuah graph yang memuat cycle hamilton disebut Hamiltonian, sedangkan sebuah graf yang hanya memiliki lintasan Hamilton disebut graf Semi-Hamilton. Perhatikan graph G_1, G_2, dan G_3 berikut ini.



Gambar 1

Pada Gambar 1 di atas graph G_1 tidak memuat lintasan hamilton dan sikel hamilton, graph G_2 memuat lintasan hamilton $v_1v_2v_3v_4$, tetapi tidak memuat sikel Hamilton. Sedangkan graph G_3 memuat sikel Hamiltonian $v_1v_2v_3v_4v_1$.

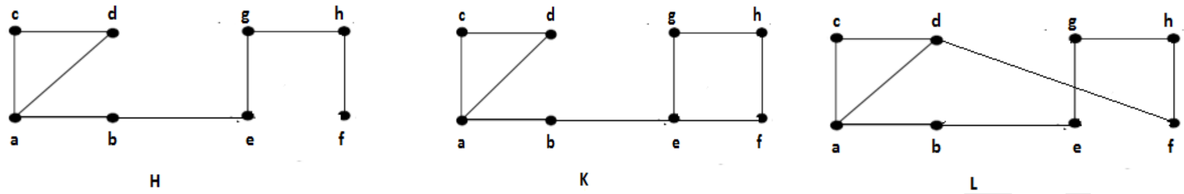
Sebuah graph sederhana G disebut maksimum non hamilton jika graph G merupakan graph semi hamilton dan dengan menambahkan sebuah sisi sebarang yang menghubungkan dua titik di G yang tidak adjancent maka menyebabkan graph G menjadi graph Hamiltonian. Berikut ini contoh graph maksimum non hamilton.



Gambar 2

Pada Gambar 2 graph G merupakan graph non hamilton karena tidak memuat cycle hamilton, namun graph G tersebut merupakan graph maksimum non hamilton karena dengan menambahkan sebuah sisi sebarang yang menghubungkan dua vertek yang tidak adjancent maka pasti akan ditemukan cycle hamilton.

Penambahan sebuah sisi yang menghubungkan dua titik yang tidak terhubung langsung pada graph semi hamilton tidak selalu menyebabkan terbentuknya sebuah graph Hamiltonian. Perhatikan contoh graph berikut ini.



Gambar 3

Pada Gambar 3 graph H merupakan graph semi hamilton karena memuat lintasan hamilton diantaranya dcabeghf. Namun H bukan merupakan graph maksimum non hamilton karena penambahan sebuah sisi sebarang yang menghubungkan dua titik di H yang tidak terhubung langsung tidak selalu akan menghasilkan sebuah graph hamiltonian. Misalkan graph K = H + ef, K bukan merupakan graph Hamiltonian karena K tidak memuat cycle hamilton. Sedangkan L=H+df merupakan graph hamiltonian karena memuat cycle hamilton, yaitu dcabeghfd. Jadi, graph H graph semi hamilton tetapi bukan graph maksimum non hamilton

Theorem 1 (Dirac)

Jika G sebuah graph sederhana dengan n vertek dimana n≥3 dan d(v) ≥ n/2, untuk setiap vertek di G, maka G adalah hamiltonian.

Bukti

Diasumsikan bahwa G adalah graph non hamilton. Berarti untuk sebarang graph sederhana G dengan vertek $|V(G)| \geq 3$ d(v) ≥ $|V(G)|$/2 maka G non hamiltonian.

Misalkan G graph maksimum non hamilton dengan $|V(G)| \geq 3$ dan $d(v_i) \geq {|V(G)|}/{2}, \forall v_i \in V(G)$. Karena G maksimum non hamilton dan $|V(G)| \geq 3$ maka G bukan graph komplet. G bukan graph komplet maka terdapat 2 vertek di G yang tidak adjacent. Misal u dan v dua buah vertek di G yang tidak adjacent. Bentuk sebuah graph G + uv, yaitu graph yang dibentuk dari graph G dengan menambahkan sebuah sisi yang menghubungkan u dan v di G. Karena G maksimum non hamilton maka G + uv hamiltonian. G+uv hamiltonian pasti memuat sikel hamilton dan setiap sikel hamilton di G pasti memuat sisi uv.

Diketahui G maksimum non hamilton berarti G memuat lintasan Hamilton. Misalkan E=$v_1v_2v_3$.......v_v sebuah lintasan hamilton di G dengan titik awal u = v_1 dan titik akhir v = v_v. Bentuk himpunan

$S = \{uv_i \in E(G) | v_i \in V(G)\}$, yaitu himpunan sisi-sisi di G yang terkait dengan titik u

$T = \{v_i v \in E | v_i \in V(G)\}$, yaitu himpunan sisi-sisi di G yang terkait dengan titik v

Karena G maksimum non hamilton maka titik u terhubung langsung dengan semua titik di G kecuali titik v. Sehingga $|S| = n - 2$, $|T| = 1$. Jadi, untuk sebarang graph non hamilton berlaku

$$d(u) + d(v) \leq |S| + |T| = (n-2) + 1 = n - 1 .$$

hal ini kontradiksi dengan $d(v_i) \geq n/2$, $\forall$ $v_i \in V(G)$. Karena jika $\forall$ $v_i \in V(G)$, $d(v_i) \geq n/$, maka

$$d(u) + d(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

Jadi, yang benar G hamiltonian