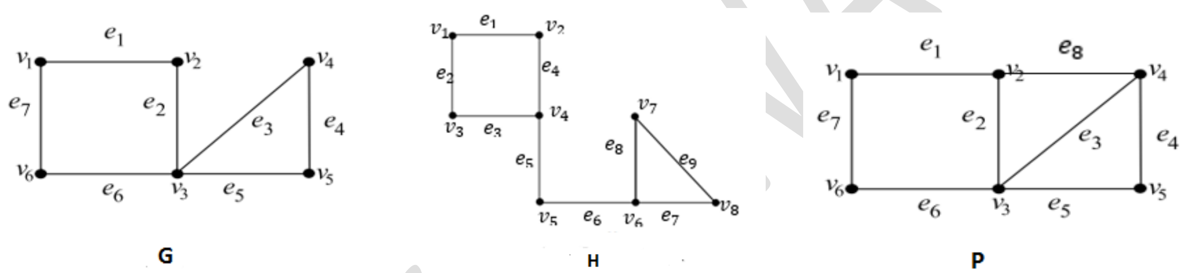
GRAPH EULER

Trail dalam sebuah graph G adalah sebuah jalan di dalam G yang semua sisinya berbeda. sebuah trail di graph G apabila memuat semua sisi pada graph G maka trail tersebut disebut sebagai trail Euler.

Sebuah tour dari graph G adalah sebuah jalan tertutup dari G yang memuat/melewati setiap sisi dari G sedikitnya sekali. Sebuah Tour di grap G yang memuat setiap sisi dari G tepat sekali disebut Tour Euler. Jadi, sebuah tour Euler adalah sebuah Trail euler yang tertutup.

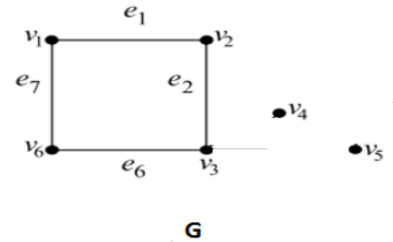
Sebuah graph G disebut sebagai Eulerian atau graph Euler jika graph G tersebut memuat Tour Euler. Sebuah graph terhubung G disebut semi Euler jika G memuat trail Euler.



Gambar 1. Graph Euler dan bukan graph Euler

Pada Gambar 1 graph G adalah Eulerian karena pada graph G memuat tour Euler, yaitu $(v_1e_1 v_2e_2v_3e_3v_4e_4v_5e_5v_3e_6v_6e_7v_1)$, graph H adalah graph semi Euler karena H memuat trail Euler $(v_4e_3v_3e_2v_1e_1v_2e_4v_4e_5v_5e_6v_6e_7v_8e_9\ v_7e_8v_6)$, sedangkan graph P merupakan bukan graph Euler maupun graph Semi Euler karena tidak memuat trail Euler maupun Tour Euler.

Sebauah graph Euler tidak selalu berupa graph terhubung. Graph tidak terhubung dapat merupakan graph Euler jika salah satu komponen graph tersebut Eulerian sedangkan komponen lainya berupa vertek.



Gambar 2. Graph tidak terhubung dan Eulerian

Teorema 1:

Sebuah graph terhubung G disebut Eulerian atau graph Euler jika dan hanya jika G tidak memiliki vertek berderajat ganjil

Bukti :

(⇒) graph terhubung G disebut Eulerian ⇒ G tidak memiliki vertek berderajat ganjil

Diketahui G graph Eulerian maka G memuat sirkit Euler. Misal C sebuah sirkit Euler di G dengan C adalah

C (v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 e_4 v_4 ………. e_k v_k e_{k+1} v_0)

Karena C sirkit Euler di G maka C memuat semua vertek dan semua sisi G.

- Pandang $\forall\, v \in V(C)$ dimana v sebagai titik internal di C.

  Sebagai titik internal di C terdapat 2 sisi yang terkait pada titik v. jika v sebagai titik internal dilewati sebanyak k kali di C, maka terdapat 2k sisi yang terkait di titik v. jadi, derajat v di C sebagai titik internal adalah sebesar 2k.
- Pandang $\forall\, v \in V(C)$ dimana v sebagai titik awal dan titik akhir.

  Sebagai titik awal di C terdapat 1 sisi yang terkait dengan titik v, dan sebagai titik akhir terdapat 1 sisi yang terkait dengan v.
  - Jika v hanya sebagai titik awal dan titik akhir saja di C maka terdapat 2 vertek yang terkait di titik v. jadi, derajat titik v adalah 2.
  - Jika v selain sebagai titik awal dan titik akhir, namun v juga sebagai titik internal di C yang dilewati sebanyak k kali maka terdapat 2k + 2 sisi yang terkait di v. jadi, derajat titik v adalah 2k +2.

Dari hal tersebut maka $\forall\, v \in V(C), d(v) = \text{genap}$ karena C memuat semua titik dan semua sisi di G maka dapat disimpulkan bahwa $\forall\, v \in V(G), d(v) = \text{genap}$. Terbukti bahwa G tidak memiliki vertek yang berderajat ganjil.

(⇐) G tidak memiliki vertek berderajat ganjil ⇒ G Eulerian

Diketahui G graph terhubung dan derajat setiap vertek di G genap.

Maka terdapat dua kasus

Kasus 1:

G graph terhubung dan $\forall v \in V(G), d(v) = 0$.

Maka bentuk graph adalah graph trivial dengan 1 vertek. Graph tersebut graph Eulerian karena memuat sirkit Euler dengan panjang 0. Jadi yang benar G adalah Eulerian

Kasus 2:

G graph terhubung dan $\forall v \in V(G), d(v) \geq 2$ dan $d(v)$ genap. Akan ditunjukkan bahwa G Eulerian.

Diasumsikan G non Eulerian, maka G tidak memuat sirkit Euler.

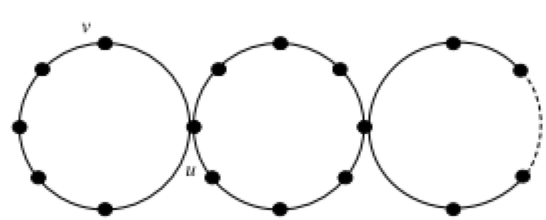
Karena $\forall v \in V(G), d(v) \geq 2$ sehingga G memuat sirkit. Misalkan C sirkit di G dengan panjang maksimum. Karena G non Eulerian maka C bukan sirkit Euler di G. karena bukan sirkit Euler maka C tidak memuat semua sisi di G sehingga $|E(C)| < |E(G)|$. Bentuk graph G–C = G' dengan $|E(G')| > 0$

Diketahui setiap vertek di G berderajat genap dan setiap vertek di C berderajat genap maka setiap vertek di G' memiliki derajat genap juga.

Karena $|E(G')| > 0$ dan $|E(G')| < |E(G)|$ serta setiap vertek di G' memiliki derajat genap maka G' memuat sirkit. Misal C' sirkit di G' dan C' sirkit Euler di G' (semua sisi di G sudah ditelusuri).

Karena G graph terhubung maka terdapat sebuah titik u di $V(C) \cap V(C')$.

Misalkan u tersebut titik awal dan titik akhir baik di C maupun C'. ternyata dari C dan C' dapat dibentuk sebuah sirkit CC' dengan $|E(CC')| > |E(C)|$ atau sirkit CC' memiliki panjang yang lebih panjang dibanding dengan panjang sirkit C. Hal ini menunjukkan bahwa C bukanlah sirkit terpanjang di G (bertentangan dengan permisalan di awal bahwa C adalah sirkit dengan panjang maksimum di G). Jadi, benar bahwa G Eulerian.



Akibat Teorema 1:

G graph terhubung dan memiliki trail Euler jika dan hanya jika G memiliki paling banyak dua vertek berderajat ganjil

Bukti:

(⇒) G graph terhubung dan memiliki Euler trail ⇒ G memiliki paling banyak dua vertek berderajat ganjil

Bukti:

Diketahui G graph terhubung dan memiliki Euler trail

G memiliki Euler trail misal P Euler trail di graph G dengan P adalah

P (v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 e_4 v_4 ……….. e_k v_k)

Karena P trail Euler di G maka P memuat semua vertek dan semua sisi G.

- Pandang $\forall\, v \in V(P)$ dimana v sebagai titik internal di P.

  Sebagai titik internal di P terdapat 2 sisi yang terkait pada titik v. jika v sebagai titik internal dilewati sebanyak k kali di P, maka terdapat 2k sisi yang terkait di titik v. jadi, derajat v di P sebagai titik internal adalah sebesar 2k.
- Pandang $\forall\, v \in V(P)$ dimana v sebagai titik awal. Sebagai titik awal di P terdapat 1 sisi yang terkait dengan titik v, sehingga
  - Jika v hanya sebagai titik awal saja di P maka derajat titik v adalah 1.
  - Jika v selain sebagai titik awal namun v juga sebagai titik internal di P yang dilewati sebanyak k kali maka terdapat 2k + 1 sisi yang terkait di v. Jadi, derajat titik v adalah 2k +1.
- Pandang $\forall\, v \in V(P)$ dimana v sebagai titik akhir. Sebagai titik akhir di P terdapat 1 sisi yang terkait dengan titik v, sehingga
  - Jika v hanya sebagai titik akhir saja di P maka derajat titik v adalah 1.
  - Jika v selain sebagai titik awal dan titik akhir, namun v juga sebagai titik internal di C yang dilewati sebanyak k kali maka terdapat 2k + 1 sisi yang terkait di v. jadi, derajat titik v adalah 2k +1.

Dari hal tersebut maka terdapat paling banyak 2 vertek di P yang memiliki derajat ganjil, yaitu titik awal dan titik akhir di P. Karena P trail Euler di G memuat semua vertek di G, maka dapat disimpulkan bahwa terdapat paling banyak 2 vertek berderajat ganjil di G.

($\Leftarrow$)G graph terhubung dan G memiliki paling banyak dua vertek berderajat ganjil $\Rightarrow$ G memiliki Euler trail

Bukti

Kasus 1:

Jika semua vertek di G berderajat genap maka sesuai dengan teorema 1, graph G Eulerian. Karena G Eulerian maka G memuat trail Euler tertutup.

Kasus 2:

Jika G memiliki tepat 2 vertek berderajat ganjil.

Misalkan $|E(G)| = n$

Misalkan u dan v vertek di G yang berderajat ganjil. Bentuk graph G + e yaitu sebuah graph yang dibentuk dengan menambahkan sebuah sisi e pada graph G. Sisi e merupakan sisi yang menghubungkan vertek u dan vertek v. Jelas bahwa semua vertek di G + e memiliki derajat genap. Sesuai dengan teorema 1, graph G+e memiliki sirkit Euler. Misalkan C sirit Euler di G + e dengan C = u e v e_1 v_2 e_2 v_3………e_nu,

Karena C = u e v e_1 v_2 e_2 v_3………e_nu sirkit Euler di G+e maka dengan menghapuskan sisi e dari C terbentuklah sebuah trail v e_1 v_2 e_2 v_3………e_nu yang merupakan Trail Euler di G.