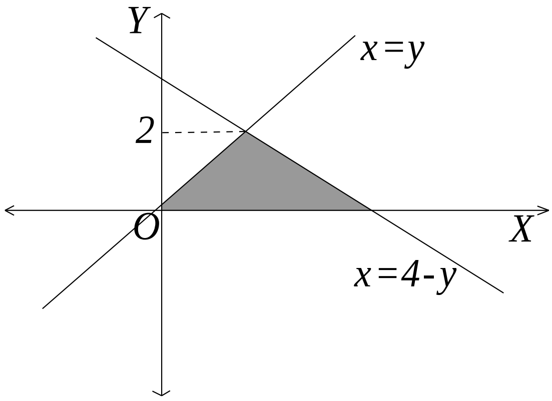


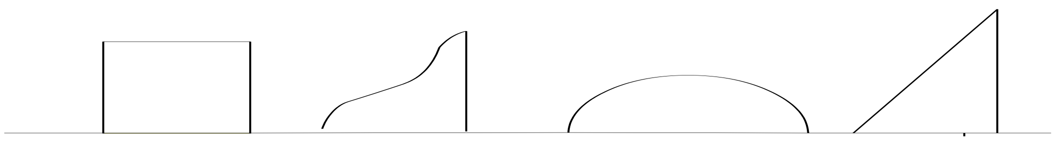
$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^2 [(4-y)-(y)]dy \\
&= \int_0^2 (4-2y)dy \\
&= \left[4y-y^2\right]_0^2 \\
&= (8-4)-(0-0) \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Jadi luasnya 4 satuan luas

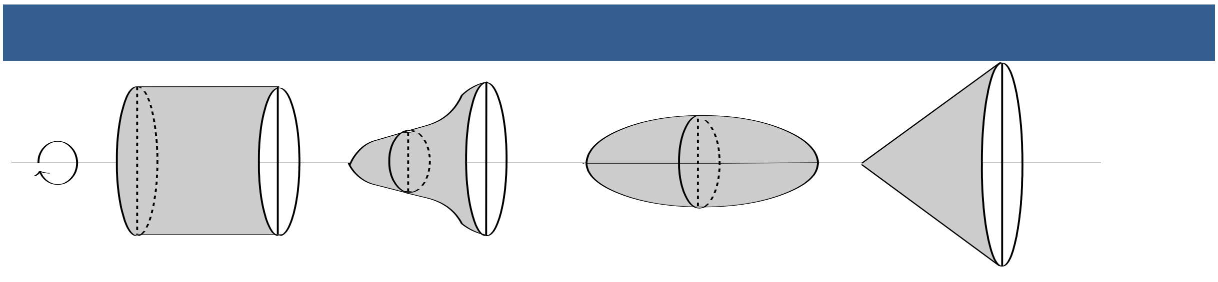
PENGGUNAAN INTEGRALTENTU UNTUK MENGHITUNG VOLUME BENDA PUTAR

Dalam bahasan ini kita mencoba untuk mencoba untuk menghitung volume benda putar tersebut dengan metode integral.

Perhatikan bangun-bangun di bawah ini :



Setelah kita putar 360^0 bagaimanakah bentuknya ? mari kita lihat.



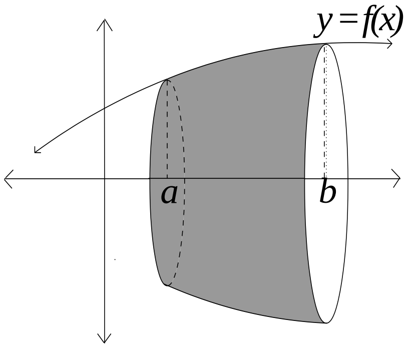
Untuk menghitung volume benda pejal, langkah-langkah yang digunakan tetap sama yakni potong, hampiri dan integralkan

Apabila suatu daerah rata yang terletak seluruhnya pada satu dari sebuah garis tetap pada bidangnya diputar mengelilingi garis tersebut akan diperoleh ***benda putar***. Garis tersebut dinamakan ***sumbu putar***

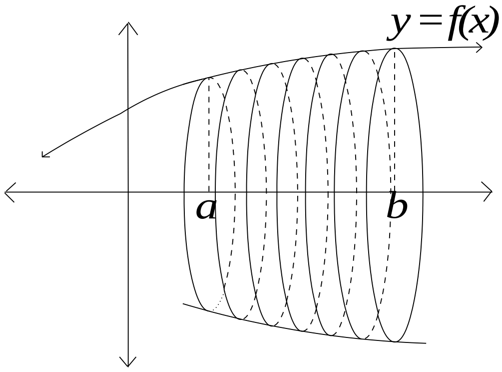
Pembahasan berikut ini dibatasi pada benda putar yang diperoleh dengan pemutaran pada sumbu- x, sumbu- y atau garis-garis yang sejajar dengannya

VOLUME BENDA PUTAR MENGELILINGI SUMBU X

Perhatikan daerah yang dibatasi kurva y = f(x), garis x = a dan garis x = b yang diputar mengelilingi sumbu X sebesar 360^0.



Untuk mendapatkan volume benda putar tersebut, dibuatlah potongan tabung kecil-kecil sebagai pendekatan volume benda tersebut.



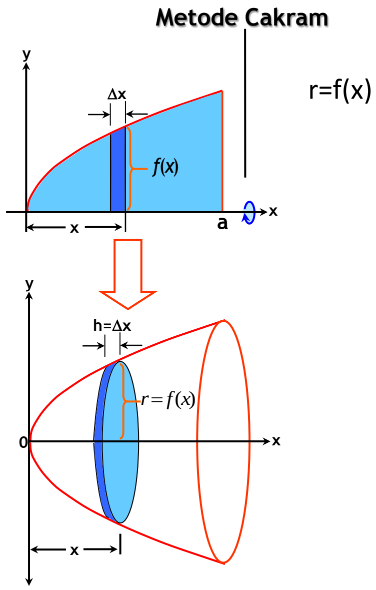
Perhatikan salah satu potongan tabung !

Bentuk cakram di samping dapat dianggap sebagai tabung dengan jari-jari r = f(x), tinggi h = Δx. Sehingga volumenya dapat diaproksimasi sebagai $\Delta V \approx \pi r^2 h$ atau $\Delta V \approx \pi f(x)^2 \Delta x$. Dengan cara jumlahkan, ambil limitnya, dan nyatakan dalam integral diperoleh:

$V \approx \sum \pi f(x)^2 \Delta x$

$V = \lim \sum \pi f(x)^2 \Delta x$

$$\boxed{V = \pi \int_0^a [f(x)]^2 dx}$$



Perhatikan benda yang dibentuk dari salah satu potongan tabung tersebut. Berbentuk apakah? Ya seperti cakram pejal. Lalu apa rumus untuk volum dari suatu cakram:

$Volume = Luas\ lingkaran \times Tinggi$ (dengan tinggi = tebal dari cakram = Δx)

$Volume = \pi y^2 \Delta x$

Volume benda putar tersebut merupakan jumlah potongan tabung-tabung tersebut, sehingga :

$$V = \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x_i$$

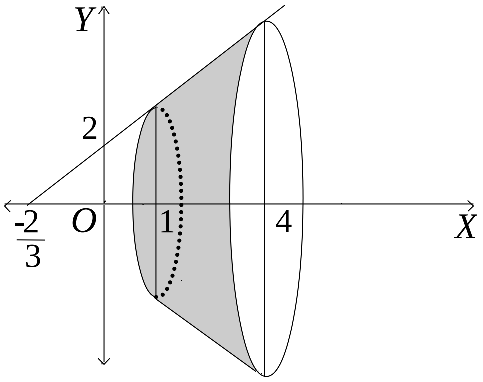
Untuk Δx yang cukup kecil (mendekati nol) akan dihasilkan pendekatan volume sehingg dapat dinyatakan dengan menggunakan integral sebagai berikut :

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

Contoh :

hitunglah volume benda yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva y = 3x + 2, sumbu X, garis x = 1 dan x = 4 diputar mengelilingi sumbu X sebesar 360°

Jawab :



$$V = \pi \int_1^4 y^2 \, dx$$
$$= \pi \int_1^4 (3x+2)^2 \, dx$$
$$= \pi \int_1^4 (9x^2 + 12x + 4) \, dx$$
$$= \pi \left[3x^3 + 6x^2 + 4x \right]_1^4$$
$$= \pi(192 + 96 + 16) - \pi(3 + 6 + 4)$$
$$V = 291\pi$$

Jadi volumenya adalah 291π satuan volume

Lalu bagaimana untuk volume benda putar yang diputar mengelilingi sumbu Y.

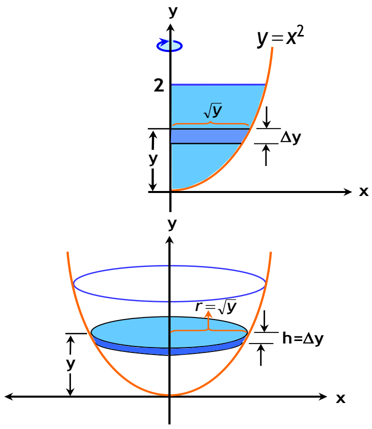
Perhatikan daerah yang dibatasi kurva x = f(y), garis y = a dan garis y = b yang diputar mengelilingi sumbu Y sebesar 360^0.

Metode Cakram Volume Benda Putar

Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$, sumbu y, garis $y = 2$ diputar mengelilingi sumbu y sejauh 360°.

Langkah penyelesaian:

1. Gambarlah daerahnya
2. Buatlah sebuah partisi
3. Tentukan ukuran dan bentuk partisi
4. Aproksimasi volume partisi yang diputar, jumlahkan, ambil limitnya, dan nyatakan dalam bentuk integral.



Volume benda putar tersebut merupakan jumlah potongan tabung-tabung tersebut, sehingga :

$$V = \sum_{i=1}^{n} \pi x_i^2 \, \delta y_i$$

dengan n adalah jumlah potongan tabung.

Untuk δy yang cukup kecil (mendekati nol) akan dihasilkan pendekatan volume yang sempurna, yaitu :

$$V = \lim_{\delta y \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi x_i^2 \, \delta y_i$$

Bentuk tersebut dapat dinyatakan dengan menggunakan integral sebagai berikut :

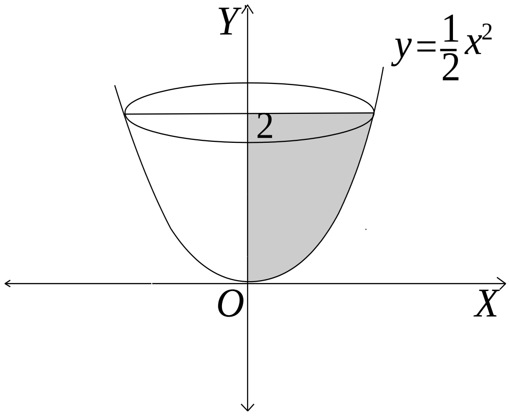
$$V = \int_a^b \pi x^2 dy$$

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy$$

Contoh

Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = \frac{1}{2}x^2$ sumbu Y, garis y = 0 dan y = 2 diputar mengelilingi sumbu Y sebesar 360^0

Jawab :

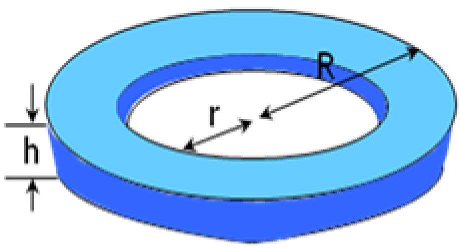


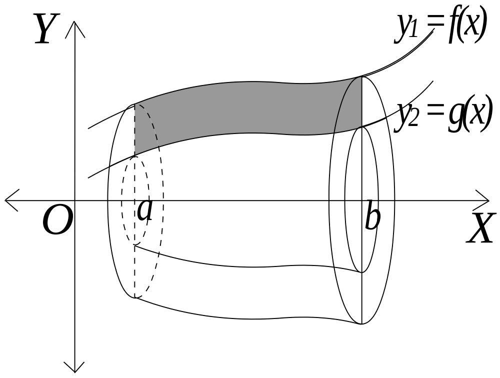
$$y = \frac{1}{2}x^2$$
$$x^2 = 2y$$
$$V = \pi\int_0^2 x^2 dy$$
$$= \pi\int_0^2 2y\, dy$$
$$= \pi\left[y^2\right]_0^2$$
$$= \pi(4) - \pi(0)$$
$$= 4\pi$$

Jadi volumenya adalah 4π satuan volume.

VOLUME BENDA PUTAR ANTARA DUA KURVA DENGAN SUMBU X

Misalkan f dan g merupakan fungsi yang kontinyu dan non negatif sedemikian sehingga $f(x) \geq g(x)$ untuk [a,b] dan L adalah daerah yang dibatasi $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$, garis x = a, serta x = b.





Jika daerah tersebut diputar mengelilingi sumbu X sebesar 360^0, maka volume benda yang terjadi dapat dinyatakan sebagai berikut :

V = (Volume daerah f(x)) - (Volume daerah g(x))

$$V = \pi\int_a^b f(x)^2 dx - \pi\int_a^b g(x)^2 dx$$

$$V = \pi\int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\, dx$$

Contoh :

Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$ dan $y = x + 2$ diputar mengelilingi sumbu X satu putaran penuh

Jawab :

Tentukan terlebih dahulu titik potong kedua kurva tersebut

$x^2 = x + 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = 2$ atau $x = -1$

Jadi batas-batas daerahnya adalah x = 2 dan x = -1, sehingga volume yang dimaksud adalah

$$V = \pi\int_{-1}^{2} (y_1^2 - y_2^2)dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left[(x+2)^2 - (x^2)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} \left[(x^2 + 4x + 4 - x^4) \right] dx$$

$$= \pi \left[\tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x - \tfrac{1}{5}x^5 \right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi\left(2\tfrac{2}{3} + 8 + 8 - 6\tfrac{2}{5}\right) - \pi\left(-\tfrac{1}{3} + 2 - 4 + \tfrac{1}{5}\right)$$

$$= 14\tfrac{2}{5}\pi$$

Jadi volumenya adalah $14\frac{2}{5}\pi$ satuan volume.

VOLUME DENGAN METODE SEL SILINDER

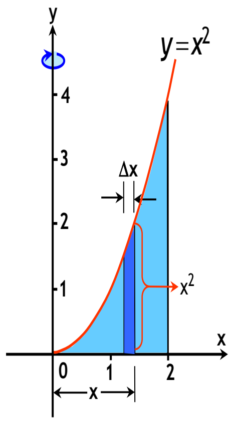
Metode Kulit Tabung — Volume Benda Putar

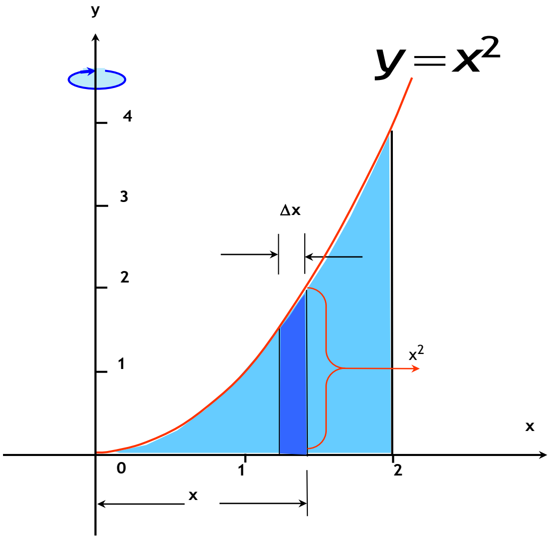
Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$, garis $x = 2$, dan sumbu x diputar mengelilingi sumbu y sejauh 360°.

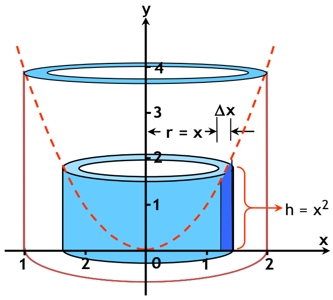
Jawab

Langkah penyelesaian:

1. Gambarlah daerahnya
2. Buatlah sebuah partisi
3. Tentukan ukuran dan bentuk partisi.
4. Aproksimasi volume partisi yang diputar, jumlahkan, ambil limitnya, dan nyatakan dalam bentuk integral.







Perhatikan, bagaimana jika persegi panjang Δx yang berdiri kita putar searah sumbu x. Ya benar kita akan mendapatkan bentuk silinder/tabung yang berlubang (kulitnya saja). Lalu bagaimana menghitung volumnya?

Volume = $f(x_i)\Delta x$

$$= \pi R_2^{\,2} t - \pi R_1^{\,2} t$$

$$= 2\pi \frac{1}{2}(R_2 + R_1)(R_2 - R_1)\ t$$

$$= 2\pi R^*(R_2 - R_1)\ t$$

$$= 2\pi R^* \Delta R t$$

Jika R * adalah x dan $\Delta R = \Delta x$, maka dengan

kita buat n partisi dengan n tak hingga banyaknya, dan dengan Teorema dasar Kalkulus

Volum = $2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$