Kekontinuan

Indikator Pencapaian Hasil Belajar

1. Memutuskan apakah suatu fungsi kontinu atau tidak di suatu titik
2. Mengidentifikasi kasus-kasus di mana suatu fungsi tidak kontinu
1. Menentukan kekontinuan suatu fungsi pada suatu selang

Materi Ajar :

Dalam kehidupan sehari-hari proses kontinu sering kita artikan sebagai suatu yang berlangsung terus menerus, tanpa interupsi atau perubahan yang mendadak. Definisi matematis untuk kekontinuan sebenarnya mirip dengan itu

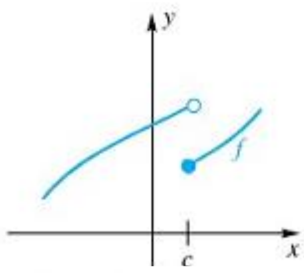
Definisi :

Sebuah fungsi dikatakan kontinu di c jika beberapa selang terbuka di sekitar c terkandung dalam daerah asal f dan $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Secara implisit definisi tersebut menyatakan bahwa suatu fungsi f dikatakan kontinu di c jika memenuhi tiga hal berikut :

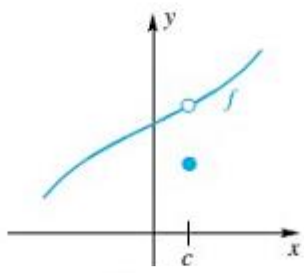
1. $f(c)$ terdefinisi (yaitu c berada di daerah asal f)
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada (sehingga f harus terdefinisi pada suatu selang yang memuat c)
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Jika salah satu dari ketiga hal di atas tidak dipenuhi, dikatakan f tidak kontinu di c. Ilustrasi berikut memberikan gambaran tentang grafik fungsi untuk kasus-kasus kontinu dan tidak kontinu di suatu titik c.



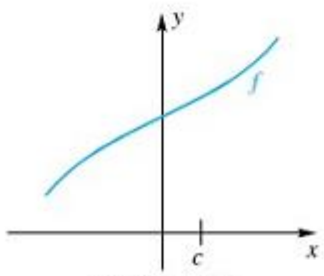
$\lim_{x \to c} f(x)$ tidak ada

tidak kontinu



$\lim_{x \to c} f(x)$ ada tapi $\lim f(x) \neq f(c)$.

tidak kontinu



$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

kontinu

Kekontinuan suatu fungsi di suatu titik dikatakan dapat dihapuskan jika kita dapat mendefinisikan nilai di titik tersebut sehingga fungsi menjadi kontinu.

Soal :

1. Periksa kekontinuan $f(x) = |x|$ di $x = 0$

2. Misal $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$, hitung $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

   Bagaimana f harus didefinisikan agar f kontinu di $x = 1$?

3. Periksa kekontinuan $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{|x|}{x} & \text{jika} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{jika} \quad x = 0 \end{cases}$ di $x = 0$

Teorema berikut membantu kita melihat di mana fungsi polinom, fungsi rasional, fungsi nilai mutlak dan fungsi akar kontinu

Teorema : Fungsi polinom kontinu di setiap bilangan riil Fungsi rasional kontinu di setiap bilangan riil , kecuali pada titik penyebutnya nol Fungsi nilai mutlak kontinu di setiap bilangan riil Jika n ganjil fungsi akar ke- n kontinu disetiap bilangan riil, jika n genap fungsi akar ke- n kontinu disetiap bilangan riil positif

Operasi fungsi mengawetkan kekontinuan, hal tersebut ditunjukkan oleh teorema berikut

Teorema : Jika f dan g kontinu c, maka demikian juga kf , $f + g$, $f - g$, fg, f / g (asalkan $g(c)$ terdefinisi), f^n dan $\sqrt[n]{f}$ (asalkan $f(c) > 0$ jika n genap)

Soal :

1. Di titik mana $F(x) = \dfrac{3|x| - x^2}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ kontinu ?

2. Misal $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{jika} \quad x \neq 0 \\ x & \text{jika} \quad x = 0 \end{cases}$ dan $g(x) = x^2$ selidiki kekontinuan $f + g$, fg dan $\dfrac{f}{g}$ pada titik $x = 1$ dan $x = 0$

Fungsi-fungsi trigonometri kontinu di setiap bilangan riil di daerah asalnya, hal tersebut dinyatakan dalam teorema berikut :

Teorema :

Fungsi $\sin x$ dan $\cos x$ kontinu di setiap bilangan riil . Fungsi $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ dan $\csc x$ kontinu di setiap bilangan riil di daerah asalnya

Soal :

Tentukan semua titik di mana $f(x) = \dfrac{\tan x}{x(x-1)}$ tidak kontinu

Komposisi dari fungsi kontinu juga mengawetkan kekontinuan, teorema berikut yang dikenal sebagai teorema limit komposit menunjukkan hal tersebut :

Teorema :

Jika $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ dan jika f kontinu di L , maka $\lim\limits_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to c} g(x)\right) = f(L)$

Khususnya jika g kontinu di c dan f kontinu di $g(c)$ maka fungsi komposit fog kontinu di c

Soal :

Gunakan teorema limit komposit untuk menghitung limit berikut :

a. $\lim\limits_{x\to 1} \left|\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}\right|$

b. $\lim\limits_{x\to \pi} \sin(x+\sin x)$

Kita sudah membicarakan kekontinuan di suatu titik, selanjutnya kita akan berbicara tentang kekontinuan di interval. Grafik suatu fungsi yang kontinu pada suatu selang dapat dibayangkan sebagai grafik fungsi yang tidak putus pada selang tersebut, grafik ini dapat digambarkan tanpa mengangkat pena dari kertas

Seharusnya jika suatu fungsi kontinu pada suatu interval maka fungsi tersebut kontinu pada setiap titik pad interval tersebut. Pengertian tersebut tidak menjadi masalah untuk interval buka. Tapi bagai mana untuk interval tutup $[a,b]$? Timbul pertanyaan tentang kekontinuan di $x=a$ dan $x=b$. Kita memerlukan definsi tentang kekontinuan dari kanan dan dari kiri seperti berikut

Definisi :

Sebuah fungsi dikatakan kontinu dari kanan a jika $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ dan kontinu dari kiri a jika $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

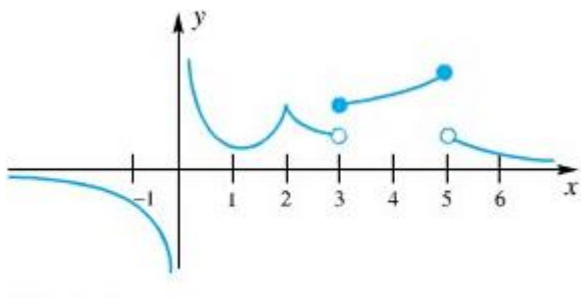
Selanjutnya definisi kekontinuan pada interval diberikan sebagai

Definisi :
f dikatakan kontinu pada selang terbuka jika f kontinu di setiap titik pada selang tersebut. f dikatakan kontinu pada selang tertutup $[a,b]$, jika f kontinu pada selang (a,b), kontinu dari kanan a dan kontinu dari kiri b

Dengan definisi ini kita mengatakan $\frac{1}{x}$ kontinu pada selang $(0,1)$ dan $\sqrt{x}$ kontinu pada selang $[0,1]$

<u>Soal</u> :

1.



Deskripsikan kekontinuan fungsi yang grafiknya diberikan seperti di atas, dengan menggunakan definisi kekontinuan pada selang

2. Deskripsikan kekontinuan fungsi-fungsi berikut , dengan menggunakan definisi kekontinuan pada selang

a. $f(x) = \dfrac{x^2 + |x-1|}{\sqrt[3]{x+1}}$ b. $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x+1}{x^2+1}$

TUGAS 8

1. Misalkan $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{jika} \quad x<1 \\ ax+b & \text{jika} \quad 1\le x<2 \\ 3x & \text{jika} \quad x\ge 2 \end{cases}$, cari nilai a dan b sehingga f kontinu di mana-mana
2. Selidiki kekontinuan $f(x)=(x-1)[\![|x|]\!]$ pada titik-titik $x=1,\ x=0$ dan $x=\frac{1}{2}$
3. Selidiki kekontinuan fungsi $f(x)=\begin{cases} x^2-x+2\dfrac{|1-x|}{1+x} & \text{jika} \quad x\ne -1 \\ 2 & \text{jika} \quad x=-1 \end{cases}$ pada daerah asalnya menggunakan definisi kekontinuan pada selang
4. Misal $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{jika} \quad x<0 \\ 1 & \text{jika} \quad x\ge 0 \end{cases}$ dan $g(x)=x^2$ selidiki kekontinuan $f+g$, fg dan $\dfrac{f}{g}$ pada daerah asalnya