PERTEMUAN 6

Indikator Pencapaian Hasil Belajar

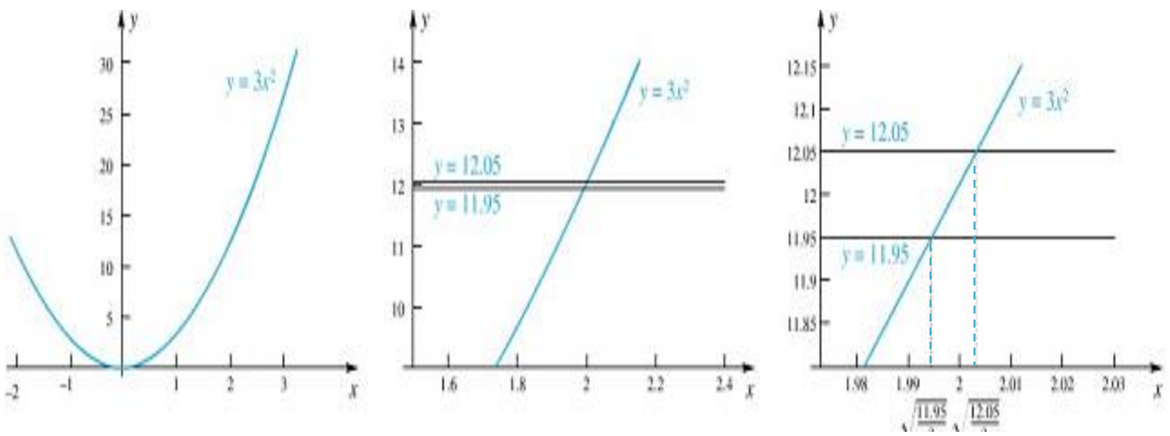
Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

1. Menjelaskan definisi persis limit
2. Membuktikan limit suatu fungsi di suatu titik dengan menggunakan definisi limit

Materi Ajar

Definisi Persis Limit

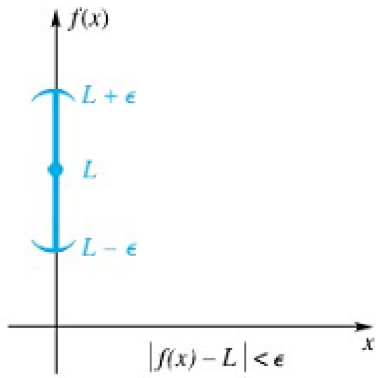
Sebelum sampai pada definisi persis tentang limit, kita perhatikan dulu contoh berikut : Tinjau grafik $y = f(x) = 3x^2$, kita akan mencoba menentukan seberapa dekat x ke 2 untuk menjamin $f(x)$ jaraknya ke 12 kurang dari 0,05



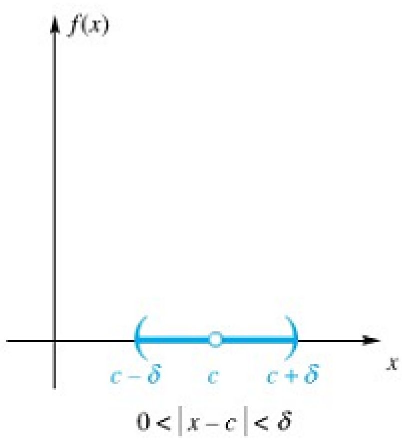
Terlihat bahwa jika $\sqrt{\frac{11,95}{3}} < x < \sqrt{\frac{12,05}{3}}$, maka $f(x)$ memenuhi $11,95 < f(x) < 12,05$. Kita bisa mengaproksimasi interval $\sqrt{\frac{11,95}{3}} < x < \sqrt{\frac{12,05}{3}}$ dengan interval $1,99583 < x < 2,00416$, sehingga bisa dikatakan jika jarak x dengan 2 kurang dari 0,00416 maka jarak $f(x)$ dengan 12 kurang dari 0,05. Seberapa dekat x ke 2 untuk menjamin $f(x)$ jaraknya ke 12 kurang dari 0,01 ? Seberapa dekat x ke 2 untuk menjamin $f(x)$ jaraknya ke 12 kurang dari 0,001 ? Contoh ini membuat kita menduga bahwa berapapun dekatnya $f(x)$ dengan 12, kita dapat dengan mengambil x cukup dekat dengan 2

Selanjutnya kita siap untuk membuat definisi persis tentang limit. Kita sepakati bahwa penggunaan simbol ε dan δ dalam definisi dimaksudkan untuk menunjukkan bilangan positif (biasanya kecil)

Mengatakan $f(x)$ jaraknya dengan L kurang dari ε berarti $L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$ atau $|f(x)-L| < \varepsilon$ atau $f(x)$ terletak pada interval $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.



Mengatakan x cukup dekat dengan c tapi berbeda dengan c berarti untuk suatu δ positif , x terletak pada interval $(c-\delta, c+\delta)$, dengan c dihapus atau bisa ditulis $0 < |x-c| < \delta$



Selanjutnya dituliskan definisi persis tentang limit , sebagai

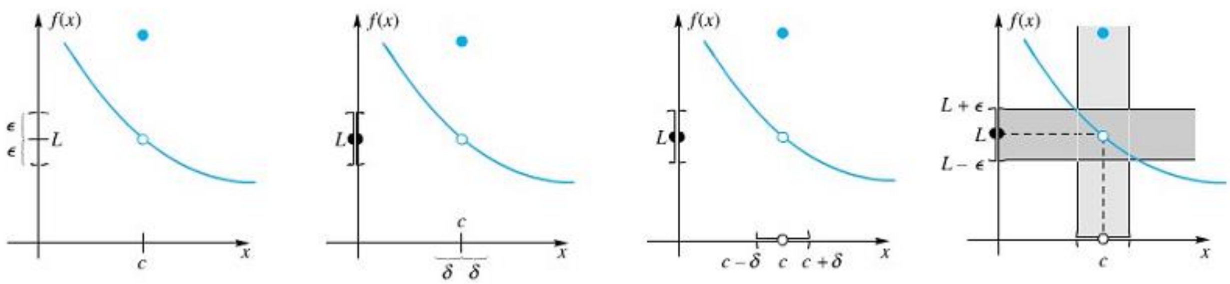
Definisi
Dikatakan limit fungsi $f(x)$ sama dengan L bilamana x mendekati c, ditulis

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan yang berpadanan $\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga

jika $0 < |x-c| < \delta$ maka $|f(x)-L| < \varepsilon$

Definisi limit ini mengatakan bahwa jika sekecil apapun selang $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ diberikan disekitar L, maka dapat kita temukan selang $(c-\delta, c+\delta)$ di sekitar c sedemikian rupa hingga f mengaitkan setiap titik dalam $(c-\delta, c+\delta)$ (kecuali mungkin c) ke dalam selang $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Proses tersebut dapat diilustrasikan seperti berikut :



<u>Soal</u> :

Buktikan dengan menggunakan definisi limit bahwa :

a. $\lim_{x\to 2} 3x-2=4$ b. $\lim_{x\to 3} \frac{x}{5}=\frac{3}{5}$ c. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{x-3}=7$

Untuk limit dari arah kanan (limit dari arah kiri analog) , didefinisikan sebagai

Definisi
(limit sisi-kanan)
Dikatakan limit fungsi $f(x)$ sama dengan L bilamana x mendekati c dari arah kanan , ditulis

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=L$$

jika untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat bilangan yang berpadanan $\delta>0$ sedemikian rupa sehingga

$$\text{jika } 0<x-c<\delta \text{ maka } |f(x)-L|<\varepsilon$$

<u>Soal</u> :

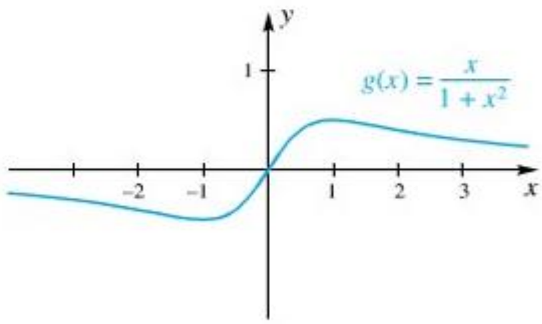
Buktikan dengan menggunakan definisi limit bahwa :

$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}=0$

Limit di Ketakhinggaan

Tinjau grafik fungsi $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. Apa yang terjadi dengan $g(x)$ jika x semakin besar ? Atau dalam simbol matematika berapa nilai $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x^2}$? Perhatikan tabel dan grafik berikut :

x	$\dfrac{x}{1+x^2}$
10	0.099
100	0.010
1000	0.001
10000	0.0001
↓	↓
∞	?



Dari tabel dan grafik kita membuat dugaan bahwa jika x makin besar maka nilai $g(x)$ mendekati 0 atau dengan menggunakan simbol matematika $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$. Dengan cara yang serupa kita juga bisa menduga jika x makin kecil maka nilai $g(x)$ mendekati 0 atau dengan menggunakan simbol matematika $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$.

Definisi persis limit di ketakhinggaan diberikan sebagai berikut :

Definisi

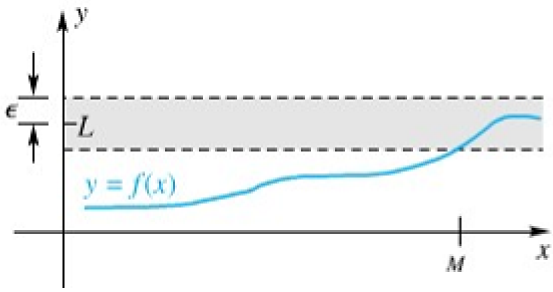
Misal f sebuah fungsi yang terdefinisi pada selang $[c,\infty)$ untuk suatu bilangan c. Dikatakan

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$$

jika untuk setiap $\varepsilon>0$ (betapapun kecilnya) terdapat bilangan yang berpadanan M sedemikian rupa sehingga

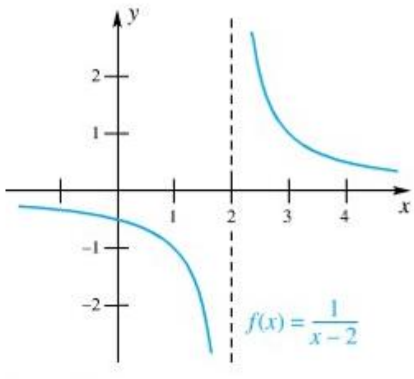
$$\text{jika } x>M \text{ maka } |f(x)-L|<\varepsilon$$

Definisi tersebut mengatakan bahwa sekecil apapun selang $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ diberikan disekitar L, maka dapat kita temukan suatu bilangan positif M sedemikian rupa hingga f mengaitkan setiap titik dalam selang (M,∞) ke dalam $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Proses tersebut diilustrasikan seperti berikut :



Limit Tak Hingga

Tinjau grafik fungsi $h(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Apa yang terjadi dengan $h(x)$ jika x semakin dekat dengan 2 ? Atau dalam simbol matematika berapa nilai $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2}$? Perhatikan grafik berikut :



Jika x semakin dekat dengan 2 dari arah kiri maka $h(x)$ semakin kecil tanpa batas dan sementara jika x semakin dekat dengan 2 dari arah kanan maka $h(x)$ semakin besar tanpa batas. Dengan menggunakan simbol matematika kita katakan $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = \infty$ dan menjadi tidak ada maknanya bicara tentang $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2}$.

Definisi

Dikatakan
$\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$
jika untuk setiap $M > 0$ (betapapun besarnya) terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga

$$\text{jika } 0 < |x - c| < \delta \text{ maka } f(x) > M$$

TUGAS 6

Buktikan dengan menggunakan definisi limit :

a. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$

b. $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 - 1\right) = 3$

c. $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$

c. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$

d. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$