Pengertian Intuitif tentang Limit

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

Misal $s(t)$ posisi suatu objek yang bergerak menurut garis lurus posisinya pada suatu saat t . Berapa kecepatan objek bergerak pada saat $t = 1$?
Ingat bahwa :

$$\text{kecepatan rata} - \text{rata} = \frac{\text{jarak}}{\text{waktu}}$$

Perhatikan :

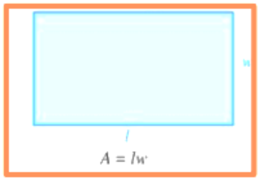
$$\text{kecepatan rata} - \text{rata pada } [1,2] = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1}$$

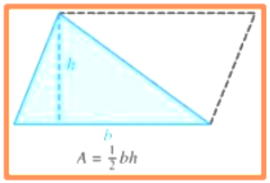
$$\text{kecepatan rata} - \text{rata pada } [1, 1,2] = \frac{s(1.2) - s(1)}{1.2 - 1}$$

$$\text{kecepatan rata} - \text{rata pada } [1, 1,02] = \frac{s(1.02) - s(1)}{1.02 - 1}$$

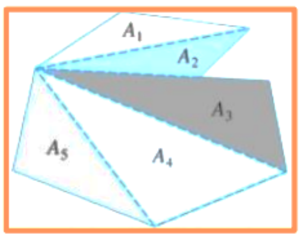
Kecepatan objek bergerak pada saat $t = 1$ dilihat sebagai limit dari kecepatan rata-rata pada interval-interval yang semakin kecil

Kita dapat mencari luas persegi panjang dan segitiga menggunakan rumus yang ada di geometri





Untuk daerah yang dibatasi oleh kurva berbentuk poligon, kita bisa melihat luasnya sebagai jumlah dari luas segitiga-segitiga



Bagaimana menghitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva berbentuk lingkaran ?

Tinjau poligon-poligon beraturan $P_1, P_2, P_3, \dots$ dengan $4 -$ sisi, $8 -$ sisi, $16 -$ sisi ...

Jika n semakin besar luas poligon n-sisi akan menghampiri luas lingkaran
Luas lingkaran dilihat sebagai limit dari luas-luas poligon beraturan n-sisi dengan n semakin besar (tanpa batas)

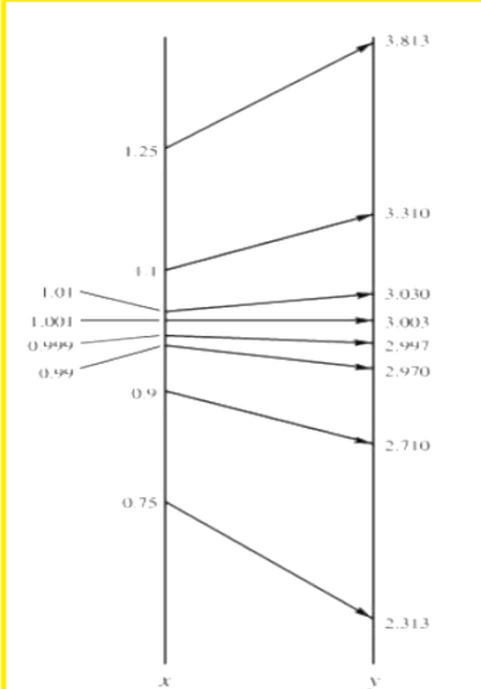
Ide atau gagasan limit terkait dengan masalah penghampiran (menentukan nilai fungsi pada suatu titik dengan melihat perilaku/kecenderungan nilai fungsi pada titik-titik di dekat titik tersebut)

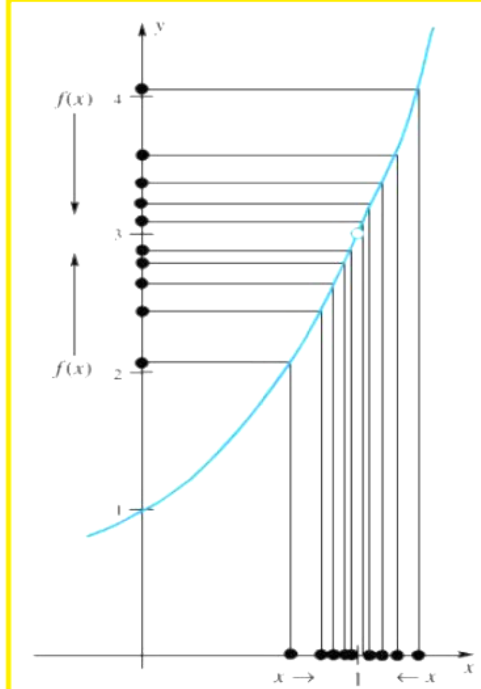
Tinjau fungsi : $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

Fungsi tersebut tidak terdefinisi di $x = 1$

Bagaimana perilaku $f(x)$ untuk x yang dekat dengan 1 ?

x	$y = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$
1.25	3.813
1.1	3.310
1.01	3.030
1.001	3.003
↓	↓
1.000	?
↑	↑
0.999	2.997
0.99	2.970
0.9	2.710
0.75	2.313





Dalam simbol matematis ditulis $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$

Dibaca

“ limit dari $\frac{x^3-1}{x-1}$ pada $x = 1$ adalah 3 “

$\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} = x^2 + x + 1$, untuk $x \neq 1$

Sehingga jika x dekat dengan 1, tapi $x \neq 1$ maka $\frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1$ dekat dengan 3

Ditulis $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} x^2 + x + 1 = 3$

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

Definisi : (pengertian limit secara intuisi)

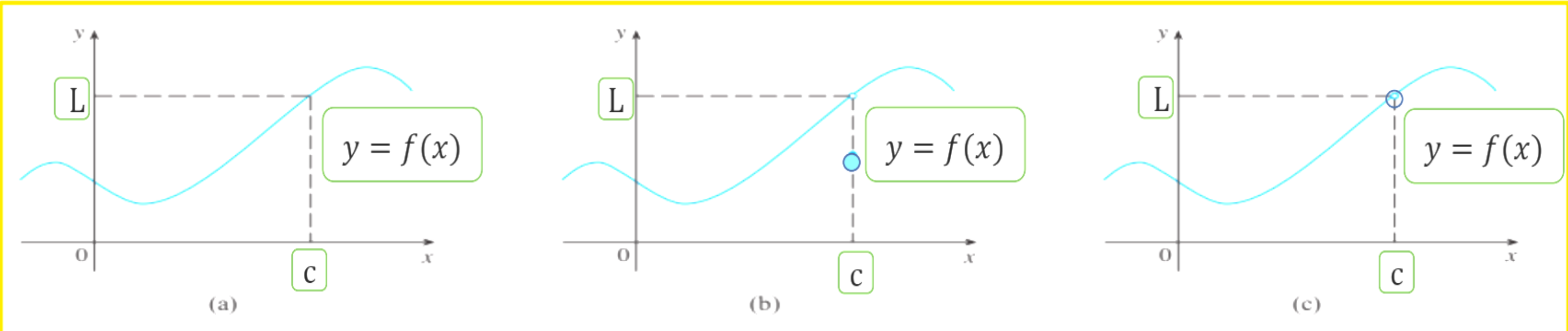
Mengatakan $\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti bahwa jika x dekat tapi berbeda dengan c maka $f(x)$ dekat dengan L

Perhatikan :

Kita tidak membicarakan apapun tentang c

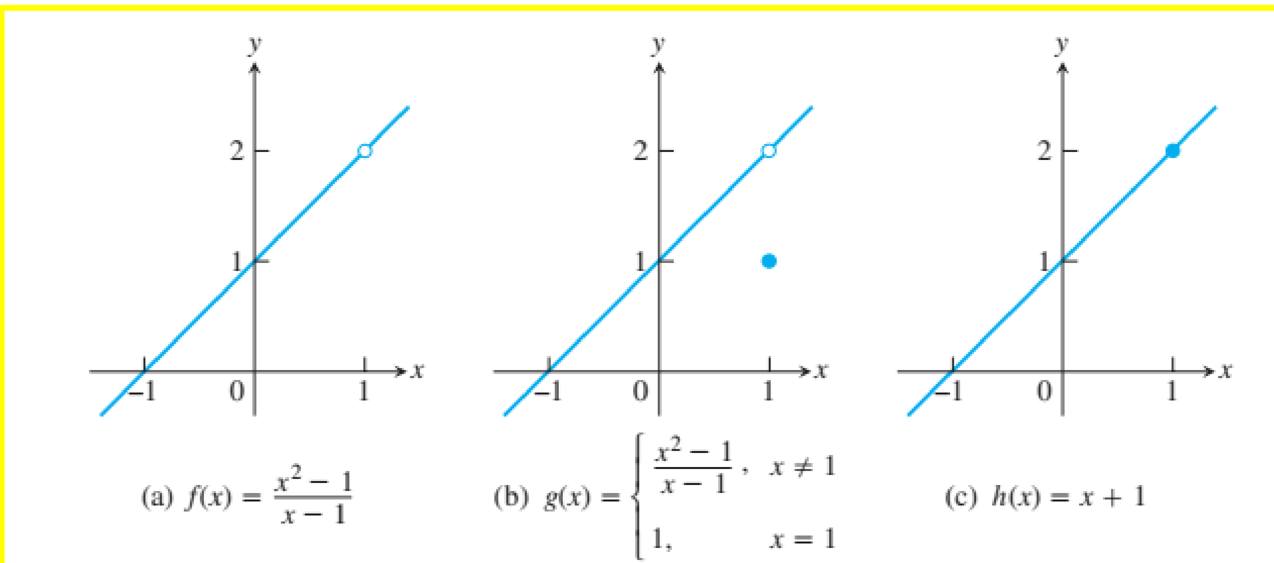
Pengertian limit dikaitkan hanya dengan perilaku fungsi di dekat c bukan di c

UNS UNIVERSITAS SEBELAS MARET



Pada ketiga kasus $\lim_{x \to c} f(x) = L$

Ilustrasi

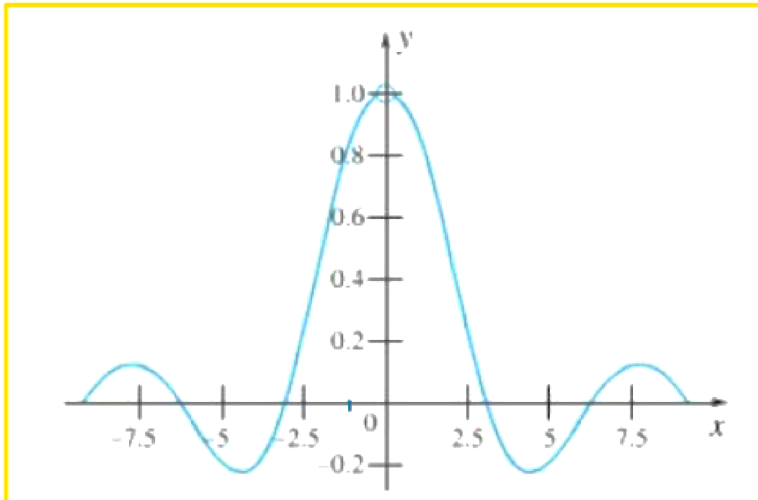


UNS
UNIVERSITAS SEBELAS MARET

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Perhatikan

x	$\frac{\sin x}{x}$
1.0	0.84147
0.1	0.99833
0.01	0.99998
↓	↓
0	?
↑	↑
−0.01	0.99998
−0.1	0.99833
−1.0	0.84147



$$\lim_{x\to 0} x^2 - \frac{\cos x}{10000}$$

x	$x^2 - \frac{\cos x}{10,000}$
± 1	0.99995
± 0.5	0.24991
± 0.1	0.00990
± 0.01	0.000000005
$\downarrow$	$\downarrow$
0	?

x dekat dengan 0 maka $f(x)$ dekat dengan 0 ? $\lim_{x\to 0} x^2 - \frac{\cos x}{10000} = 0$?

Hati-hati dengan pengamatan secara numeris

Jika x dekat dengan 0 maka x^2 dekat dengan 0 dan $\cos x$ dekat dengan 1 (coba lihat grafik fungsi cos) , sehingga $x^2 - \frac{\cos x}{10000}$ dekat dengan $-\frac{1}{10000}$

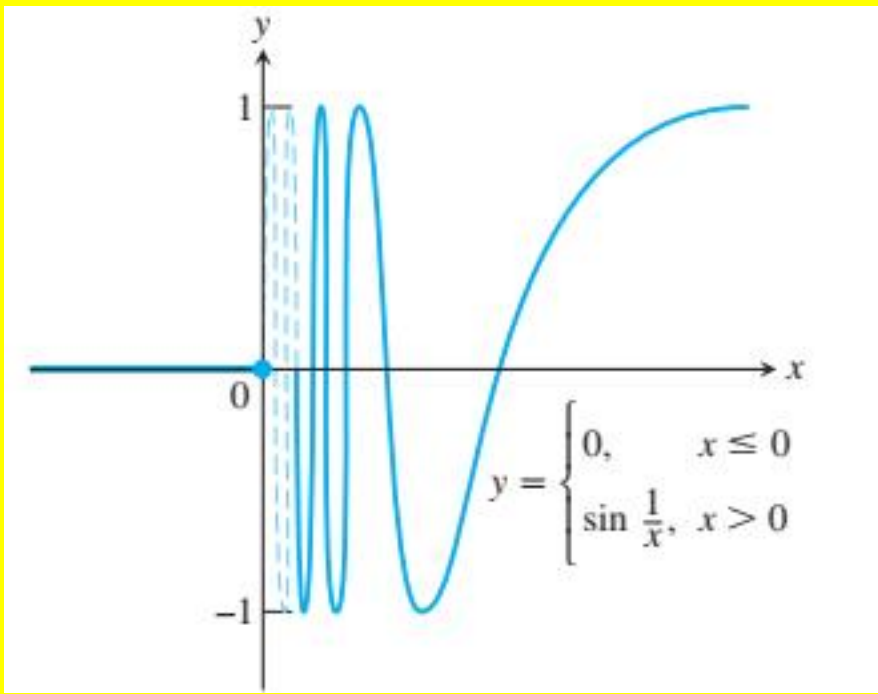
UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Bilamana suatu fungsi dikatakan limitnya tidak sama dengan L di titik c ?

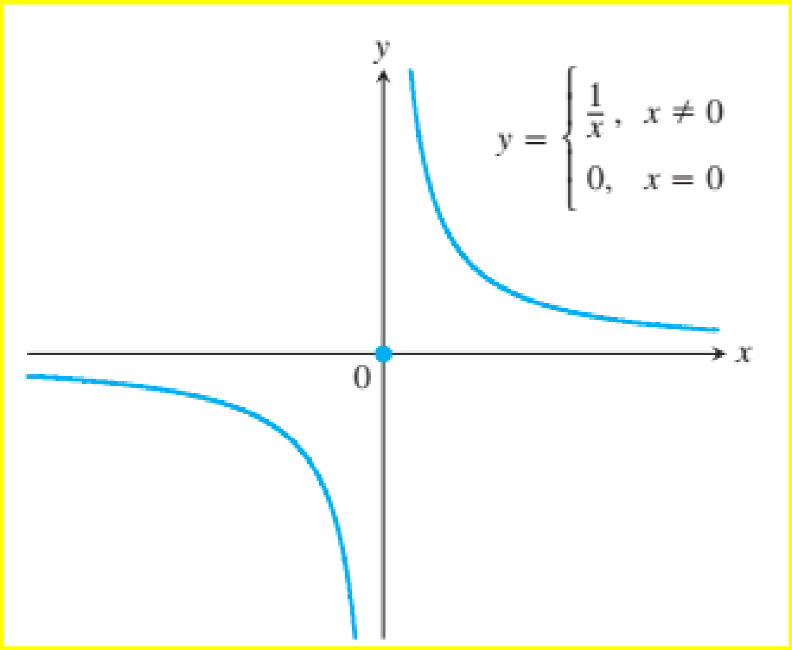
Bilamana suatu fungsi dikatakan tidak punya limit di suatu titik ?

Apakah terdapat fungsi yang tidak memiliki limit di suatu titik ?

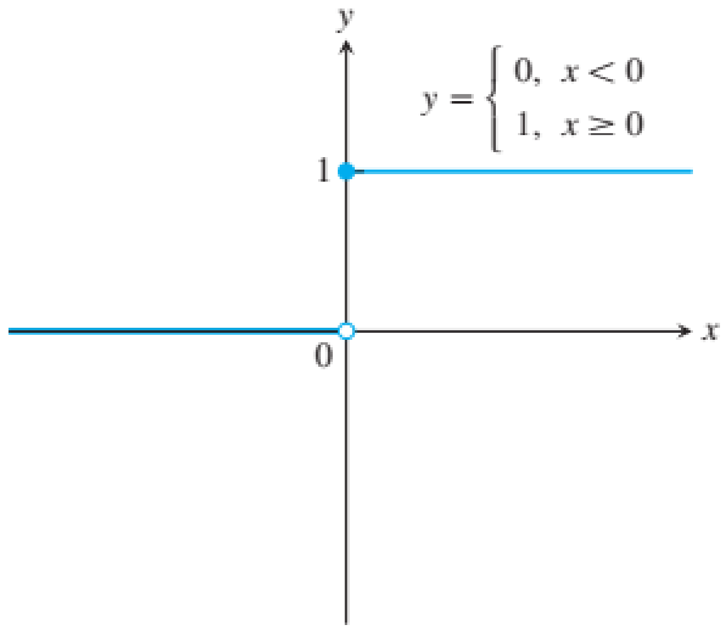
UNIVERSITAS SEBELAS MARET



UNIVERSITAS SEBELAS MARET



y
$y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
0
x



UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Definisi : (pengertian limit kanan secara intuitif)

Mengatakan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ berarti bahwa jika $x > c$, dekat dengan c maka $f(x)$ dekat dengan L

Teorema

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x \to c^+} f(x) = L = \lim_{x \to c^-} f(x)$

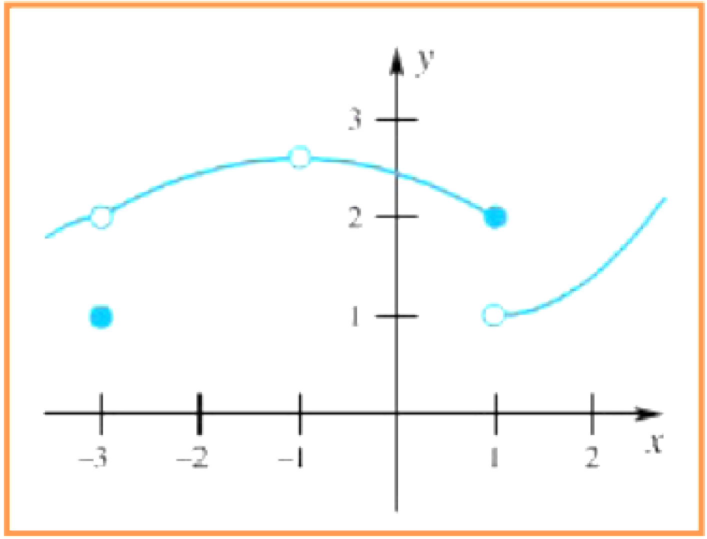
UNIVERSITAS SEBELAS MARET

https://www.geogebra.org/m/mG6e7rz3

UNS

UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Contoh soal : Tentukan yang berikut



a. $\lim_{x \to -3} f(x)$

b. $f(-3)$

c. $f(-1)$

d. $\lim_{x \to -1} f(x)$

e. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

f. $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

g. $f(1)$

h. $\lim_{x \to 1} f(x)$

Contoh soal :

Gambar sketsa grafik fungsi f yang memenuhi semua persyaratan berikut :

(i) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 4$

(ii) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$

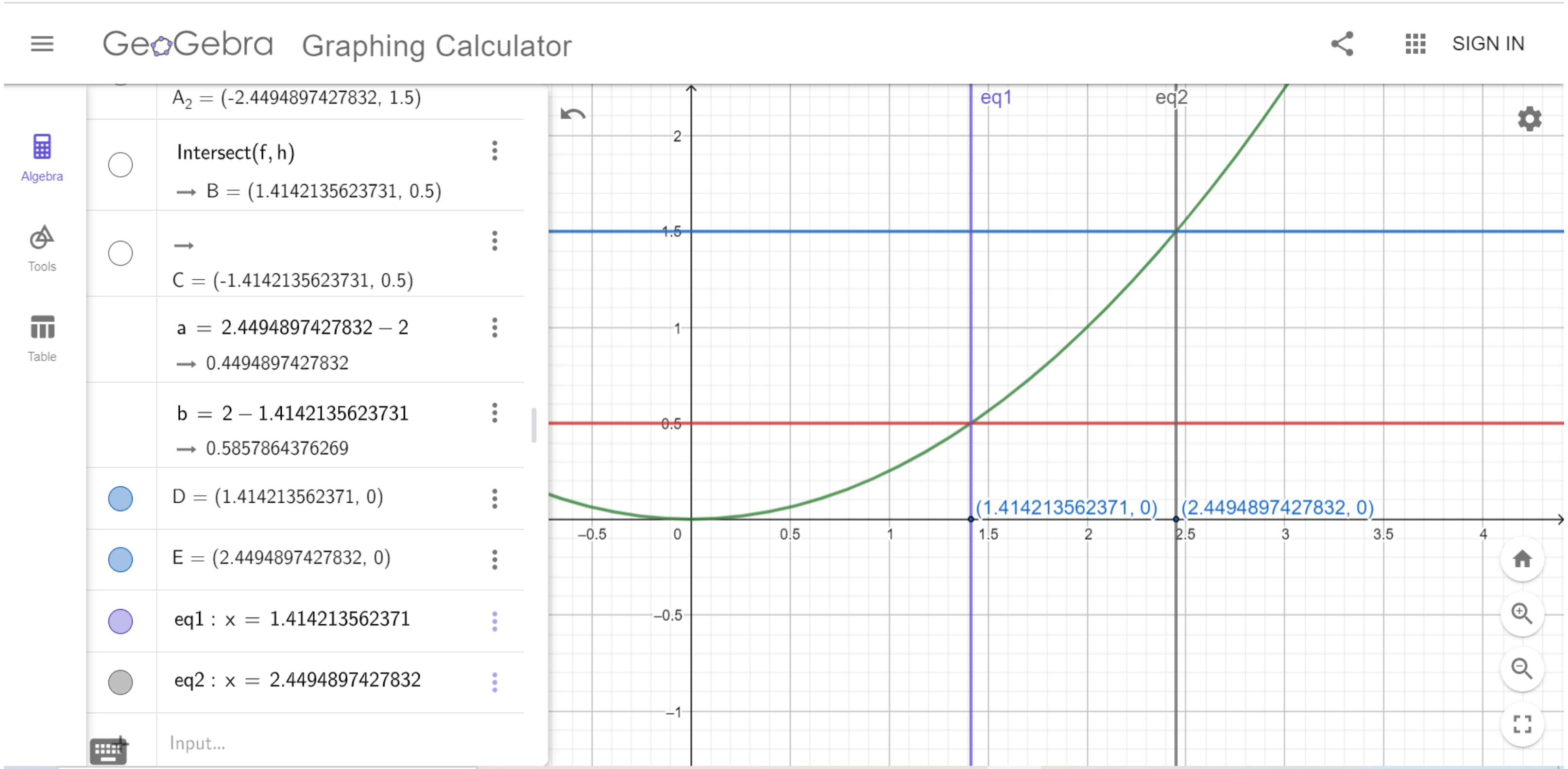
(iii) $\lim_{x \to -1} f(x) = 2$

(iv) $f(-2) = 1$

(v) $f(3) = 3$

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

Seberapa dekat x ke 2 untuk menjamin f(x) jaraknya ke 1 kurang dari 0,5



https://www.geogebra.org/m/ptsqztrt

UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET