PERTEMUAN 5

Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

1. Menjelaskan pengertian limit fungsi secara intuisi
2. Menentukan nilai limit suatu fungsi di suatu titik menggunakan pengertian intutif tentang limit

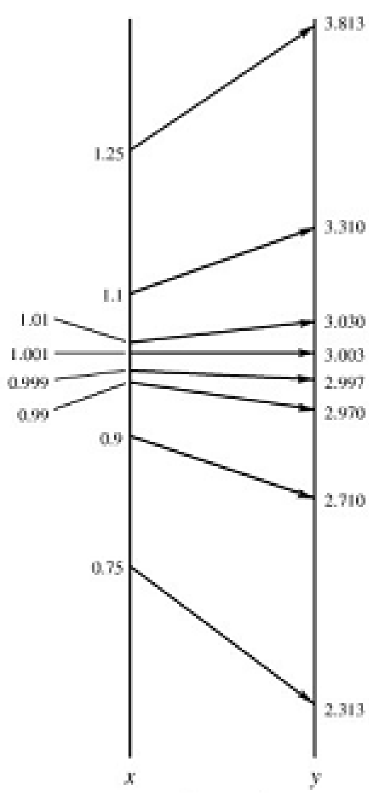
Materi Ajar

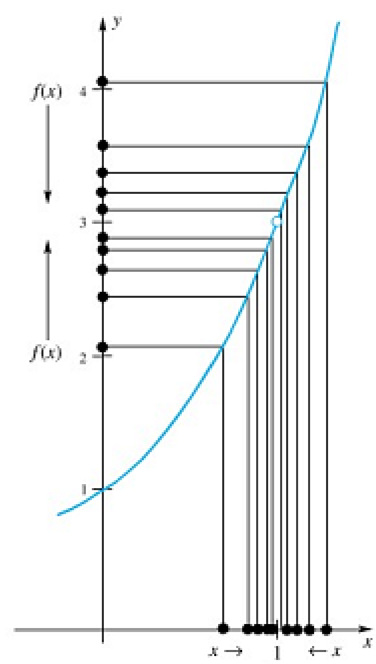
Pendahuluan Limit

a. Pengertian intuitif tentang Limit

Tinjau fungsi $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$. Perhatikan bahwa fungsi tersebut tidak terdefinisi pada $x=1$. Tapi kita masih bertanya, apa yang terjadi dengan $f(x)$ jika x mendekati 1 ? Untuk melihat hal tersebut kita bisa mencoba menghitung nilai $f(x)$ untuk beberapa nilai x di sekitar 1, menunjukkan diagram skematik untuk nilai-nilai tersebut atau membuat sketsa grafik $y=f(x)$

x	$y=\dfrac{x^3-1}{x-1}$
1.25	3.813
1.1	3.310
1.01	3.030
1.001	3.003
↓	↓
1.000	?
↑	↑
0.999	2.997
0.99	2.970
0.9	2.710
0.75	2.313





Dari ketiga cara tersebut kita melihat bahwa $f(x)$ mendekati 3 jika x mendekati 1. Hal ini diungkapkan dengan “limit fungsi $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ jika x mendekati sama dengan 3”. Dalam lambang matematika ditulis $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$

Sebagai langkah awal kita coba dulu membuat definisi limit seperti berikut :

Definisi

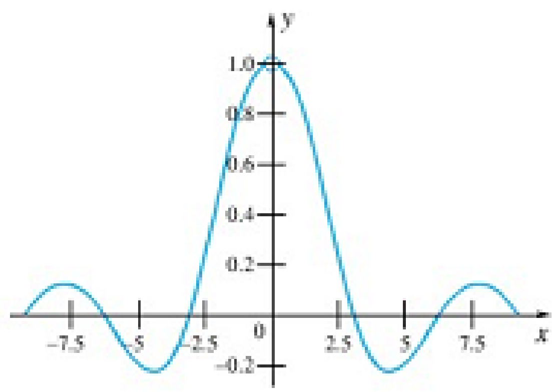
(Pengertian Intuitif Limit secara Intuitif) Dikatakan limit fungsi $f(x)$ sama dengan L bilamana x mendekati c, ditulis

$$\lim_{x\to c} f(x)=L$$

jika kita dapat membuat $f(x)$ mendekati L dengan cara mengambil nilai x dekat dengan c tapi tidak sama dengan c

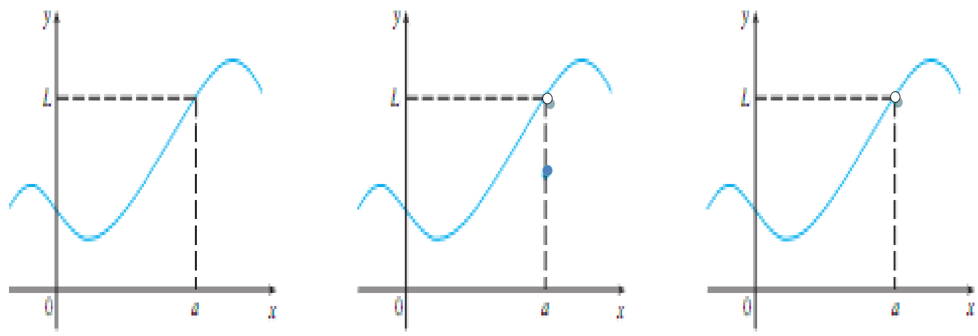
Perhatikan beberapa nilai $f(x)$ dan grafik fungsi f , untuk $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ dengan x di sekitar 0 seperti yang diberikan berikut ini

x	$\dfrac{\sin x}{x}$
1.0	0.84147
0.1	0.99833
0.01	0.99998
↓	↓
0	?
↑	↑
−0.01	0.99998
−0.1	0.99833
−1.0	0.84147



Apa yang bisa dikatakan tentang $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$?

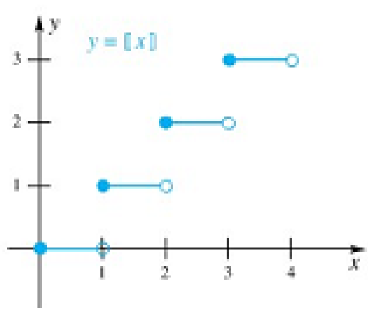
Ungkapan “tapi tidak sama dengan c” menunjukkan bahwa dalam menentukan nilai limit $f(x)$ bilamana x mendekati c kita tidak pernah menganggap $x=c$, hal itu berarti kita tidak mempedulikan bagaimana f didefinisikan di c bahkan f tidak harus terdefinisi di . Ilustrasi berikut memperlihatkan $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ dalam tiga kasus



(a) (b) (c)

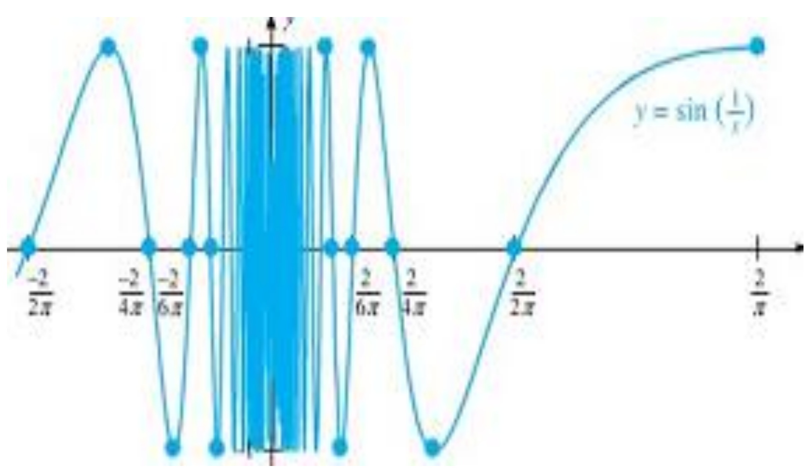
Apakah setiap fungsi selalu punya limit di setiap titik ? Perhatikan grafik $f(x)=[\![x]\!]$.

Apakah $[\![x]\!]$ mendekati suatu bilangan riil L (yang tunggal) jika x mendekati 2 ?



Perhatikan juga yang berikut ini

x	$\sin\frac{1}{x}$
$2/\pi$	1
$2/(2\pi)$	0
$2/(3\pi)$	−1
$2/(4\pi)$	0
$2/(5\pi)$	1
$2/(6\pi)$	0
$2/(7\pi)$	−1
$2/(8\pi)$	0
$2/(9\pi)$	1
$2/(10\pi)$	0
$2/(11\pi)$	−1
$2/(12\pi)$	0
↓	↓
0	?



Apakah $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ mendekati suatu bilangan riil L (yang tunggal) jika x mendekati 0 ?

Kedua kasus di atas menunjukkan bahwa terdapat fungsi yang tidak memiliki limit di suatu titik. Kasus pertama dikenali sebagai adanya loncatan sedangkan kasus kedua sebagai terlalu banyak goyangan.

Kasus adanya loncatan seperti $[\![x]\!]$ pada setiap bilangan bulat, menyarankan pengertian limit satu sisi. Misal $x \to c^{+}$ menunjukkan x mendekati c dari arah kanan dan $x \to c^{-}$ menunjukkan x mendekati c dari arah kiri, kita dapat mencoba membuat definisi berikut

Definisi
(Pengertian Limit Kiri / Kanan secara Intuitif)
Dikatakan limit fungsi $f(x)$ sama dengan L bilamana x mendekati c dari arah kiri ditulis

$$\lim_{x \to c^{-}} f(x) = L$$

jika kita dapat membuat $f(x)$ mendekati L dengan cara mengambil nilai x dekat dengan c dari arah kiri tapi tidak sama dengan c (analog untuk limit dari arah kanan)

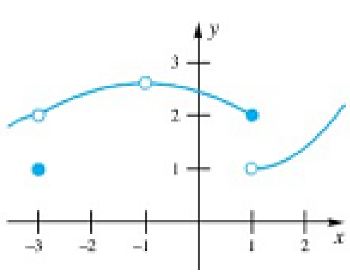
Dengan definisi di atas kita bisa mengatakan $\lim\limits_{x \to 2^{-}} [\![x]\!] = 1$ dan $\lim\limits_{x \to 2^{+}} [\![x]\!] = 2$. Selanjutnya teorema berikut adalah suatu hal yang logis kita terima

Teorema
$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{x \to c^{+}} f(x) = \lim\limits_{x \to c^{-}} f(x) = L$

<u>Soal</u> :

1. Untuk fungsi f yang grafiknya diberikan berikut , tentukan

(a) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$	(b) $f(-3)$	(c) $f(-1)$
(d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$	(e) $f(1)$	(f) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$
(g) $\lim\limits_{x \to 1^{-}} f(x)$	(h) $\lim\limits_{x \to 1^{+}} f(x)$	(i) $\lim\limits_{x \to -1^{+}} f(x)$



2. Gambarkan sketsa grafik contoh fungsi yang memenuhi persyaratan berikut $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$, $f(3) = 3$ dan $f(-2) = 1$

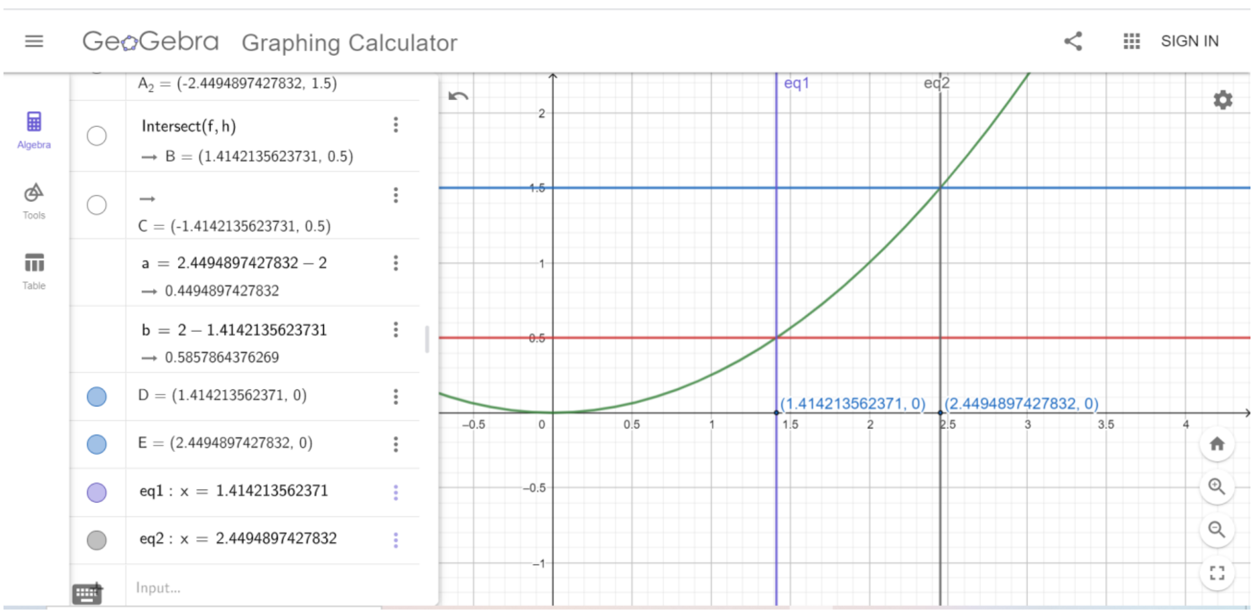
3. Misal $f(x) = x - [\![x]\!]$. Gunakan definisi limit secara intuitif untuk menentukan yang berikut dan nyatakan jika tidak ada

   (i) $f(0)$ (ii) $\lim_{x\to 0} f(x)$

   (iii) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (iv) $\lim_{x\to 1/2} f(x)$

b. Mengestimasi jarak x ke c untuk menjamin $f(x)$ jaraknya ke L sedekat yang diinginkan

Tinjau grafik $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2$ pada gambar berikut ini, kita akan mencoba menentukan seberapa dekat x ke 2 untuk menjamin $f(x)$ jaraknya ke 1 kurang dari 0,5



Dari gambar di atas terlihat bahwa jika $1{,}414213562371 < x < 2{,}4494897427832$, maka jarak $f(x)$ ke 1 kurang dari 0,5. Tapi kita ingin mengatakan seberapa dekat jarak x dengan 2 agar jarak $f(x)$ ke 1 kurang dari 0,5. Perhatikan bahwa jarak 1,414213562371 dengan 2 adalah 0,5857864376269 dan jarak 2,4494897427832 dengan 2 adalah 0,4494897427832. Kita harus memilih yang lebih kecil diantara 0,5857864376269 dan

0,4494897427832, sehingga kita bisa mengatakan jarak x dengan 2 kita buat kurang dari 0,4494897427832 agar jarak $f(x)$ ke 1 kurang dari 0,5. Dengan menggunakan nilai mutlak, kita katakan bahwa agar $|f(x)-1|<0{,}5$ kita tetapkan $|x-2|<0{,}4494897427832$.

TUGAS 5

1. Misal $f(x)=|x|+\dfrac{x-1}{|x-1|}$

   a. Berdasarkan rumus fungsi f , sketsa grafik f dengan menggunakan tangan.

      Bandingkan hasilnya dengan grafik yang diperoleh dengan geogebra.

   b. Gunakan definisi limit secara intuitif (gunakan grafik) untuk menentukan $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ dan $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

2. Gunakan geogebra untuk mengestimasi jarak x ke 2 agar jarak $f(x)=3x^2$ ke 12 kurang dari : a. 0,5 b. 0,05 c. 0,005