Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

1. Memahami pengertian integral sebagai anti turunan
2. Memahami pengertian integral tak tentu
3. Menghitung integral taktentu dengan menggunakan aturan pangkat, kelinieran integral taktentu dan substitusi integral taktentu

INTEGRAL SEBAGAI ANTI TURUNAN

Ringkasan Materi Perkuliahan

Definisi :

Fungsi F disebut ***suatu anti turunan*** dari fungsi f pada interval I jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua x di I (Jika x suatu titik ujung I, $F'(x)$ hanya perlu berupa turunan

Contoh 1 :

a. $F(x) = 3x^3 + 2x^2 + x \mathbf{+5}$ b. $F(x) = 3x^3 + 2x^2 + x \mathbf{-100}$ c. $F(x) = 3x^3 + 2x^2 + x \mathbf{+10^{10}}$

Coba anda cari turunan pertamanya $\frac{dF(x)}{dx}$ atau kita sebut sebagai $f(x)$

Untuk fungsi (a), kita peroleh $f(x) = 9x^2 + 4x + 1$

Untuk fungsi (b), kita peroleh $f(x) = 9x^2 + 4x + 1$

Begitu pun untuk yang (c). Artinya, ternyata F(x) adalah anti dari turunan $f(x)$

Bentuk umum dari anti turunan dari f pada selang I adalah $F(x) + C$ dengan $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in I$

Bentuk umum dari anti turunan tersebut dinamakan anti diferensial dan proses mencari anti diferensial dari f dinamakan *integral tak tentu* dari f ditulis dengan lambang $\int f(x)dx = F(x) + C$

Kenapa digunakan penjumlahan dengan C= konstanta ? Perhatikan contoh 1 di atas, fungsi (a), fungsi (b), fungsi (c) adalah anti turunan dari $f(x) = 9x^2 + 4x + 1$

Misalnya jika $F(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ **+5** maka $F'(x) = 9x^2 + 4x + 1$ sehingga $\int (9x^2 + 4x + 1)dx = 3x^3 + 2x^2 + x + C$

Jika $F(x)=3x^3+2x^2+x$ **-100** maka $F'(x)=9x^2+4x+1$ sehingga $\int(9x^2+4x+1)dx=3x^3+2x^2+x+C$

Misalnya jika $F(x)=3x^3+2x^2+x$ **10[10]** maka $F'(x)=9x^2+4x+1$ sehingga $\int(9x^2+4x+1)dx=3x^3+2x^2+x+C$

Teorema :
(Aturan Pangkat) Jika r sebarang bilangan rasional , $r \neq -1$ maka
$\int x^r dr = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$
x

Kita review lagi tentang turunan fungsi trigonometri

D(sin x) = cos x	**D(sec x) = sec x tgn x**
D(cos x) = -sin x	**D(cosec x) = -cosec x ctg x**
D(tgn x) = sec²x	**D(ctgn x) = -cosec ²x**

Dari turunan di atas maka integral dari fungsi trigonometri:

Teorema :

$\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\qquad$ $\int \cos x dx = \sin x + C$

$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$ $\qquad$ $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$ $\qquad$ $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

Coba anda buktikan untuk masing-masing integral diatas!

Teorema :
(Kelinieran dari $\int ...dx$) Misal f dan g mempunyai anti turunan dan misal k suatu konstanta. Maka :
(i) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
(ii) $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Teorema :

(Substitusi untuk Integral Tak Tentu) . Misal g suatu fungsi yang terdiferensialkan dan misal F suatu antiturunan dari f Maka jika $u = g(x)$

$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$

Tentukan dengan menggunakan integral subtitusi $\int \sin 2x\,dx$. Apa hasil anda??

Fungsi $f(x) = \sin 2x$ memiliki beberapa anti turunan diantaranya

$F_1(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$, $F_2(x) = \sin^2 x$ dan $F_3(x) = -\cos^2 x$

Jadi apa yang dapat anda simpulkan?

Latihan Terbimbing

1. Buktikan bahwa :

$$\int \frac{x^4+1}{x^2\sqrt{x^4-1}}\,dx = \frac{\sqrt{x^4-1}}{x} + C$$

2. Cari integral tak tentu berikut :

a. $\int (x^3 + \sqrt{x} + 1)\,dx$

b. $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{\sqrt{x}}\,dx$

c. $\int (3\sin t - 2\cos t)\,dt$ =-3cost-2sint+c

d. $\int \frac{2\cot x - 3\sin^2 x}{\sin x}\,dx$

3. Tentukan u dan f sehingga integral tak tentu yang berikut dapat dipandang sebagai $\int f(u)\,du$, kemudian hitunglah integralnya

a. $\int (5x^2+1)\sqrt{5x^3+3x-2}\,dx$

b. $\int x^2(5+2x^3)^8\,dx$

c. $\int (\sin^5 x^2)(x\cos x^2)\,dx$

d. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

e. $\int \left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2}\left(\frac{1}{t^2}\right)dt$

f. $\int x\sin(x^2+4)\,dx$

Integral Tentu

Misal f terdefinisi pada selang tutup $[a,b]$. Buat partisi P pada selang $[a,b]$ memakai titik-titik $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ dengan panjang selang $[x_{i-1}, x_i]$ adalah $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,2,3,\ldots,n$. Pada setiap setiap selang bagian $[x_{i-1}, x_i]$ ambil sebuah titik sebarang $\bar{x}_i$ (mungkin saja sebuah titik ujung), disebut titik sampel.

Maka bentuk penjumlahan $R_P = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$ dinamakan ***Jumlah Riemann*** untuk f yang bersesuaian dengan partisi P

Definisi :

Misal f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tutup $[a,b]$. Jika $\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i$ ada kita katakan f adalah terintegralkan pada $[a,b]$. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)dx$ disebut integral tentu (atau integral Riemann) f dari a ke b, diberikan oleh $\int_a^b f(x) = \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i$

Teorema :

(Teorema Dasar Kalkulus) Misal f kontinu pada $[a,b]$ dan misal F sebarang anti turunan dari f pada $[a,b]$, maka $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$$\int_2^6 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{208}{3} \text{.......................(1)}$$

$$\int_2^6 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^6 = \frac{1}{3}\left(6^3 - 2^3\right) = \frac{1}{3}(216-8) = \frac{208}{3} \text{...........(2)}$$

Perhatikan bahwa $f(x) = x^2$ sehingga integral dari $f(x)$, kita notasikan $F(x)$ dengan $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Sehingga $F(6) = \frac{6^3}{3}$ dan $F(2) = \frac{2^3}{3}$

Bagaimana dengan yang ke (3) berikut, apakah pernyataan di bawah ini benar?

$$\int_2^6 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^6 = \frac{(6-2)^3}{3} = \frac{4^3}{3} = \frac{64}{3} \text{,................(3)}$$

Pernyataam di nomor 3 adalah salah

Teorema :

(Kelinieran Integral Tentu) Misal f dan g terintegralkan pada $[a,b]$, dan bahwa k suatu konstanta. Maka $f+g$ dan kf terintegralkan pada $[a,b]$ dan

(i) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

(ii) $\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Teorema :

(Sifat Penambahan Selang) Misal f terintegralkan pada suatu selang yang memuat titik a,b,c maka $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c g(x)dx$ bagaimanapun urutan dari a,b,c

Teorema :

(Sifat Pembandingan) Misal f dan g terintegralkan pada $[a,b]$ dan jika $f(x) \le g(x)$ untuk semua x pada $[a,b]$, maka $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Teorema :

(Pendiferensialan suatu Integral Tentu) Misal f kontinu pada selang $[a,b]$ dan misal x sebuah (peubah) titik pada $[a,b]$. Maka $D_x\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$

Contoh : $D_x\left[\int_1^x \sin t\,dt\right] = D_x(-\cos t|_1^x) = D_x((-\cos x) - \cos(1)) = \sin x$

Latihan terbimbing :

1. Tentukan integral tentu berikut :

a. $\int_a^b x^2 dx$ b. $\int_{-1}^{2} (3x^2 + 2x - 2) dx$

c. $\int_0^1 (2\sqrt{x} - \sqrt{2x+1}) dx$ d. $\int_0^1 \frac{2}{x^3} dx$

2. Hitung

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 3x \cos 3x) dx$ b. $\int_{-1}^{3} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}} dx$

G'(x)

3. Tentukan $G(x)$ jika

a. $G(x) = \int_x^2 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt$ b. $G(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{t^2+1} dt$