MAKALAH
DASAR-DASAR MATEMATIKA
PERNYATAAN DALAM MATEMATIKA

Dosen Pengampu:

Drs. Ponco Sujatmiko, M.Si.

Disusun Oleh:

Ade Oktafianingrum	(K1321002)
Alridani Alif Nursavana	(K1321010)
Aulia Diva Muthiah Yuda	(K1321020)
Aura Putri Aryanti	(K1321022)
Dela Kuncaraningrum	(K1321030)
Falerinda Mardaningtyas	(K1321036)
Hafidz Ahmad Muzakky	(K1321042)

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SEBELAS MARET SURAKARTA

2021/2022

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas limpahan rahmat, taufik, serta hidayah-Nya sehingga kami dapat menyusun makalah dengan judul “Pernyataan dalam Matematika“ sesuai dengan yang diharapkan. Penyusunan makalah ini kami buat sebagai salah satu pemenuhan tugas pada mata kuliah Dasar-dasar Matematika.

Makalah ini berisi tentang pernyataan matematika yang diubah dalam bentuk simbol-simbol dan pembuktiannya. Penyusunan makalah ini diharapkan dapat membuat para pembaca bertambah wawasannya mengenai bagaimana bentuk pernyataan matematika jika disimbolkan.

Namun kami merasa penyusunan makalah ini belum sempurna. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati, kami mengharapkan saran dan kritik yang bersifat membangun dari para pembaca demi penyempurnaan penyusunan makalah ini. Terima kasih atas semua kritik dan sarannya.

Surakarta, 22 Oktober 2021

Penyusun

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Pernyataan adalah sebuah kalimat deklaratif yang mempunyai nilai benar atau salah, tetapi tidak sekaligus benar dan salah. Dalam kehidupan sehari-hari kita sering menjumpai pernyataan-pernyataan. Untuk mengetahui apakah suatu pernyataan itu berniali benar atau salah perlu dilakukan sebuah pembuktian atau penarikan kesimpulan.

Dalam membuktikan atau menarik sebuah kesimpulan dari suatu pernyataan dibutuhkan logika. Logika adalah suatu disiplin yang berhubungan dengan metode berpikir. Logika memberikan aturan-aturan dan teknik-teknik untuk menentukan apakah argumen yang diberikan adalah valid.

Berfikir logis digunakan dalam matematika untuk membuktikan teorema-teorema, dalam ilmu pengetahuan alam untuk menarik kesimpulan dari eksperimen-eksperimen dan dalam kehidupan sehari-hari dapat digunakan untuk menyelesaikan banyak masalah. Selain itu berfikir logis juga bermanfaat untuk meningkatkan daya nalar dan proses berfikir.

B. Rumusan Masalah

1. Bagaimana cara menuliskan suatu pernyataan dalam simbol matematika?
2. Bagaimana cara menegasikan suatu pernyataan?
3. Bagaimana bentuk ekuivalen dari suatu pernyataan?
4. Bagaimana bentuk kontraposisi dari suatu pernyataan?
5. Bagaimana cara membuktikan suatu pernyataan yang bernilai benar atau salah?

C. Tujuan

1. Untuk mengetahui cara menuliskan suatu pernyataan dalam simbol matematika
2. Untuk mengetahui bagaimana cara menegasikan suatu pernyataan
3. Untuk mengetahui bagaimana bentuk ekuivalen dari suatu pernyataan
4. Untuk mengetahui bagaimana bentuk kontraposisi dari suatu pernyataan
5. Untuk mengetahui bagaimana cara membuktikan suatu pernyataan yang bernilai benar atau salah

BAB II

PEMBAHASAN

1. Jika a,b,c bilangan bulat, a|b dan b|c maka a|c

   Simbol

   $\forall a,b,c\ \ a,b,c \in Z, a|b \wedge b|c \rightarrow a|c$

   Negasi

   $\exists a,b,c\ \ a,b,c \in Z, a|b \wedge b|c\ \wedge a\nmid c$

   Kontraposisi

   $\forall a,b,c\ \ a,b,c \in Z\ a\nmid c \rightarrow a\nmid b \vee b\nmid c$

   Pembuktian :

   a|b berarti $\exists k\in Z \ni b=ka$…(1)

   b|c berarti $\exists m\in Z \ni c=mb$…(2)

   berdasarkan (1) dan (2)

   c=mb

   c=m(ka)

   c=(mk)a dengan mk anggota himpunan bilangan bulat

   maka a|c (terbukti benar)

2. jika a,b,c bilangan bulat, a|b dan a|(b+c) maka a|c

   Simbol

   $\forall a,b,c\ \ a,b,c \in Z, a|b \wedge a|(b+c) \rightarrow a|c$

   Negasi

   $\exists a,b,c\ \ a,b,c \in Z, a|b \wedge a|(b+c)\ \wedge\ a\nmid c$

   Kontraposisi

   $\forall a,b,c\ \ a,b,c \in Z\ a\nmid c \rightarrow a\nmid b \vee b\nmid c$

   Pembuktian :

   a|b berarti $\exists k\in Z \ni b=ka$

   a|(b+c) berarti $\exists l\in Z \ni (b+c)=la$

   Sehingga (b+c)-b=c

   c=a.(kl) dengan kl anggota himpunan bilangan bulat

   maka a|c (Terbukti benar)

3. jika a<b maka 1/a > 1/b dengan a dan b > 0

Simbol

∀a,b a,b ∈ Z+, a < b → 1/a > 1/b

Negasi

∃a,b a,b ∈ Z+, a < b Λ 1/a < 1/b

Kontraposisi

∀a,b a,b ∈ Z+, 1/a < 1/b → a > b

Pembuktian :

b = a + n

a < a+n

1/a > a/(a+n)

1(a+n)/a (a+n) > 1(a)/a+n(a)

a+n/a^2+an > a/a^2+an

Terbukti benar

4. Jika a | $(b^2 - 1)$ maka a | $(b^4 - 1)$ untuk semua bilangan bulat.

Simbol

$$\forall a, b \;\; a, b \;\in \mathbb{Z} \;\; a|\;(b^2 - 1) \;\rightarrow a|(b^4 - 1)$$

Negasi

$$\exists a, b \;\; a, b \;\in \mathbb{Z} \;\; a|\;(b^2 - 1) \;\Lambda \;\; \nmid (b^4 - 1)$$

Kontraposisi

$$\forall a, b \; a, b \in \mathbb{Z} \;\; a \nmid (b^4 - 1) \;\rightarrow a \nmid (b^2 - 1)$$

Pembuktian :

$$\forall a, b \; a, b \in \mathbb{Z} \; a|\;(b^2 - 1) \rightarrow a|(b^4 - 1)$$

Ambil sembarang $a, b \in \mathbb{Z} \quad a|(b^2 - 1)$ adt $a|(b^4 - 1)$

Tulis $a|(b^2 - 1) \Rightarrow b^2 - 1 = a.k, \exists k \in \mathbb{Z} \ldots\ldots(i)$

adt $a|(b^4 - 1) \Rightarrow b^4 - 1 = a.l, \exists l \in \mathbb{Z}$

Pada persamaan (i), semua ruas dikalikan dengan $b^2 + 1$, diperoleh :

$$(b^2 - 1)(b^2 + 1) = ak(b^2 + 1)$$

$$b^4 - 1 = a\{k(b^2 + 1)\}$$

Pilih $l = \{k(b^2 + 1)\}$

$$b^4 - 1 = a.l, \exists l \in \mathbb{Z}$$

$\therefore a|(b^4 - 1)$ terbukti benar.

5. Jika $a|c$ dan $b|$c dengan (a,b) = 1 maka $ab|c$

Simbol

$\forall a, b, c \quad a, b, c \in \mathbb{Z}\ a, b \neq 0\ \ a|c \land\ |c \land\ (a, b) = 1 \to ab|c$

Negasi

$\exists a, b, c\ a, b, c \in \mathbb{Z}\ \ a, b\ \neq 0\ \ a|c \land\ |c \land\ (a, b) = 1 \land\ ab \nmid c$

Kontraposisi

$\forall a, b, c\ \ a, b, c \in \mathbb{Z}\quad a, b \neq 0\quad ab \nmid c \to a \nmid c \lor b \nmid c \lor (a, b) \neq 1$

Pembuktian :

$\forall a, b, c \quad a, b, c \in \mathbb{Z}\ a, b \neq 0\ \ a|c \land\ |c \land\ (a, b) = 1 \to ab|c$

Ambil sembarang $a, b, c \in \mathbb{Z}\ a, b \neq 0\ \ a|c \land\ |c \land\ (a, b) = 1$ adt $ab|c$

$a|c \Rightarrow c = a.m, \exists m \in \mathbb{Z}$ ….(i)

$b|c \Rightarrow c = b.n, \exists n \in \mathbb{Z}$….(ii)

$(a, b) = 1, \exists x, y \in \mathbb{Z} \ni ax + by = 1$

Kedua ruas dikalikan c sehingga $acx + bcy = c$….(iii)

Adt $ab|c \Rightarrow c = ab.l, \exists l \in \mathbb{Z}$

Subtitusi persamaan (i) dan (ii) ke persamaan (iii):

$abnx + abmy = c$

$ab(nx + my) = c$

Pilih $l = nx + my$

$c = ab.l, \exists l \in \mathbb{Z}$

$\therefore ab|c$ terbukti benar.

6. Jika $x > 1$ maka $x^2 > 1$ untuk semua x bilangan bulat.

Simbol

$\forall x, x \in \mathbb{Z}\ x > 1 \to x^2 > 1$

Negasi

$\exists x, x \in \mathbb{Z}\ x > 1 \land x^2 \leq 1$

Kontraposisi

$\forall x, x \in \mathbb{Z}\ x \leq 1 \to x^2 \leq 1$

Pembuktian :

$\forall x, x \in \mathbb{Z}\ x > 1 \to x^2 > 1$

Ambil sembarang $x \in \mathbb{Z}\ x > 1$ adt $x^2 > 1$

Tulis $x > 1 \Rightarrow x = 1 + k, \exists k \in \mathbb{Z}$ adt $^2 > 1 \Rightarrow x^2 = 1 + l, \exists l \in \mathbb{Z}$

$x = 1 + k, \exists k \in \mathbb{Z}$

$x^2 = (1 + k)^2$

$x^2 = 1 + 2k + k^2$

$x^2 = 1 + (2k + k^2)$

Pilih $l = 2k + k^2$

$x^2 = 1 + l, \exists l \in \mathbb{Z}$

$\therefore x^2 > 1$ terbukti benar

7. Jika a,b bilangan bulat, c bilangan bulat positif, a<b maka a×c < b×c

simbol

$\forall$ a,b $\in$ Z, c $\in$ Z+, a<b → a×c < b×c

Negasi

$\exists$ a,b $\in$ Z, c $\in$ Z+, a<b $\wedge$ a×c ≥ b×c

Kontraposisi

$\forall$ a,b $\in$ Z, c $\in$ Z+, a×c ≥ b×c → a≥b

Pembuktian :

a<b → a+k=b, $\exists$k $\in$ Z+

akan dibuktikan a×c < b×c

(a+k) ×c = b×c

(a×c)+(k×c)=b×c

(k×c) $\in$ Z+

Maka a×c < b×c

Pernyataan terbukti benar.

8. (missal a,b,m adalah bilangan bulat)

Jika a membagi b maka a membagi mb

Simbol

$\forall a \; \forall b \; \forall m \;\; a,b,m \in Z$, $a|b \rightarrow a|mb$

Negasi

$\exists a \; \exists b \; \exists m \;\; a,b,m \in Z$, $a|b \wedge a\nmid mb$

Kontraposisi

$\forall a \; \forall b \; \forall m \;\; a,b,m \in Z$, $a\nmid mb \rightarrow a\nmid b$

Pembuktian :

$\forall a\ \forall b\ \forall m\ a,b,m \in Z$

$a|b \rightarrow \exists k\ ,\ k \in Z \ni b = ak$

diperoleh :

$b = ak$

$bm = akm$

$bm = a(km),\ km \in Z$

jadi terbukti bahwa $\forall a\ \forall b\ \forall m\ a,b,m \in Z\ ,\ a|b \rightarrow a|mb$

9. (missal a,b, dan c adalah sisi-sisi dari sebuah segitiga)

   Jika $a^2 + b^2 = c^2$ maka segitiga itu adalah segitiga siku-siku

   Dari pernyataan diperoleh

   P : $a^2 + b^2 = c^2$

   Q : segitiga itu adalah segitiga siku-siku

   Untuk pernyataan q juga memiliki arti bahwa salah satu sudut segitiga bernilai 90°

   Simbol

   $\forall a\ \forall b\ \forall c \in \mathbb{R}^+,\ a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow \exists x,\ x = 90°$

   Negasi

   $\exists a\ \exists b\ \exists c \in \mathbb{R}^+,\ a^2 + b^2 = c^2 \wedge \forall x,\ x \neq 90°$

   Kontraposisi

   $\forall a\ \forall b\ \forall c \in \mathbb{R}^+,\ \forall x,\ x \neq 90° \rightarrow a^2 + b^2 \neq c^2$

   Pembuktian :

   Akan dibuktikan menggunakan pernyataan kontraposisinya yaitu :

   jika segitiga bukan siku-siku maka $a^2 + b^2 \neq c^2$

   karena diketahui segitiga bukan siku siku maka tidak berlaku rumus Phytaghoras ($a^2 + b^2 = c^2$) sehingga pernyataan kontraposisi bernilai benar. Pernyataan kontraposisi ekuivalen dengan pernyataan awal sehingga pernyataan awal juga bernilai benar.

10. Jika x dan y bilangan rasional sembarang maka x + y adalah bilangan rasional

    Simbol

    $\forall x,\ x \in \mathbb{Q}\ \ \forall y,\ y \in \mathbb{Q} \rightarrow x+y \in \mathbb{Q}$

    Negasi

    $\exists x,\ x \in \mathbb{Q}\ \exists y,\ y \in \mathbb{Q}\ \wedge x + y \notin \mathbb{Q}$

Kontraposisi

$\forall x\ \forall y,\ x+y \not\in \mathbb{Q} \rightarrow x \not\in \mathbb{Q}\ y \not\in \mathbb{Q}$

Pembuktian :

Ambil sebarang $x,y \in \mathbb{Q}$

Missal : $x = \frac{a}{b}$ dan $y = \frac{c}{d}$, $\forall a\ \forall b\ \forall c\ \forall d \in Z$

$x+y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

$= \frac{ad+cb}{bd}$, $a,b,c,d \in Z$

Jadi $\forall x \in \mathbb{Q}\ \forall y \in \mathbb{Q} \rightarrow x+y \in \mathbb{Q}$ benar

11. " Untuk semua X, $X^2 > 0$ " (Pernyataan bernilai salah)

Maka agar pernyataan menjadi benar, maka dapat diubah menjadi

" Tidak semua X, $X^2 > 0$ " (Pernyataan bernilai benar)

Oleh karena terdapat X kuadrat yang nilainya sama dengan 0, maka pernyataan tersebut dapat ditulis juga menjadi

" Semua X, $X \in R$, $X^2 \geq 0$ "

Simbol

$\forall X, X \in R \rightarrow X^2 \geq 0$

Negasi

$\exists X, X \in R \wedge X^2 < 0$

Kontraposisi

$\forall X^2 < 0 \rightarrow X \notin R$

Pembuktian :

"Semua X, $X \in R$, $X^2 \geq 0$ "

$\forall X, X \in R \rightarrow X^2 \geq 0$

Jawab :

Ambil sebarang X yang memenuhi. Namun untuk menyangkal pernyataan pertama yang salah, maka kita buktian bahwa ada X^2 yang hasilnya sama dengan 0 dengan cara memilih X = 0.

Misal X = 0

$X = n_0 \ni n_0 \in R$

$X^2 = l_0 \ni l_0 \in R$

$X^2 = (n_0)^2$

$= n_0(n_0)$

Pilih $l_0 = n_0$

$X^2 = l_0 (n_0)$

$= l_0 (X)$

$= l_0 \times 0$

$X^2 = 0$

Dengan demikian terbukti ada X^2 yang hasilnya = 0. Sehingga terbukti bahwa pernyataan " Untuk semua X, $X^2 > 0$ " bernilai salah. Sedangkan pernyataan " Semua X, $X \in R$, $X^2 \geq 0$ bernilai benar.

12. Untuk semua X, $X < 0 \rightarrow X^2 > 0$

Simbol

$\forall X, X \in R, X < 0 \rightarrow X^2 > 0$

Negasi

$\exists X, X \in R, X < 0 \wedge X^2 \leq 0$

Kontraposisi

$\forall X, X \in R, X^2 \leq 0 \rightarrow X > 0$

Pembuktian :

" Untuk semua X, $X < 0 \rightarrow X^2 > 0$ "

$\forall X, X \in R, X < 0 \rightarrow X^2 > 0$

Ambil sebarang $X < 0$

$X = -(n_0) \;\exists\; n_0 \in R$

$X^2 = l_0 \;\exists\; l_0 \in R$

$X^2 = (-(n_0))^2$

$X^2 = -(n_0) \times -(n_0)$

Pilih $l_0 = (-(n_0) \times -(n_0))$

$X^2 = l_0$

Jadi $X^2 \in R$ positif yang hasilnya lebih dari 0 karena dipilih X tidak sama dengan 0.

13. Untuk setiap X, terdapat sebuah Y sedemikian rupa sehingga Y > X

Simbol

$\forall X, X \in R \;\exists\; Y, Y \in R \;\exists\; Y > X$

Negasi

$\exists X, X \in R \;\forall\; Y, Y \in R \;\exists\; Y \leq X$

Pembuktian :

" Untuk setiap X, terdapat sebuah Y sedemikian rupa sehingga Y > X "

$\forall X, X \in R \ni Y, Y \in R \ni Y > X$

Ambil sebarang $X < Y$

$X \in R$

$X = n_0 \ni n_0 \in R$

$Y = l_0 + a \ni l_0 , a \in R$

(a merupakan bilangan positif pembuat selisih X dan Y karena akan dipilih $l_0 = n_0$)

Pilih $l_0 = n_0$

Maka $Y = n_0 + a$

$Y = X + a$

Jadi terbukti bahwa ada $Y > X$

Contoh :

Misalkan $X = 2$

Maka

$X = n_0 \ni n_0 \in R$

$n_0 = 2$

$Y = l_0 + a \ni l_0, a \in R$

(a merupakan bilangan positif)

Pilih $l_0 = n_0 = 2$

Maka $Y = n_0 + a$

$Y = 2 + a$

Jadi $Y > X$

14. ada bilangan bulat $a>b$ maka hasilnya $a^2>b^2$

Simbol

$\exists a,b,\ a,b \in Z,\ a>b \rightarrow a^2>b^2$

Negasi

$\forall a,b,\ a,b \in Z,\ a>b \rightarrow a^2 \leq b^2$

Kontraposisi

$\exists a,b\ a^2 \leq b^2 \rightarrow a,b \in Z,\ a \leq b$

Pembuktian :

Ambil sebarang $a,b \in Z$, $a>b$

Misal :

$a=-1$, $b=-2$

$a>b \rightarrow a^2>b^2$

$-1>-2 \quad (-1)^2>(-2)^2$

$1>4$ (Tidak memenuhi)

$a=2$, $b=1$

$a>b \rightarrow a^2>b^2$

$2>1 \quad 2^2>1^2$

$4>1$ (memenuhi)

Sehingga pernyataan $\exists a,b$, $a,b \in Z$, $a>b \rightarrow a^2>b^2$ bernilai benar

15. Ada x anggota bilangan real sehingga x+5=7

Simbol

$\exists x$, $x \in R$, $x+5=7$

Negasi

$\forall x$, $x \notin R$, $x+5=7$

Kontraposisi

$\exists x$, $x+5 \neq 7 \rightarrow x \notin R$

Pembuktian :

Karena ada $x \in R$, yaitu 2 sehingga $x+5=7$ menjadi $2+5=7$ bernilai benar, maka pernyataan $\exists x$ $x \in R$, $x+5=7$ bernilai benar

16. Ada bilangan bulat x yang memenuhi $x^2 -x -12=0$

Simbol

$\exists x$, $x \in Z \rightarrow x^2 -x -12=0$

Negasi

$\forall x$, $x \in Z \rightarrow x^2 -x -12 \neq 0$

Kontraposisi

$\exists x$, $x^2 -x -12 \neq 0 \rightarrow x \notin Z$

Pembuktian :

Menemukan nilai x

$x^2 - x - 12 = 0$

$(x+3)(x-4) = 0$

$x = -3 \vee x = 4$

Dipilih x=4

Diperoleh

$x^2 - x - 12 = 4^2 - 4 - 12 = 0$ (Memenuhi)

Dipilih x=5

$x^2 - x - 12 = 5^2 - 5 - 12 \neq 0$ (Tidak memenuhi)

Sehingga pernyataan $\exists x,\ x \in Z \rightarrow x^2 - x - 12 = 0$ bernilai benar

17. Untuk setiap x anggota bilangan asli, berlaku $x + 3 > 0$

Simbol

$\forall x, x \in N \rightarrow x + 3 > 0$

Negasi

$\exists\ x, x \in N, x + 3 \leq 0$

Kontraposisi

$\forall x, x + 3 \leq 0 \rightarrow x \notin N$

Bukti

Pernyataan tersebut bernilai benar

x diganti dengan setiap anggota bilangan asli

N = {1,2,3,...} maka hasilnya akan selalu lebih dari nol

x = 1, maka 1 + 3 = 4, dan 4 > 0 (memenuhi)

x = 2, maka 2 + 3 = 5, dan 5 > 0 (memenuhi)

x = 3, maka 3 + 3 = 6, dan 6 > 0 (memenuhi)

dst

18. Ada x anggota bilangan asli memenuhi $x^2 - 5x + 6 = 0$

Simbol

$\exists\ x, x \in A, x^2 - 5x + 6 = 0$

Negasi

$\forall x, x \notin A, x^2 - 5x + 6 = 0$

Kontraposisi

$\exists$ x, $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \rightarrow x \notin A$

Bukti

Pernyataan tersebut bernilai benar

x = 1, maka $1^2 - 5.1 + 6 = 1 - 5 + 6 = 2 \neq 0$ (tidak memenuhi)

x = 2, maka $2^2 - 5.2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$ (memenuhi)

x = 3, maka $3^2 - 5.3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$ (memenuhi)

19. Setiap n anggota bilangan bulat bulat memenuhi $2^n - 1$ merupakan bilangan prima

Simbol

$\forall$ n, $n \in B \rightarrow 2^n - 1 \in P$

Negasi

$\exists$ n, $n \in B \wedge 2 - 1 \notin P$

Kontraposisi

$\forall$ n, $2^n - 1 \notin P \rightarrow n \notin B$

Bukti

Pernyataan tersebut bernilai salah

n = 0, maka $2^0 - 1 = 1 - 1 = 1$ (buka prima, tidak memenuhi)

n = 1, maka $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$ (buka prima, tidak memenuhi)

n = 2, maka $2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ (prima, memenuhi)

n = 3, maka $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ (prima, memenuhi)

dst

BAB III
PENUTUP

A. Kesimpulan

Sebuah pernyataan matematika dapat dibuktikan dengan menggunakan logika matematika. Pernyataan matematika juga dapat diubah bentuknya seperti bentuk negasi, kontraposisi dan bentuk yang ekuivalen lainnya dari pernyataan awal dan tentu saja dalam melakukan perubahan ini harus memperhatikan kaidah yang ada. Dalam logika matematika, untuk mengganti suatu statemen-statemen yang spesifik, kita akan menggunakn simbol-simbol untuk menyajikan sebarang statemen tersebut agar lebih ringkas dan hasilnya dapat digunakan dalam banyak kasus yang serupa.

B. Saran

Kami sebagai penulis mengharapkan pembaca dapat memahami dengan baik materi yang telah kami sampaikan. Kami menyadari bahwa penyusunan makalah ini masih banyak kesalahan-kesalahan. Oleh karena itu diharapkan para pembaca bisa memberikan kritik dan sarannya agar kami bisa membuat makalah dengan lebih baik lagi.