PERTEMUAN 2

Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

1. Menentukan penyelesaian pertidaksamaan
2. Menjelaskan pengertian nilai mutlak
3. Menyebutkan sifat-sifat nilai mutlak
4. Menentukan penyelesaian pertidaksamaan yang memuat nilai mutlak

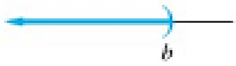
Materi Ajar

Pertidaksamaan dan Nilai Mutlak

Menyelesaikan pertidaksamaan berarti mencari himpunan dari semua bilangan riil yang menyebabkan pertidaksamaan menjadi kesamaan yang bernilai benar. Umumnya penyelesaian pertidaksamaan adalah berupa semua bilangan pada suatu interval atau gabungan dari interval-interval.

Interval

Himpunan bagian tertentu dari himpunan bilangan riil yang disebut selang sering muncul dalam Kalkulus. Secara geometris ini berkaitan dengan ruas garis pada garis riil. Perhatikan tabel berikut :

Notasi Himpunan	Notasi Selang	Grafik
$\{x : a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x : a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x : a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x : a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
$\{x : x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x : x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x : x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x : x > a\}$	(a, ∞)	
$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	

Simbol ∞ pada notasi di atas bukan mewakili sebuah bilangan. (a,∞) berarti himpunan semua bilangan yang lebih dari a. Secara geometris selang ini membentang mulai dari titik a tak berhingga jauhnya ke kanan dalam arah positif. Analog untuk $[a,\infty)$, (∞,b), $(\infty,b]$ dan (∞,∞).

Menyelesaikan Pertidaksamaan

Prosedur menyelesaikan pertidaksamaan terdiri dari langkah-langkah mengubah pertidaksamaan hingga penyelesaiannya terlihat dengan jelas. Dengan menggunakan sifat urutan pada bilangan riil, kita dapat melakukan operasi tertentu pada kedua ruas pertidaksamaan tanpa mengubah himpunan penyelesaian. Kita dapat menambahkan kedua ruas dengan bilangan yang sama, mengalikan kedua ruas dengan bilangan positif yang sama dan mengalikan kedua ruas dengan bilangan negatif yang sama tapi kita harus membalik tanda ketidaksamaan.

<u>Soal</u> :

Cari penyelesaian pertidaksamaan berikut, nyatakan penyelesaiannya dalam selang serta ilustrasikan pada garis bilangan riil

1. $1+x<7x+5$
2. $4\le 3x-1\le 13$
3. $4x^2-5x-6<0$
4. $x^3+3x^2\ge 4x$
5. $\dfrac{x-2}{x+4}<2$
6. $(2x-3)(3x-1)(x-2)<0$
7. $(2x-3)(x-1)^2(x-3)\ge 0$

Nilai Mutlak

Definisi

Nilai mutlak suatu bilangan riil x dinyatakan dengan $|x|$ didefinisikan sebagai

$$|x|=\begin{cases} x & \text{jika} \quad x\ge 0 \\ -x & \text{jika} \quad x<0 \end{cases}$$

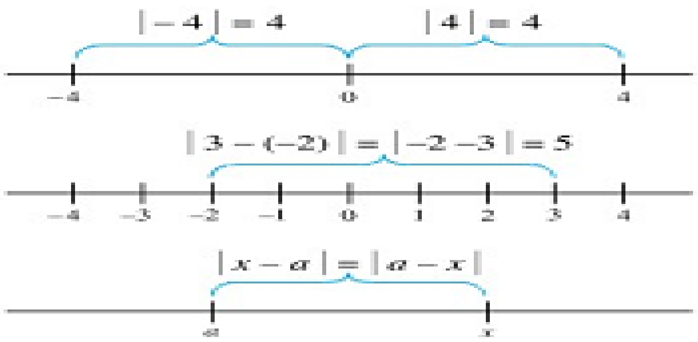
Dari definisi tersebut terlihat bahwa $|x|\ge 0$ untuk semua $x\in R$. Sebagai contoh $|3|=3$, $|-3|=3$, $|0|=0$, $|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$ dan $|3-\pi|=\pi-3$.

Soal :

Nyatakan benar atau salah :

a. $|-x| = x, \forall x \in R$ b. $|-x| = |x|, \forall x \in R$

Salah satu cara terbaik untuk membayangkan nilai mutlak secara geometris adalah sebagai jarak (tak berarah), yakni $|x|$ adalah jarak antara x dengan titik asal dan secara umum $|x-a|$ adalah jarak antara x dengan a. Perhatikan ilustrasi berikut :



Soal :

Ubahlah $2|x| + |x+1|$ ke dalam bentuk yang tidak memuat nilai mutlak

Setiap bilangan positif mempunyai dua akar kuadrat. Misalnya, akar kuadrat dari 16 adalah -4 dan 4. Untuk $x \geq 0$ lambang $\sqrt{x}$ disebut akar kuadrat utama dari x, yang menunjukkan akar kuadrat tak negatif dari x. Dengan menggunakan nilai mutlak kita punyai

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Dua akar kuadrat dari 5 adalah $\pm\sqrt{5}$ dan tidak benar mengatakan $\sqrt{25} = \pm 5$

Sifat-sifat Nilai Mutlak

Untuk sebarang bilangan riil a, b berlaku sifat-sifat berikut :

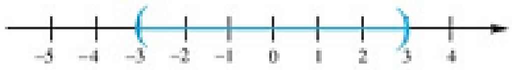
1. $|ab| = |a||b|$
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Ketaksamaan segitiga)
4. $|a-b| \geq |a| - |b|$

Soal :

1. Buktikan bahwa $x^2 = |x|^2$
2. Tunjukkan bahwa jika $|x| \leq 2$ maka $\left|\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}\right| \leq 15$

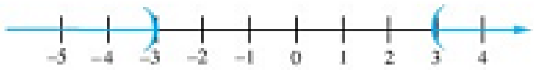
Pertidaksamaan yang Melibatkan Nilai Mutlak

Dengan memandang nilai mutlak sebagai jarak berarah, maka penyelesaian dari pertidaksamaan $|x| < 3$ dapat dilihat pada garis riil sebagai semua titik yang jaraknya terhadap titik asal kurang dari 3, seperti yang diilustrasikan berikut ini



$|x| < 3$

Di sisi lain penyelesaian dari pertidaksamaan $|x| > 3$, adalah semua titik yang jaraknya terhadap titik asal lebih dari 3,



$|x| > 3$

Secara umum nantinya dapat ditunjukkan bahwa jika $a > 0$, akan berlaku

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$
$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \quad \text{or} \quad x > a$$

Fakta tersebut dapat digunakan untuk menyelesaikan pertidaksamaan yang melibatkan nilai mutlak.

<u>Soal</u> :

Selesaikan pertidaksamaan-pertidaksamaan berikut :

a. $|x+2| < 1$ b. $\left|\frac{x}{2}+7\right| \geq 2$ c. $\left|\frac{5}{x}+2\right| > 1$ d. $|3x-1| < 2|x+6|$

TUGAS 2

1. Dalam sistem koordinat yang sama buat grafik kurva $y = |x-3|$ dan $y = |x-1|$ dengan menggunakan geogebra. Gunakan grafik tersebut untuk menentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|x-3| < |x-1|$
2. Tentukan himpunan jawab (secara analitik) pertidaksamaan berikut dalam bentuk selang dan notasi pembentuk himpunan kemudian ilustrasikan pada garis riil

   a. $|x-1| + |x| < |x+1|$ b. $|x-2| \leq x|x|$