MAKALAH ALJABAR LINEAR

"VEKTOR DI RUANG DUA"

Sebagai Tugas UAS Mata Kuliah Aljabar Linear

Disusun oleh:

Kelompok 2

1. Muhammad Baharuddin Daeng SiTaba (K1317050)
2. GenovevaYashinta D (K1320037)
3. Rahmawati ` (K1320060)

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SEBELAS MARET
SURAKARTA

2021

DAFTAR ISI

Cover.....1

Daftar isi.....2

Abstrak.....3

BAB 1 : PENDAHULUAN.....4

Latar Belakang.....4

Rumusan Masalah.....5

Tujuan.....5

Manfaat.....5

BAB 2 : PEMBAHASAN.....6

- **A. Jenis Vektor.....6**
- **B. Pengertian Vektor di Ruang Dua.....6**
- **C. Notasi Vektor.....7**
- **D. Panjang Vektor.....7**
- **E. Operasi Vektor di Ruang Dua.....8**
- **F. Sudut antara Dua Vektor.....11**
- **G. Contoh.....11**

BAB 3 : PENUTUP.....13

- **A. Kesimpulan.....13**
- **B. Saran.....13**

Daftar Pustaka.....14

ABSTRAK

Kuantitas-kuantitas fisik seperti luas, panjang, massa, dan suhu telah terdefinisi dengan lengkap apabila besar kuantitasnya diberikan. Kuantitas-kuantitas semacam ini disebut skalar (Scalar). Kuantitas fisik lainya berjumlah terdefinisi dengan lengkap apabila besar dan arahnya belum ditentukan. Kuantitas-kuantitas semacam ini disebut vektor (vector).

Vektor dapat dinyatakan secara geometric sebagai ruas garis terarah atau anak panah pada ruang berdimensi 2 atau ruang berdimensi 3. Arah anak panah menunjukkan vektor, sementara panjang anak panah menggambarkan besaranya. Ekor anak panah disebut titik awal (initial point) dari vektor, dan ujung anak panah adalah titik akhir (terminal point). Secara simbolis, kita menyatakan vector dengan huruf kecil tebal (misalnya a, k, v, w, dan x). Saat kita membahas vektor, kita menyebut bilangan-bilangan sebagai skalar.

Vektor di ruang dua adalah vektor-vektor yang terletak pada bidang datar yang memiliki besar dan arah tertentu. Suatu vektor di ruang dua yang diwakili oleh ruas garis berarah dapat digambarkan pada bidang kartesius yang dapat dinyatakan dengan matriks garis atau matriks kolom yang merupakan komponen-komponen vektor, yaitu (x, y) atau $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dengan x sebagai komponen horizontal, dan y sebagai komponen vertikal.

Jenis-jenis vector yaitu beberapa diantaranya vector posisi, vector nol, vector satuan, dan vektor basis. Dua vector atau lebih akan dikatakan sama jika memiliki besaran dan arah yang sama. Dua vector atau lebih akan dikatakan berlawanan jika memiliki besar yang sama, tetapi arahnya berlawanan. Operasi pada vector yaitu ada penjumlahan, pengurangan, perkalian vektor di ruang dua dengan skalar, dan perkalian scalar dua vektor di ruang dua.

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Kuantitas-kuantitasfisiksepertiluas, panjang, massa, dan suhu telah terdefinisi dengan lengkap apabila besar kuantitasnya diberikan. Kuantitas-kuantitas semacam ini disebut skalar (Scalar). Kuantitas fisik lainya berjumlah terdefinisi dengan lengkap apabila besar danarahnya belum ditentukan. Kuantitas-kuantitas semacam ini disebut vektor (vector). Sebagai contoh, pergerakan angina biasanya digambarkan dengan memberikan kecepatan dan arah, misalnya 20 mil per jam timur laut. Kecepatan angina dan arah angina membentuk vektor yang disebut kecepatan (velocity) angin. Contoh lain adalah gaya (force) dan pergeseran (displacement).

Vektor dapat dinyatakan secara geometric sebagai ruas garis terarah atau anak panah pada ruang berdimensi 2 atau ruang berdimensi 3. Arah anak panah menunjukkan vektor, sementara panjang anak panah menggambarkan besaranya. Ekor anak panah disebut titik awal (initial point) dari vektor, dan ujung anak panah adalah titik akhir (terminal point). Secara simbolis, kita menyatakan vector dengan huruf kecil tebal (misalnya a, k, v, w, dan x). Saat kita membahas vektor, kita menyebut bilangan-bilangan sebagai skalar.

Jika v dan w adalah dua vector sebarang, maka sum (jumlah) v + w adalah vektor yang ditentukan sebagai berikut : tempatkan vektor w sedemikian rupa sehingga titik awalnya berhimpitan dengan titik akhir v. vektor v + w diwakili oleh anak panah dari titik awal v hingga titik akhir w. Lalu selain penjumlahan juga terdapat konsep selisih dan hasil kali (product). Dari semua yang telah penulis sampaikan, penulis terdorong untuk menguraikan dan memaparkan mengenai materi vektorpada R^2. Bertolak dari tujuan tersebut maka penulis membuat makalah ini yang berjudul **“ MakalahVektor pada R^2”**

Kita akan mengenal lebih jauh tentang jenis-jenis vector secara umum, pengertian vektor di R^2, notasinya, panjangnya, laluoperasinya (Penjumlahan, pengurangan, perkalian vektor di R^2dengan skalar, perkalian scalar dua vektor di R^2), lalu sudut dua vektornya, lalu contoh soal penyelesainya.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, maka permasalahan dalam tulisan ini adalah :

1. Bagaimana materi jenis-jenis vektor secara umum?
2. Menjabarkan tentang apa itu pengertian vektor di ruang dua (R^2) ?
3. Menjabarkan notasi vektor di ruang dua (R^2)?
4. Menjabarkan panjang vektor
5. Menjabarkan tentang apa itu Operasi vektor di ruang dua (Penjumlahan, pengurangan, perkalian vektor di R^2 dengan skalar, perkalian scalar dua vektor di R^2) ?
6. Menjabarkan sudut dua vektor
7. Bagaimana cara menyelesaikan soal yang berkaitan dengan masing-masing operasi (Penjumlahan, pengurangan, perkalian vektor) ?

C. Tujuan

Berdasarkan perumusan masalah di atas, tujuan yang ingin dicapai dari penyusunan makalah ini adalah sebagai berikut :

1. Untuk menguraikan materi jenis-jenis vector secara umum.
2. Untuk menjabarkan tentang apa itu notasi vektor di ruang dua (R^2.)
3. Untuk menjabarkan notasi vektor di ruang dua (R^2.)
4. Untuk menjabarkan panjang vektor
5. Untuk menjabarkan tentang apa itu operator linier pada R^2 dan R^3..
6. Untuk menjabarkan sudut dua vektor
7. Untuk memaparkan penerapan operator linear (refleksi, proyeksi, danrotasi) yang digunakan untuk memecahkan solusi dari suatu permasalahan.

D. Manfaat

Adapun manfaat dari penyusunan makalah ini adalah sebagai berikut :

1. Memberikan pengetahuan kepada pembaca mengenai jenis-jenis vector secara umum.
2. Memberikan penjabaran tentang apa itu notasi vektor di ruang dua (R^2.)
3. Memberikan penjelasan tentang apa itu notasi, panjang dan operator linier pada vektor di R^2
4. Memberikan penjabaran tentang sudut dua vektor.
5. Memberikan contoh penyelesaian masalah tentang penerapan operator vektor di R^2.

BAB II

PEMBAHASAN

A. Jenis-Jenis Vektor

Ada beberapa jenis vektor khusus yaitu:

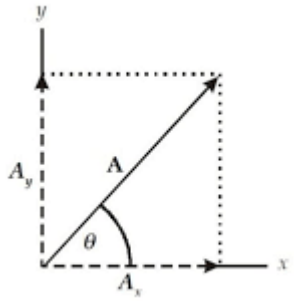
1. Vektor Posisi
   Suatu vektor yang posisi titik awalnya di titik 0 (0,0) dan titik ujungnya di A (a_1, a_2)

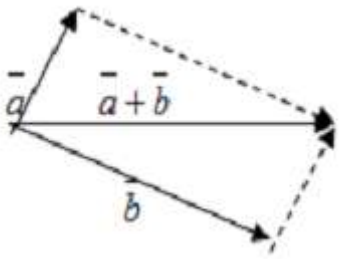
2. Vektor Nol
   Suatu vektor yang panjangnya nol dan dinotasikan $\bar{0}$. Vektor nol tidak memiliki arah vektor yang jelas.

3. Vektor satuan
   Suatu vektor yang panjangnya satu satuan. Vektor satuan dari adalah: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

4. Vektor basis
   Vektor basis merupakan vektor satuan yang saling tegak lurus. Dalam vektor ruang dua dimensi (R^2) memiliki dua vektor basis yaitu $\bar{l} = (1, 0)$ dan $\bar{j} = (0, 1)$. Sedangkan dalam tiga dimensi (R^3) memiliki tiga vektor basis yaitu $\bar{I} = (1, 0, 0)$, $\bar{J} = (0, 1, 0)$, dan $\bar{K} = (0, 0, 1)$.

B. Pengertian Vektor di Ruang Dua





Vektor merupakan sebuah besaran yang memiliki arah. Vektor digambarkan sebagai panah dengan yang menunjukan arah vektor dan panjang garisnya disebut besar vektor. Dalam penulisannya, jika vektor berawal dari titik A dan berakhir di titik B bisa ditulis dengan sebuah huruf kecil yang diatasnya ada tanda garis/ panah seperti $\vec{v}$ atau $\bar{v}$ atau juga:

$\vec{AB}$

Misalkan v suatu vektor pada bidang, titik awal v diletakkan pada pusat sistem koordinat, dan titik ujung v terletak pada koordinat (v1, v2), maka (v1, v2) dinamakan komponen dari v. Dalam hal ini ditulis v = (v1, v2). Secara geometri v1 menyatakan komponen pada sumbu x dan v2 menyatakan komponen pada sumbu y.

Jika v = (v1, v2) dan w = (w1, w2) adalah vektor-vektor pada bidang (R2), maka v ekivalen dengan w jika dan hanya jika v1 = w1 dan v2 = w2 .

C. Notasi Vektor

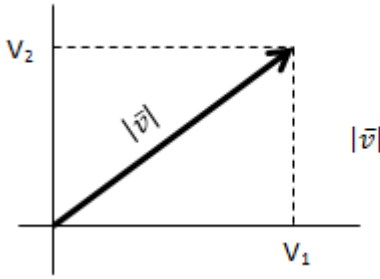
Notasi vektor biasanya dengan menggunakan tanda anak panah di atasnya atau bisa juga dengan menggunakan huruf kecil yang tebal. Suatu vektor biasanya juga bisa dinyatakan dengan pasangan terurut bilangan real atau bisa juga dengan menggunakan matriks kolom. Misalnya :

$$\vec{a} = (2,3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Maksudnya vektor tersebut 2 ke arah kanan dan 3 ke arah atas.

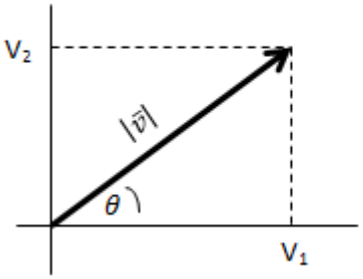
D. Panjang Vektor

Panjang segmen garis yang menyatakan vektor $\bar{v}$ atau dinotasikan sebagai $|\bar{v}|$ Panjang vektor sebagai:



$$|\bar{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$$

Panjang vektor tersebut dapat dikaitkan dengan sudut θ yang dibentuk oleh vektor dan sumbu x. positif.



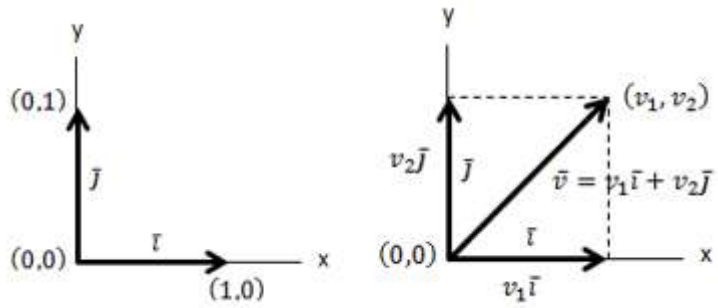
$$\cos\theta = \frac{v_1}{|\bar{v}|} \rightarrow v_1 = |\bar{v}|\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{v_2}{|\bar{v}|} \rightarrow v_2 = |\bar{v}|\,\text{in}\,\theta$$

$$\tan\theta = \frac{v_2}{v_1} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

Vektor dapat disajikan sebagai kombinasi <u>linier</u> dari vektor basis $\bar{i} = \binom{1}{0}$ dan $\bar{j} = \binom{0}{1}$ berikut:

$\bar{v} = v_1\bar{i} + v_2\bar{j}$



Contoh:

Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, tentukan $|\vec{a}|$!

Pembahasan:

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$ satuan panjang.

E. Operasi Vektor di Ruang Dua

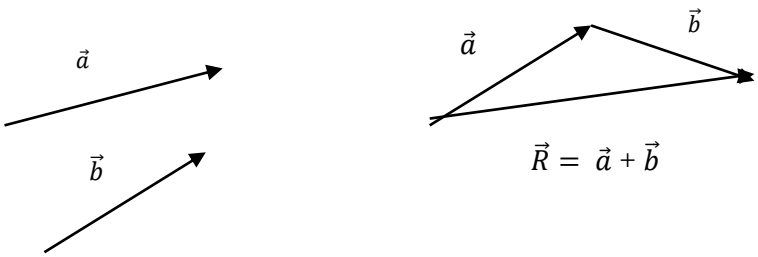
a. Penjumlahan vektor

1. Penjumlahan vektor secara geometri

   Penjumlahan dua buat vektor atau lebih geometri dapat dilakukan dengan dua cara yaitu dengan aturan segitiga, dan aturan jajar genjang.

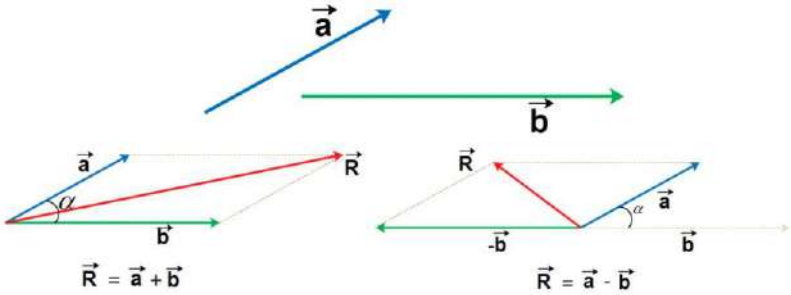
   i. Aturan segitiga

   Jika diketahui dua buah vektor misalnya vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ kita jumlahkan, maka kita akan mendapatkan resultan dari vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$.



ii. Aturan jajar genjang

Pada aturan jajar genjang vektor resultan diperoleh dengan mengimpikan titik pangkal kedua vektor yang dijumlahkan kemudian dibuat garis yang sejajar dengan kedua vektor sehingga membentuk sebuah jajar genjang.



2. Penjumlahan vektor secara aljabar

Misalkan vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$, maka penjumlahan kedua vektor tersebut dapat diperoleh dengan cara :

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

b. Pengurangan vektor

1. Pengurangan vektor secara geometri

Dua vektor berlawanan yaitu dua vektor yang mempunyai besar sama, tetapi arahnya berlawanan. Sebagai contoh, vektor $\overrightarrow{-a}$ merupakan lawan dari vektor $\vec{a}$ dan vektor $\overrightarrow{-b}$ merupakan lawan dari vektor $\vec{b}$. Sementara itu pada bilangan real berlaku hubungan a - b = a + (-b), dengan b merupakan invers tambah dari b.

Dari pengertian di atas jika diketahui dua buah vektor, misalnya vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$, maka $\vec{a} + \vec{b}$ artinya sama dengan $\vec{a} + (\overrightarrow{-b})$.

2. Pengurangan vektor secara aljabar

Misalkan vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{d} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$, maka pengurangan vektor $\vec{c}$ oleh vektor $\vec{d}$ dapat diperoleh dengan cara :

$$\vec{c} - \vec{d} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

c. Perkalian Vektor di Ruang Dua dengan Skalar

Perkalian skalar dengan vektor adalah perkalian antara suatu bilangan real dengan vektor. Misalkan k adalah suatu skala (bilangan real) dan $\vec{v}$ adalah suatu vektor. Hasil kali skalar k dengan vektor $\vec{v}$, ditulis sebagai $\vec{c} = k\vec{v}$, ditentukan sebagai :

Panjang vektor $\vec{v}$ sama dengan hasil kali $|k|$ dengan panjang vektor $\vec{v}$.

- Jika nilai k > 0, maka vektor $\vec{c}$ searah dengan vektor $\vec{v}$.
- Jika nilai k < 0, maka vektor $\vec{c}$ berlawanan arah dengan vektor $\vec{v}$.
- Jika nilai k = 0, maka vektor $\vec{c}$ adalah vektor identitas

Secara grafis perkalian ini dapat mengubah panjang vektor dan dapat dilihat pada tabel dibawah ini :

$\vec{v}$	k = 0,5	k = - 0,5	k = 2	k = - 2
$\vec{v}$	$0{,}5.\vec{v}$	$-0{,}5.\vec{v}$	$2.\vec{v}$	$-2.\vec{v}$

Secara aljabar perkalian vektor $\vec{v}$ dengan skalar k dapat dirumuskan :

$$k\vec{v} = \begin{pmatrix} kv_1 \\ kv_2 \end{pmatrix}$$

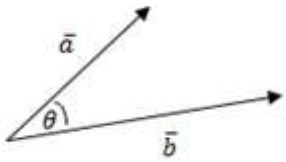
d. Perkalian Skalar Dua Vektor di Ruang Dua

Perkalian skalar dua vektor disebut juga sebagai hasil kali titik dua vektor dan ditulis $\vec{a}.\vec{b}$ (dibaca a dot b)

Perkalian skalar vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dilakukan dengan mengalikan panjang vektor $\vec{a}$ dan panjang vektor $\vec{b}$ dengan cosinus θ. Sudut θ merupakan sudut antara vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$.

Sehingga, $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta$

Dimana,



Perhatikan bahwa :

- Hasil kali titik dua vektor menghasilkan suatu skalar
- $\vec{a}.\vec{a} = (\vec{a}^2)$
- $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{b}) + (\vec{a}.\vec{c})$

F. Sudut Antara Dua Vektor

Misalkan vektor $\vec{a}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ adalah vektor-vektor dibidang yang dinyatakan dalam bentuk vektor kolom, sudut antara dua vektor di bidang adalah :

$$cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}, dengan\ \vec{a} \neq 0, dan\ \vec{b} \neq 0$$

G. Contoh

1) Misalkan vektor $\vec{a} = 4\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ dan vektor $\vec{b} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + k$. Jika panjang proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah 4. Maka tentukan nilai y.

   Jawab :

   Diketahui :

   $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

   $\vec{a}.\vec{b} = (4.2) + (2.y) + (0.1) = 8 + 2y$

   Ditanya : nilai y

   Dijawab :

   $\vec{c} = \left|\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|$

   $4 = \left|\frac{8+2y}{3}\right|$

   $12 = 8 + 2y$

   $\boldsymbol{y = 2}$

2) Diberikan dua buah vektor masing-masing a = 9, dan b = 4. Nilai cosinus sudut antara kedua vektor adalah 1/3. Tentukan :

- $|a + b|$
- $|a - b|$

   Jawab :

   - Penjumlahan dua buah vektor $|a + b|$

     $|a + b| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\ cos\alpha}$

     $|a + b| = \sqrt{9^2 + 4^2 + 2(9)(4)\ \frac{1}{3}}$

     $|a + b| = \sqrt{81 + 16 + 24}$

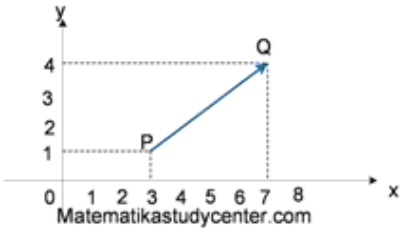
     $\boldsymbol{|a + b| = \sqrt{121} = 11}$

   - Pengurangan dua buah vektor $|a - b|$

     $|a - b| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\ cos\alpha}$

$$|a-b| = \sqrt{9^2 + 4^2 - 2(9)(4)\ \frac{1}{3}}$$
$$|a-b| = \sqrt{81 + 16 - 24}$$
$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| = \sqrt{\mathbf{73}}$$

3) Perhatikan gambar berikut! PQ adalah sebuah vektor dengan titik pangkal P dan titik ujung Q



- Nyatakan PQ dalam bentuk vektor kolom dan vektor satuan (i, j)
- Tentukan modulus atau panjang vektor PQ

Jawab :

Titik P(3,1)

Tititik Q(7,4)

- PQ dalam bentuk vektor kolom :

  PQ = $\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-3 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$

  PQ dalam bentuk vektor satuan :

  PQ = $\mathbf{4}\boldsymbol{i} + \mathbf{3}\boldsymbol{j}$
- Modulus atau panjang vektor PQ :

  $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4^2 + 3^2}$

  $|\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}}| = \sqrt{\mathbf{25}} = \mathbf{5}$

BAB III

PENUTUP

A. Kesimpulan

1. Vektor di ruang dua adalah vektor-vektor yang terletak pada bidang datar yang memiliki besar dan arah tertentu.
2. Suatu vektor di ruang dua yang diwakili oleh ruas garis berarah dapat digambarkan pada bidang kartesius yang dapat dinyatakan dengan matriks garis atau matriks kolom yang merupakan komponen-komponen vektor, yaitu (x, y) atau $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dengan x sebagai komponen horizontal, dan y sebagai komponen vertikal.
3. Jenis-jenis vektor yaitu beberapa diantaranya vektor posisi, vektor nol, vektor satuan, dan vektor basis.
4. Dua vektor atau lebih akan dikatakan sama jika memiliki besaran dan arah yang sama.
5. Dua vektor atau lebih akan dikatakan berlawanan jika memiliki besar yang sama, tetapi arahnya berlawanan.
6. Operasi pada vektor yaitu ada penjumlahan, pengurangan, perkalian vektor di ruang dua dengan skalar, dan perkalian skalar dua vektor di ruang dua.

B. Saran

Adapun saran yang dapat penulis berikan adalah perlunya pengaplikasian dari pengetahuan tentang vektor ini baik bagi pelajar maupun masyarakat luas untuk memudahkan pekerjaan manusia sehingga akan meningkatkan taraf hidup bangsa.

DAFTAR PUSTAKA

Ammariah. Hani. “Mempelajari Konsep Dasar Vektor”. https://www.ruangguru.com/blog/konsep-dasar-vektor, diakses pada 6 Desember 2021 pukul 12.00

Astawan, Made. “Pengertian Vektor dan Operasi Vektor Dua Dimensi”. https://www.ilmuhitung.com/pengertian-vektor-dan-operasi-vektor-dua-dimensi/, diakses pada 6 Desember 2021 pukul 10.00

Contoh123.2019.”Contoh Soal dan Pembahasan Vektor Terbaru dan Lengkap”. https://contoh123.info/materi-contoh-soal-dan-pembahasan-vektor-sma-kelas-12-tuntas/, diakses pada 3 Desember 2021 pukul 09.00.

Mulyanto, Adwin. “Vektor”. https://www.studiobelajar.com/vektor/, diakses pada 1 Desember 2021 pukul 18.00.

Scribd.”Pengertian Vektor di R2”. https://www.scribd.com/embeds/192004993/content?start_page=1&view_mode=scroll&access_key=key-fFexxf7r1bzEfWu3HKwf, diakses pada 1 Desember 2021 pukul 18.00.

https://inggarfipiana.files.wordpress.com/2018/10/7-ruang-vektor-R2-dan-R3-20hal.pdf