MAKALAH TUGAS PROYEK

PENYELESAIAN MAGIC SQUARE UKURAN 3X3 DENGAN MENGGUNAKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR (SPL)

MATA KULIAH ALJABAR LINEAR 1

Disusun oleh:

1. Arofah Adzarori N. (K1320011)
2. Khofifah Aluh S. (K1320046)
3. Lisa Rosamina (K1319042)
4. Wina Restu Amini (K1318080)

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SEBELAS MARET SURAKARTA

2021

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat-Nya berupa kesempatan untuk menyelesaikan makalah tugas proyek yang berjudul “PENYELESAIAN MAGIC SQUARE UKURAN 3X3 DENGAN MENGGUNAKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR (SPL)”. Makalah ini dibuat penulis untuk belajar dan memenuhi tugas proyek mata kuliah Aljabar Linear 1 sebelum Ujian Tengah Semester. Makalah ini dapat terselesaikan atas bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Maka dari itu ucapan terima kasih diberikan kepada:

1. Dosen pengampu mata kuliah Aljabar Linear 1 Bapak Drs. Ponco Sujatmiko, M.Si. yang telah berkenan membimbing dan mendidik dengan sabar hingga saat ini.
2. Bapak dan ibu kami yang selalu memberikan dukungan materi, dorongan, dan doa dalam menjalani pendidikan di Universitas Sebelas Maret Surakarta ini.
3. Teman-teman yang telah mendukung penyelesaian makalah ini.

Akhirnya, penulis menyadari bahwa makalah ini pasti belum sempurna. Kritik dan saran sangat diharapkan untuk perbaikan makalah kedepannya.

Surakarta, 15 Oktober 2021

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar Linear merupakan cabang ilmu di dalam matematika yang mencakup banyak hal, salah satunya adalah Sistem Persamaan Linear (SPL). Persamaan linear adalah suatu persamaan yang memiliki variabel berderajat (berpangkat) satu, sedangkan Sistem Persamaan Linear (SPL) adalah suatu sistem yang terdiri atas dua atau lebih persamaan linear. Persamaan Linear digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear, artinya digunakan untuk mencari himpunan penyelesaian atau semua penyelesaian sistem.

Salah satu contoh penerapan Sistem Persamaan Linear (SPL) dalam aljabar adalah matriks. Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks. Suatu matriks dinotasikan dengan huruf kapital. Sebuah matriks mempunyai ukuran yang disebut dengan ordo yang dinyatakan dalam jumlah baris (arah horizontal) dan kolom (arah vertikal) yang dimilikinya. Bentuk suatu matriks hampir serupa dengan bentuk umum dari Magic Square. Magic Square adalah susunan bilangan-bilangan asli dalam bentuk persegi yang terdiri dari baris dan kolom, sedemikian rupa sehingga jumlah semua bilangan-bilangan pada setiap baris, setiap kolom, dan setiap diagonal semuanya sama. Jumlah yang sama dari semua bilangan pada tiap baris, tiap kolom, dan tiap diagonal utama disebut konstanta ajaib dari Magic Square.

Dalam menentukan bilangan dalam *Magic Square*, dibutuhkan pemanfaatan operasi baris elementer dimana operasi baris elementer tersebut sangat berkaitan dengan Sistem Persamaan Linear. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji tentang cara penyelesaian masalah khususnya *Magic Square* berukuran 3x3 dengan menggunakan Sistem Persamaan Linear (SPL). Berdasarkan uraian dari latar belakang diatas, maka penulis mengambil judul tentang “PENYELESAIAN MAGIC SQUARE UKURAN 3X3 DENGAN MENGGUNAKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR (SPL)”.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana penyelesaian Magic Square berukuran 3x3 dengan menggunakan Sistem Persamaan Linear (SPL)?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Untuk mendapatkan penyelesaian Magic Square berukuran 3x3 dengan menggunakan Sistem Persamaan Linear (SPL).

1.4 Manfaat

Beberapa manfaat yang diharapkan diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Manfaat Teoritis

   Dengan adanya penelitian ini, diharapkan akan menambah wawasan dan pengetahuan mengenai matriks dan Sistem Persamaan Linear (SPL) serta pemahaman baru tentang pola Magic Square, mampu memanfaatkan matriks dan Sistem Persamaan Linear untuk menyelesaikan Magic Square dengan ordo 3x3, serta diharapkan mampu dijadikan sebagai salah satu sarana pengembangan ilmu perhitungan khususnya pada cabang Aljabar Linear yang secara teoritis dipelajari di bangku perkuliahan.

2. Manfaat Praktis

   Bagi penulis, makalah ini sebagai pemenuhan kewajiban salah satu tugas di mata kuliah Aljabar Linear serta dapat menjadi bahan acuan tambahan penulis dalam mempelajari mata kuliah Aljabar Linear di kemudian hari.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Sistem Persamaan Linear (SPL)

2.1.1 Persamaan Linear

Sebuah garis yang terletak pada bidang xy dapat dinyatakan secara aljabar dalam suatu persamaan berbentuk:

$$a_1x + a_2y = b$$

dimana a_1, a_2, dan b merupakan konstanta real, dan $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ Persamaan semacam ini disebut persamaan linear dengan variabel x dan y. Secara umum definisi persamaan linear dengan n variabel x_1, x_2, …, x_n sebagai persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

a_1, a_2,..., $a_n$dan b merupakan konstanta real. Variabel-variabel dari persamaan linear disebut sebagai faktor-faktor yang tidak diketahui.

2.1.2 Sistem Persamaan Linear

Sejumlah tertentu persamaan linear dalam variabel x_1, x_2, …, x_n disebut sistem persamaan linear. Urutan sejumlah bilangan s_1, s_2, …, s_n merupakan solusi dari sistem persamaan tersebut jika $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, …, $x_n = s_n$

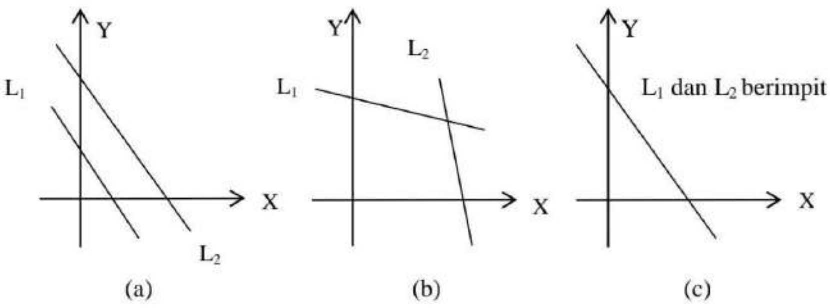
Suatu sistem persamaan yang tidak memiliki solusi disebut *tidak konsisten*, sedangkan jika terdapat paling tidak satu solusi dalam sistem disebut *konsisten.* Sistem persamaan linear yang memiliki solusi ada dua kemungkinan yaitu solusi tunggal atau tak hingga banyak solusi. Secara lebih jelas dapat dilihat pada sistem umum dari dua persamaan linear dengan variabel x dan y berikut:

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (a_1 \neq 0,\ b_1 \neq 0)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (a_2 \neq 0,\ b_2 \neq 0)$$

telah diketahui bahwa persamaan linear ax + by = c menyatakan grafik berupa garis pada bidang-xy. Jadi sistem tersebut dapat digambarkan sebagai dua garis L_1 dan L_2 pada bidang-xy.

Ada tiga kemungkinan kedudukan kedua garis tersebut. Seperti gambar berikut:



Tidak ada solusi   Tepat satu solusi   Tak hingga banyak solusi

Gambar 2.1 : Kemungkinan-kemungkinan kedudukan garis

Suatu sistem sebarang dari m persamaan linear dengan n faktor yang tidak diketahui dapat ditulis sebagai:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n= b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n= b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n= b_m$$

Dimana a dan b dengan subskrip merupakan konstanta real, x_1, x_2, …, x_n adalah faktor yang tidak diketahui.

2.1.3 Matriks yang Diperbesar

Suatu sistem sebarang dari m persamaan linear dengan n faktor yang tidak diketahui dapat disingkat dengan hanya menuliskan deretan bilangan dalam jajaran empat persegi panjang yang disebut sebagai matriks yang diperbesar.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

2.1.4 Operasi Baris Elementer

Suatu metode untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggantikan sistem yang ada dengan sistem yang baru yang memiliki himpunan solusi yang sama tapi penyelesaiannya lebih mudah. Sistem baru ini diperoleh dengan melakukan operasi baris elementer, yaitu:

1) Mengalikan persamaan dengan konstanta taknol.
2) Menukarkan posisi dua persamaan.
3) Menambahkan kelipatan satu persamaan ke persamaan lainnya.

Karena baris-baris dari matriks yang diperbesar bersesuaian dengan persamaan-persamaan dalam sisitem yang berkaitan, maka operasi tersebut pada matriks yang diperbesar, yaitu:

1) Mengalikan baris dengan konstanta taknol.
2) Menukarkan posisi dua baris.
3) Menambahkan kelipatan satu baris ke baris lainnya.

2.4.5 Eliminasi Gauss

Matriks dalam bentuk eselon baris tereduksi memiliki sifat-sifat berikut:

1) Jika satu baris tidak seluruhnya terdiri dari nol, msks bilsngsn tsknol pertama pada baris itu adalah 1 (1 utama).
2) Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka baris-baris ini akan dikelompokkan bersama pada bagian paling bawah dari matriks.
3) Jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi.
4) Setiap kolom yang memiliki 1 utama memiliki nol pada tempat lainnya.

Matriks yang memiliki tiga sifat pertama di atas disebut dalam bentuk eselon baris.

2.2 Matriks

2.2.1 Definisi

Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan (disebut *entri* dari matriks, yang mana *entri* ini merupakan anggota bilangan real).

Bentuk umum matriks:

$$\boldsymbol{A_{i\times j}} = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix} \\ \ \ \downarrow \\ \text{kolom} \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{baris} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

2.2.2 Kesamaan Matriks

Dua matriks dikatakan sama jika keduanya memiliki ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian sama.

2.2.3 Operasi Matriks

1) Penjumlahan dan Pengurangan

   Jika A dan B merupakan matriks yang mempunyai ukuran sama maka A+B adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada A dengan entri-entri pada B yang bersesuaian dan A-B adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada A dengan entri-entri pada B yang bersesuaian.

2) Perkalian Matriks dengan Suatu Skalar

   Jika A adalah matriks sebarang dan c adalah scalar sebarang, maka cA adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks A dengan bilangan c.

3) Perkalian Dua Matriks

   Jika A=$[a_{ij}]$ adalah matriks ukuran mxr dan B=$[b_{ij}]$ adalah matriks ukuran rxn maka AB adalah matriks mxn dengan entri $(AB)_{ij}$ pada baris I dan kolom j diperoleh melalui:

   $(AB)_{ij}= a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ir}b_{rj}$

2.3 Persegi Ajaib (*Magic Square*)

2.3.1 Sejarah Persegi Ajaib

Persegi ajaib sudah dikenal oleh matematikawan Cina sejak 650 Sebelum Masehi. Ada kemungkinan sudah dikenal oleh matematikawan Arab sejak abad ke-7 seperti albuni dalam kitabnya Syamsul Ma‟arif dan Manbau Ushul Hikmah. Di abad 10 seorang ahli matematika asal Persia, Buzjani meninggalkan sebuah manuscript yang mana pada halaman 33 berisi beberapa pola wifik (*Magic Square*). Dalam sebuah kitab ensiklopedia dari Bagdad circa 983 AD, kitab yang bernama Rasail Ikhwanu Shafa (*the encyclopdedia of brethren of purity*) karya Imam Ahmad bin Abdullah (4 juz) juga memuat beberapa contoh Magic Square. Kitab ini berisi 14 risalah, risalah pertama membahas Ilmu hitung termasuk Magic Square didalamnya, risalah kedua membahas handosat, risalah ketiga membahas Ilmu falak, risalah ke empat membahas Ilmu musik, dimana nanti dalam buku ini akan saya bahas antara chord music dan Magic Squarenya menurut para filosof. Dan terakhir risalah ke 14 membahas ilmu Analotica. Dalam kitab karya Imam Alghazali yang bernama Al Aufaq, atau kitab Mahzanu Al Aufaq sebuah kitab berbahasa Persia yang juga karya Alghazali. Juga memuat beberapa contoh *Magic Square* bahkan dijelaskan khasiat Magic Square dari 3x3 sampai 36x36.

Menurut literatur Cina, Persegi ajaib ditemukan di Cina oleh raja Yu (禹) sekitar tahun 2200 sm. Terdapat legenda bahwa dahulu kala terdapat bencana banjir di sekitar sungai kuning. Saat raja Yu (禹) berusaha untuk menyalurkan air ke laut, terlihat kura-kura dengan pola titik-titik bulat bilangan yang diatur dalam suatu corak petak sembilan tiga aneh pada tempurung. Persegi ajaib yang ditemukan raja Yu (禹) tersebut disebut Lo Shu. Bilangan dalam Lo Shu ditunjukkan sebagai titik-titik atau noktah pada suatu tali. Lo Shu sebenarnya adalah persegi ajaib berukuran 3x3.

2.3.2 Pengertian Persegi Ajaib

Sebuah buku karangan W. S Andrews (1960) dijelaskan bahwa persegi ajaib atau persegi magis (*Magic Square*) adalah bilangan dalam kotak-kotak yang berbentuk persegi dengan sifat jumlah bilangan menurut masing-masing baris, kolom, ataupun diagonalnya adalah sama. Persegi ajaib berukuran , sebanyak disusun dalam kotak-kotak persegi dengan syarat tidak ada bilangan yang ditulis berulang dan jumlah bilangan-bilangan menurut masing-masing baris, kolom, ataupun diagonal adalah sama.

Magic Square adalah angka yang jumlah baris, kolom, dan diagonal semua jumlah harus sama. *Magic Square* ini merupakan kesetaraan sempurna di segala arah atau dimensi. Pola elegan atau estetis dapat dibuat ketika, garis kontinu panjang tergabung dalam rangka hitung 1,2,3 sampai 4 dan lain-lainya ke nomor terakhir. Ini adalah bagaimana matematika berubah menjadi sebuah seni (Art).

Bentuk umum *Magic Square*, sebagai berikut:

Tabel 2. 1 : Bentuk Umum Magic Square n × n

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,n}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\cdots$	$a_{n,n}$

BAB III

PEMBAHASAN

Menyelesaikan *Magic Square* dengan solusi Sistem Persamaan Linier (SPL) berordo 3 × 3 untuk mendapatkan bilangan-bilangan pada *Magic Square* berukuran 3 × 3. Untuk menjawab permasalahan tersebut, dapat dilakukann langkah-langkah sebagai berikut.

1. Menentukan bentuk umum dari *Magic Square* dan bilangan *magic*

   Bentuk umum *Magic Square* berukuran 3 × 3 adalah :

Tabel 3. 1 : Bentuk umum *Magic Square* 3 x 3

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$

Kemudian, misalkan *m* merupakan bilangan *magic* dari *Magic Square* tersebut, maka nilai *m* menyatakan jumlah dari bilangan-bilangan yang ada pada *Magic Square* untuk setiap baris, kolom, dan diagonalnya. Nilai *m* tersebut dapat ditentukan dengan cara:

$$\text{jumlah setiap baris} \begin{cases} a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} = \sum_{j=1}^{3} a_{1,j} \\ a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} = \sum_{j=1}^{3} a_{2,j} \\ a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} = \sum_{j=1}^{3} a_{3,j} \end{cases}$$

$$\text{jumlah setiap kolom} \begin{cases} a_{1,1} + a_{2,1} + a_{3,1} = \sum_{i=1}^{3} a_{i,1} \\ a_{1,2} + a_{2,2} + a_{3,2} = \sum_{i=1}^{3} a_{i,2} \\ a_{1,3} + a_{2,3} + a_{3,3} = \sum_{i=1}^{3} a_{i,3} \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

$$\text{jumlah setiap diagonal} \begin{cases} a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = \sum_{i=1}^{3} a_{i,i} \\ a_{3,1} + a_{2,2} + a_{1,3} = \sum_{j=1}^{3} a_{6-j+1,j} \end{cases}$$

Karena akan dicari nilai *m* untuk *Magic Square* berukuran 3 × 3, maka $n = 3$, yaitu :

$$m = \frac{1}{2}n(n^2 + 1) = \frac{1}{2} \, . \, 3 \, (3^2 + 1) = 15$$

Jadi, jumlah bilangan-bilangan untuk setiap baris, kolom, dan diagonal pada *Magic Square* haruslah bernilai 15. Selanjutnya, untuk menentukan masing-masing bilangan *Magic Square* berukuran 3 × 3, dimana terdapat 9 bilangan, akan digunakan prinsip Sistem Persamaan Linier (SPL).

2. Menentukan bentuk umum Sistem Persamaan Linear (SPL) dari *Magic Square*

   Dengan menjabarkan persamaan **(1)**, maka diperoleh bentuk umum dari Sistem Persamaan Linier (SPL) untuk *Magic Square* berukuran 3 × 3, yaitu:

$$\begin{cases} a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} = 15 \\ a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} = 15 \\ a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} = 15 \\ a_{1,1} + a_{2,1} + a_{3,1} = 15 \\ a_{1,2} + a_{2,2} + a_{3,2} = 15 \\ a_{1,3} + a_{2,3} + a_{3,3} = 15 \\ a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = 15 \\ a_{3,1} + a_{2,2} + a_{1,3} = 15 \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

3. Menentukan bentuk umum matriks yang bersesuaian dengan Sistem Persamaan Linear (SPL) dari *Magic Square*

   Sistem Persamaan Linear (SPL) pada persamaan **(2)** di atas dapat dibentuk ke dalam matriks yang diperbesar yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ a_{1,3} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ a_{2,3} \\ a_{3,1} \\ a_{3,2} \\ a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Atau bentuk ringkasnya adalah:

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right]$$

4. Melakukan operasi baris elementer (OBE) terhadap matriks yang dari Sistem Persamaan Linear (SPL) yang telah terbentuk

   Dengan melakukan beberapa operasi baris elementer matriks di atas, didapatkan bentuk matriks eselon baris tereduksi sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

5. Menyusun kembali ke bentuk Sistem Persamaan Linear (SPL) dari hasil operasi baris elementer (OBE)

   Dari operasi baris elementer (OBE) yang dilakukan pada matriks yang diperbesar sebelumnya, diperoleh matriks bentuk eselon baris tereduksi. Matriks tersebut kemudian disusun kembali ke dalam bentuk Sistem Persamaan Linear (SPL) sebagai berikut:

$$\begin{cases} a_{1,1} + a_{3,3} = 10 \\ a_{1,2} + a_{3,2} = 10 \\ a_{1,3} - a_{3,2} - a_{3,3} = -5 \\ a_{2,1} - a_{3,2} - 2a_{3,3} = -10 \\ a_{2,2} = 5 \\ a_{2,3} + a_{3,2} + 2a_{3,3} = 20 \\ a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} = 15 \end{cases} \tag{3}$$

Dari Sistem Persamaan Linear (SPL) yang sudah disederhanakan di atas, diperoleh nilai $a_{2,2}$ yaitu 5. Artinya, bilangan yang menempati kotak tengah pada *Magic Square* berukuran 3 × 3 haruslah 5. Kemudian, dari Sistem Persamaan Linear (SPL) tersebut diperoleh pula 6 persamaan berikut:

$$\begin{cases} a_{1,1} = 10 - a_{3,3} \\ a_{1,2} = 10 - a_{3,2} \\ a_{1,3} = -5 + a_{3,2} + a_{3,3} \\ a_{2,1} = -10 + a_{3,2} + 2a_{3,3} \\ a_{2,3} = 20 - a_{3,2} - 2a_{3,3} \\ a_{3,1} = 15 - a_{3,2} - a_{3,3} \end{cases} \tag{4}$$

Keenam persamaan tersebut menunjukkan terdapat 6 variabel utama atau variabel yang nilainya bergantung pada variabel lain, yaitu $a_{1,1}$; $a_{1,2}$; $a_{1,3}$; $a_{2,1}$; $a_{2,3}$; $a_{3,1}$ dan terdapat 2 variabel bebas, yaitu $a_{3,2}$ dan $a_{3,3}$.

6. Mencari Penyelesaian *Magic Square* dengan menggunakan prinsip solusi umum Sistem Persamaan Linear (SPL)

   Dari bentuk Sistem Persamaan Linear (SPL) sederhana di atas, perhatikan bahwa nilai dari kedelapan variabel yang ada 4 diantaranya haruslah merupakan bilangan ganjil dan 4 lainnya adalah bilangan genap. Ini dimaksudkan agar tidak ada bilangan yang terpakai dua kali, sehingga semua bilangan dari 1 sampai dengan $n^2 = 3^3 = 9$ terpakai. Dengan demikian, bilangan-bilangan yang digunakan untuk menggantikan nilai kedelapan variabel tersebut haruslah bekisar antara 1 sampai dengan 9 terkecuali 5, karena 5 sudah digunakan untuk menggantikan variabel $a_{2,2}$.

Setelah dilakukan percobaan dengan mensubstitusikan nilai ganjil dan/atau genap untuk variabel bebas $a_{3,2}$ dan $a_{3,3}$ pada persamaan-persamaan **(4)**, diperoleh hasil bahwa supaya 4 diantara kedelapan variabel bernilai ganjil dan 4 lainnya genap, maka $a_{3,2}$ haruslah bilangan ganjil dan $a_{3,3}$ adalah genap. Secara lebih jelas dapat dilihat sebagai berikut:

Perhatikan :

$a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} = 15$

karena $1 \leq a_{3,1} \leq 9$, maka $6 \leq a_{3,2} + a_{3,3} \leq 14$, dengan syarat:

- nilai $a_{3,2}$ dan $a_{3,3}$ bekisar antara 1 sampai dengan 9
- $a_{3,2}$ ganjil dan $a_{3,3}$ genap
- baik $a_{3,2}$ maupun $a_{3,3}$ tidak bernilai 5

Dengan demikian, pasangan-pasangan ($a_{3,2}$; $a_{3,3}$) yang memungkinkan adalah (1,6); (1,8); (3,4); (3,6); (3,8); (7,2); (7,4); (7,6); (9,2); dan (9,4).

Setelah disubstitusikan ke setiap persamaan pada sistem persamaan **(4)**, diperoleh bahwa dari sepuluh kemungkinan pasangan ($a_{3,2}$; $a_{3,3}$) sebelumnya, yang memenuhi syarat bahwa tidak ada nilai pengganti untuk variabel-variabel dalam sistem yang berulang hanyalah pasangan-pasangan (1,6); (1,8); (3,4); (3,8); (7,2); (7,6); (9,2); dan (9,4) yang mana kemudian dapat dihasilkan solusi dari Sistem Persamaan Linear (SPL) tersebut. Kedelapan solusi tersebut selanjutnya dirangkum dalam tabel berikut ini:

Tabel 3. 2 : Solusi dari Sistem Persamaan Linear (4)

($a_{3,2}$; $a_{3,3}$)	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$
(1,6)	4	9	2	3	5	7	8	1	6
(1,8)	2	9	4	7	5	3	6	1	8
(3,4)	6	7	2	1	5	9	8	3	4
(3,8)	2	7	6	9	5	1	4	3	8
(7,2)	8	3	4	1	5	9	6	7	2
(7,6)	4	3	8	9	5	1	2	7	6
(9,2)	8	1	6	3	5	7	4	9	2
(9,4)	6	1	8	7	5	3	2	9	4

Dari tabel di atas, kemudian dapat diperoleh 8 kumpulan bilangan pada 8 buah *Magic Square* berukuran 3×3 yang mana ini disebut sebagai penyelesaian *Magic Square* berukuran 3×3. Kedelapan *Magic Square* tersebut adalah:

Tabel 3. 3 : *Magic Square* berukuran 3×3

4	9	2
3	5	7
8	1	6

(a)

2	9	4
7	5	3
6	1	8

(b)

6	7	2
1	5	9
8	3	4

(c)

2	7	6
9	5	1
4	3	8

(d)

8	3	4
1	5	9
6	7	2

(e)

4	3	8
9	5	1
2	7	6

(f)

8	1	6
3	5	7
4	9	2

(g)

6	1	8
7	5	3
2	9	4

(h)

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan yang sudah dijabarkan pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan langkah-langkah menyelesaikan *Magic Square* berukuran 3×3 dengan menggunakan Sistem Persamaan Linear (SPL) yaitu sebagai berikut :

1. Menentukan bentuk umum dari *Magic Square* dan bilangan *magic*
2. Menentukan bentuk umum Sistem Persamaan Linear (SPL) dari *Magic Square*
3. Menentukan bentuk umum matriks yang bersesuaian dengan Sistem Persamaan Linear (SPL) dari *Magic Square*
4. Melakukan operasi baris elementer (OBE) terhadap matriks yang dari Sistem Persamaan Linear (SPL) yang telah terbentuk
5. Menyusun kembali ke bentuk Sistem Persamaan Linear (SPL) dari hasil operasi baris elementer (OBE)
6. Mencari penyelesaian *Magic Square* dengan menggunakan prinsip solusi umum Sistem Persamaan Linear (SPL)

DAFTAR PUSTAKA

Hidayati, Sri. 2015. *Sistem Persamaan Linear (SPL) untuk Penyelesaian Magic Square*. Skripsi. Universitas Islam Negeri Alauddin Makasar.

Rorres, Anton. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.

LAMPIRAN TANYA JAWAB

1. **Pertanyaan Qori:**

   Magic Square ukuran 3x3 kenapa bentuk matriks yg diperbesar jadi ukurannya berubah? Lalu penerapan Magic Square dalam kehidupan sehari-hari contohnya apa?

   Jawab Lisa:

   Dari Magic Square ukuran 3x3 itu kan ada 9 variabel yang berbeda dan dalam sistem persamaan linear itu sesuai yang tertera di atas. Untuk koefisien-koefisiennya dituangkan dalam matriks yang diperbesar sehingga diperoleh matriks sebagai berikut. Nah jika dikembalikan dengan cara mengalikan maka diperoleh ke bentuk sistem persamaan linear.

   Jawab Khofifah:

   Implementasi magic square dalam kehidupan sehari-hari ada dalam permainan sudoku, selain itu bisa dimanfaatkan dalam membuat pola-pola seperti pola bunga dan pemandangan sehingga menjadi sebuah karya seni.

   Jawab Arofah:

   Banyak kolom pada matriks yang diperbesar disesuaikan dengan banyaknya variabel yang terdapat pada SPL yaitu sebanyak 9 variabel dari $a_{1,1}$ hingga $a_{3,3}$, sehingga banyak kolom matriks tersebut adalah 9. Sementara itu, banyak baris pada matriks yang diperbesar tersebut disesuaikan dengan banyak persamaan dalam SPL tersebut. Persamaan dalam SPL terbentuk dari penjumlahan setiap baris, kolom, dan diagonal pada magic square. Karena magic square berukuran 3x3 memiliki 3 baris, 3 kolom, dan 2 diagonal, maka banyaknya persamaan yang terbentuk pada SPL pun sebanyak 8 persamaan, inilah mengapa banyak baris pada matriks yang diperbesar yang bersesuaian dengan SPL tersebut adalah 8.

2. **Pertanyaan Yuliana:**

   Dalam penyelesaian tadi kenapa $a_{3,2}$ haruslah bilangan ganjil dan $a_{3,3}$ haruslah bilangan genap?

   Jawab Arofah:

Penetapan nilai $a_{3,2}$ ganjil dan $a_{3,3}$ genap dilakukan dengan tujuan untuk memenuhi syarat dari magic square, yaitu tidak ada bilangan-bilangan pada magic square yang berulang atau digunakan lebih dari satu kali. Karena banyak kotak pada magic square ukuran 3 x 3 adalah 9, maka terdapat 9 bilangan yang dapat digunakan untuk mengisikan kotak-kotak tersebut, yaitu bilangan dari 1 sampai 9. Sedangkan ingat bahwa angka 5 sudah digunakan untuk menggantikan nilai variabel $a_{2,2}$, maka tersisa 8 bilangan, dimana kedelapan bilangan tersebut terdiri atas 4 bilangan ganjil dan 4 lainnya genap. Dengan demikian, syarat agar tidak terjadi pengulangan bilangan pada magic square adalah bilangan yang diisikan selain untuk variabel $a_{2,2}$ haruslah terdiri atas 4 bilangan ganjil dan 4 bilangan genap. Inilah yang mendasari kita untuk melakukan percobaan penentuan nilai ganjil-genap untuk variabel bebas $a_{3,2}$ dan $a_{3,3}$. Dalam hal ini, percobaan yang dapat dilakukan adalah: mensubstitusikan nilai ganjil untuk $a_{3,2}$ dan $a_{3,3}$ ganjil; $a_{3,2}$ ganjil dan $a_{3,3}$ genap; $a_{3,2}$ genap dan $a_{3,3}$ ganjil; $a_{3,2}$ genap dan $a_{3,3}$ genap. Dari percobaan tersebut, pilihlah kemungkinan yang menghasilkan 4 nilai genap dan 4 nilai ganjil untuk setiap variabel utama dan variabel bebas, maka kita akan temukan hasil yang tepat adalah $a_{3,2}$ ganjil dan $a_{3,3}$ genap.

3. **Pertanyaan Berlian:**

   Asal rumus m itu diperoleh darimana?

   Jawab Wina:

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,n}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\cdots$	$a_{n,n}$

Dengan:

$a_{i,j} \in \{1, 2, 3, \ldots\ n^2\}$ untuk $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots\ n\}$ (1)

Dan $a_{p,q} = a_{r,s} \Longrightarrow p = r$ dan $q = s$ dan untuk semua $p, q, r, s \in \{1, 2, 3, \ldots\ n\}$ (2)

Persamaan ini dimaksudkan untuk menjamin tidak ada angka yang terpakai dua kali, sehingga semua bilangan dari 1 sampai dengan n^2 terpakai. Bilangan *magic* untuk *Magic Square* tersebut adalah

$$m = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} = \ldots = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,2} = \ldots = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{n-j+1,j} \tag{3}$$

Jika seluruh elemen dari *Magic square* dijumlahkan, maka

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n^2} k \tag{4}$$

Misalkan :

$$\sum_{i=1}^{n} m$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} + a_{i,2} + a_{i,3} + \cdots + a_{i,n}$$

$$= (a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + \cdots + a_{1n}) + (a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} + \ldots + a_{2,n} + (a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} + \ldots + a_{3n}) + (a_{n,1} + a_{n,2} + a_{n,3} + \ldots + a_{n,n})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} + \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}$$

$$= n\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\right) = \sum_{k=1}^{n^2} k$$

$$= n\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\right) = 1+2+3+4+\ldots+n^2-4+n^2-3+n^2-2+n^2-1+n^2$$

$$= n\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\right) = (1+n^2) + (n^2-1+2) + (n^2-2+3) + (n^2-3+4) + \ldots + ((\tfrac{n^2}{2}) + (\tfrac{n^2}{2}+1))$$

$$= n\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) = (1+n^2) + (1+n^2) + (1+n^2) + (1+n^2) + \ldots + (2(\tfrac{n^2}{2}) + 1)$$

$$= n\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) = (1+n^2)(\tfrac{n^2}{2})$$

Dari kedua persamaan (3) dan (4), maka

$$n(m) = (\tfrac{n^2}{2})(1+n^2)$$

$$m = \frac{\left(\frac{n^2}{2}\right)(1+n^2)}{n}$$

$$m = \frac{n^2}{2} n(1+n^2)(\tfrac{1}{n})$$

$$m = \frac{n}{2}(1+n^2) \leftrightarrow \frac{1}{2}n(1+n^2) \tag{5}$$

4. **Pertanyaan Venti:**

   Magic Square itu tidak harus ukuran 3x3 kan, nah yang ukuran 3x3 kenapa ada 8 persamaan jika dinyatakan dalam sistem persamaan linear? Lalu untuk yang ukuran nxn ada berapa persamaan?

   Jawab Lisa:

   Dari bentuk Magic Square 3x3 itu kana da 3 baris, 3 kolom, dan 2 diagonal dari situ 3 baris menjadi 3 buah persamaan, 3 kolom menjadi 3 buah persamaan, dan 2 diagonal menjadi 2 buah persamaan jadi totalnya ada 8 persamaan yang membentuk sistem persamaan linear. Nah, untuk yang ukuran nxn kana da n baris, n kolom, dan diagonalnya tetap 2 maka persamaannya ada n+n+2 buah persamaan.