MAKALAH

KUMPULAN SOAL HIMPUNAN DAN FUNGSI

Kelompok 1

Aisha Alvita Marella	K1321004
Alfiyana Damayanti	K1321008
Fikr Aulia Rahman	K1321040
Ira Septiana Marfi'a	K1321048
Nabila Shafa Salsabila	K1321058
Muhammad Aditya Tri A.	K1321054
Widya Damayanti	K1321078
Yanuar Kurniawan	K1321080

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA 2021

UNIVERSITAS SEBELAS MARET SURAKARTA

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga kami dapat menyelesaikan penyusunan makalah ini tepat pada waktunya. Adapun tema dari makalah ini adalah “Pembahasan Soal-Soal Himpunan dan Fungsi”.

Pada kesempatan ini kami mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada dosen mata kuliah Dasar-Dasar Matematika yang telah memberikan tugas terhadap kami. Kami juga ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang turut membantu dalam pembuatan makalah ini.

Kami jauh dari sempurna dan ini merupakan Langkah yang baik dari studi yang sesungguhnya. Oleh karena itu, keterbatasan waktu dan kemampuan kami, maka kritik dan saran yang membangun senantiasa kami harapkan. Semoga makalah ini dapat berguna bagi kami pada khususnya pihak yang berkepentingan pada umumnya.

Surakarta, 15 Oktober 2021

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i

KATA PENGANTAR ii

DAFTAR ISI iii

BAB I 1

PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Rumusan Masalah 1

1.3 Tujuan Masalah 1

BAB II 2

PEMBAHASAN 2

BAB III 8

PENUTUP 8

3.1 Kesimpulan 8

3.2 Saran 8

3.3 Daftar Pustaka 8

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kebanyakan mahasiswa menganggap Matematika adalah pelajaran yang sulit. Pada dasarnya Matematika adalah ilmu yang mempelajari tentang logika berpikir. Sesulit apapun akan menjadi mudah jika mahasiswa memiliki logika berpikir yang baik. Sama halnya dengan sub bab Matematika yang berjudul "Pembahasan Soal Fungsi”. Untuk menjawab soal fungsi ini tentu saja setiap mahasiswa harus paham betul tentang pengertian dan sifat-sifat fungsi itu sendiri. Berdasarkan uraian tersebut penulis mengangkat sebuah makalah berjudul: "Pembahasan Soal Himpunan dan Fungsi".

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam makalah ini yaitu pembuktian soal-soal himpunan dan fungsi dengan mengetahiu sifat-sifatnya

1.3 Tujuan Masalah

Adapun tujuan dalam makalah ini yaitu agar dapat lebih mengetahui dan memahami tentang himpunan dan fungsi.

BAB II

PEMBAHASAN

1. **Dengan semesta bilangan bulat didefinisikan suatu relasi R dengan $\boldsymbol{aRb\ bhb}$ $\boldsymbol{a^2 + a\ = b^2 + b}$**

   Buktikan bawa R suatu relasi ekuivalen dan tentukan kelas equivalennya:

   Jawab:

   ARa berarti $a^2\ + a\ = a^2 + a$ (refleksif)

   Bila aRb apakah bRa

   $a^2\ + a\ = b^2$ +b → $b^2\ + b\ = a^2 + a$ (simetris)

   Bila aRb adan bRc apakah aRc

   $a^2\ + a\ = b^2$ +b dan $b^2\ + b\ = c^2 + c$ (transitif)

   Karena ketiga sifat itu terpenuhi maka R merupakan relasi equivalen

   Andaikan p terletak dalam kelas yang ditentukan oleh $p1$ maka,

   $p1^2\ + p1\ = p^2 + p$ hingga $p1^2 -\ p^2\ = p - p1$ atau

   $(p1 + p)\ (p1 - p)\ + (p1 - p)\ =\ 0$

   $(p1 -\ p)\ (p1\ +\ p\ + 1)\ =\ 0$, ini berlaku untuk $p1 =\ p$ atau $p =\ -p1\ - 1$

   Andaikan $p1 = 4$ maka $p =\ -4\ - 1\ =\ -5$, karena itu 4 dan -5 terletak dalam suatu kelas dan ini memang dipenuhi $4^2\ + 4\ = (-5)^2 - 5$.

2. **Buktikan apakah relasi $\boldsymbol{R}$ pada Himpunan $\boldsymbol{Z}$ didefinisikan $\boldsymbol{xR}$y apabila $\boldsymbol{x -\ y}$ kelipatan 2 bersifat ekuivalen**

   Bukti

   Relasi R dikatakan ekuivalen apabila relasi bersifat refleksif, simetris dan transitif

   1. Akan ditunjukan R bersifat refleksif

$\forall x, x \in Z \rightarrow xRx$

Ambil sebarang $x \in Z$ akan ditunjukan xRx

$xRx = x - x$ kelipatan 2

$x - x = 0$

$0 = 2.k$ dengan $k = 0$ maka terbukti R bersifat refleksif

2. Akan ditunjukan R bersifat simetris

   $\forall x, y\ x, y \in Z\ xRy \rightarrow yRx$

   Ambil sebarang $x \in\ Z, y \in\ Z$ dan xRy akan ditunjukan yRx

   $xRy \rightarrow x - y = 2m0, m0 \in\ Z$ akan ditunjukan $yRx \rightarrow\ y - x = 2.l0, l0 \in\ Z$

   $x - y = 2m0$ (kedua ruas dikalikan dengan -1)

   $-1(x - y)\ = -1(2m0)$

   $y - x = -2m0$

   pilih $l0 = -m0$

   $y - x = 2l0$

   maka terbukti R bersifat simetris

3. Akan ditunjukan R bersifat transitif

   $\forall x, y, z\ \ x, y, z \in Z\ xRy, yRz \rightarrow xRz$

   Ambil sebarang $x \in\ Z, y \in\ Z, z \in\ Z, xRy$ dan yRz akan ditunjukan xRz

   $xRy \rightarrow x - y = 2m0\ dan\ yRz \rightarrow y - z = 2l0$ akan ditunjukan $xRz \rightarrow$

   $x - z = 2n0$

   $x - y = 2m0$

   $x - (z + 2l0)\ = 2m0$

   $x - z = 2m0 + 2l0$

   $x - z = 2(m0 + l0)$

   pilih $n0 =\ m0 + l0$

   $x - z = 2(n0)$

   maka terbukti R bersifat transitif

karena R bersifat refleksif, simetris, dan transifit maka terbikti bahwa R bersifat Ekuivalen

3. **Jika f: $X \to Y$ dan g: $Y \to Z$ adalah fungsi surjektif maka $g \circ f$: $X \to Z$ adalah fungsi surjektif.**

Bukti:

Diambil sebarang $b \in Z$. Perlu ditunjukkan bahwa terdapat $a \in X$ sehingga $(g \circ f)(a) = b$. Karena g: $Y \to Z$ fungsi surjektif dan $b \in Z$, maka terdapat $c \in Y$ sedemikian sehingga $g(c) = b$ … (1)

Karena f: $X \to Y$ juga surjektif dan $c \in Y$, maka terdapat $a \in X$ sedemikian sehingga $f(a) = c$ … (2)

Dari persamaan (1) dan (2), diperoleh $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(c) = b$.

Dengan demikian, $g \circ f$ adalah fungsi surjektif.

4. **Buktikan f : R→R^+, f(x) = $x^2 - 4$ adalah fungsi bijektif !**

Akan diperiksa apakah fungsi tersebut bersifat surjektif

$$\forall y \in R^+ \to \exists x \in R \ni y = f(x)$$

Pembuktian :

Ambil sebarang $y \in R^+$

Pilih x = $\sqrt{4+y} \in R$

Maka $f(x) = \left(\sqrt{4+y}\right)^2 - 4$

$f(x) = 4 + y - 4$

$f(x) = y$

fungsi tersebut bersifat surjektif

Akan diperiksa apakah fungsi tersebut bersifat injektif

$$\forall x_1 x_2 \in R, f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$$

Pembuktian :

Ambil sebarang $x_1, x_2 \in R$

$$x_1{}^2 - 4 = x_2{}^2 - 4$$

$$x_1{}^2 = x_2{}^2$$

$$x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Namun, $x_{1,}x_2$ tidak selalu bernilai sama, karena x_1 atau x_2 bisa saja berupa bilangan negatif, sehingga fungsi tersebut tidak bersifat injektif.

∴ Jadi terbukti bahwa fungsi tersebut tidak bersifat bijektif karena hanya bersifat surjektif.

5. **Periksa apakah $\boldsymbol{g}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $\boldsymbol{g(x) = x^3 - x, \forall x} \in \mathbb{R}$ merupakan fungsi injektif**.

   Buktikan:

   $\forall x1x2 \in \mathbb{R}\ \ g(x1) = g(x2) \to x1 = x2$

   Ambil sebarang $x1x2 \in \mathbb{R}$ dengan $g(x1) = g(x2)$

   $g(a) = g(b)$

   $a^3 - a = b^3 - b$

   $0 = (b^3 - a^3) - (b - a)$

   $0 = (b^2 + ab + a^2)(b - a) - (b - a)$

   $0 = (b^2 + ab + a^2)(b - a)$

   Perhtikan bahwa

   $g(0) = 0^5 - 0 = 0$

   $g(1) = 1^5 - 1 = 0$

   Terdapat $0, 1 \in \mathbb{R}$ dimana $0 \neq 1$, tetapi $g(0) = g(1)$. Dengan demikian, g bukan fungsi injektif.

6. **Fungsi $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2}$ adalah fungsi injektif.**

   Jawab:

   $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ dengan\ f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$

   Akan dibuktikan bahwa $x_1 = x_2$

   Ambil sembarang $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ dengan\ f(x_1) = f(x_2)$

$$\Leftrightarrow\ {x_1}^2 + 2 = {x_2}^2 + 2$$
$$\Leftrightarrow\ {x_1}^2 + 2 - {x_2}^2 - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ {x_1}^2 - {x_2}^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

Menggunakan pernyataan $ab = 0$ maka $a = 0\ atau\ b = 0$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Sehingga terbukti bahwa Fungsi $f : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^2 + 2$ adalah fungsi injektif.

7. **Misal f: ℝ → ℝ sehingga f x = x²**

Penyelesaian

Ambil sebarang $x1, x_2$ di ℝ sehingga $f(x1) = f\ x_2$. Maka akan memperoleh berikut ini.

$X1^2 = {x_2}^2$

$X1^2 - {x_2}^2 = 0$

$(x1 - x_2)\ x1 + x_2 = 0$

$X1 = x_2\ atau\ x1 = -x_2 \neq x_2$

Jadi, f bukan fungsi injektif.

Jika ingin mendapatkan fungsi injektif yaitu dengan membatasi domainnya $D\ F =$ ℝ positif U 0

Ambil $y = -1 \in \mathbb{R}$ maka tidak ada $x \in \mathbb{R}$ sehingga $f\ x = x^2 = -1$.

Jadi, f bukan fungsi surjektif. Akan didapatkan f fungsi surjektif. jika Anda membatasi kodomain dari f, yaitu ℝ positif U 0.

Oleh karena itu, jika Anda membatasi domain dan komdomain adalah ℝ positif U 0, Anda akan memperoleh fungsi bijektif F dari ℝ ke ℝ sehingga $f\ x = x^2$.

Jika F sebuah fungsi dari A Ke B, f merupakan himpunan bagian dari A B Himpunan pasangan berurutan dalam B A diperoleh dengan menukar anggota-anggota pasangan berurutan dalam f yang tidak selalu merupakan fungsi. Meskipun demikian, jika f bijektif, hasil penukaran ini akan merupakan sebuah fungsi yang disebut sebagai fungsi invers.

8. Fungsi $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 1}$ adalah fungsi injektif.

Jawab:

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ dengan\ f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

Ambil sembarang $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ dengan\ f(x_1) = f(x_2)$

$$\Leftrightarrow {x_1}^2 + 1 = {x_1}^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow {x_1}^2 - {x_1}^2 + 1 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow {x_1}^2 - {x_1}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Terbukti bahwa Fungsi $f : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^2 + 1$ adalah fungsi injektif.

BAB III

PENUTUP

3.1 Kesimpulan

Fungsi dalam matematika adalah suatu relasi yang menghubungkan setiap anggota x dalam suatu himpunan yang disebut daerah asal (domain) dengan suatu nilai tunggal f(x) dari suatu himpunan kedua yang disebut daerah kawan (kodomain). Himpunan nilai yang diperoleh dari relasi tersebut disebut daerah hasil (range). Relasi khusus dua himpunan yang menghubungkan setiap anggota himpunan daerah asal dengan tepat satu anggota himpunan kawan disebut fungsi. Dalam fungsi terdapat grafik fungsi yang dapat menggambarkan hubungan variabel dalam persamaan fungsi. Sifat-sifat fungsi terbagi menjadi tiga yaitu: fungsi injektif, fungsi surjektif, dan fungsi bijektif.

3.2 Saran

Penulis menyadari jika makalah ini masih jauh dari sempurna. Kesalahan ejaan, metodologi penulisan dan pemilihan kata serta cakupan masalah yang masih kurang adalah diantara kekurangan dalam makalah ini. Karena itu saran dan kritik membangun sangat kami butuhkan dalam penyempurnaan makalah ini.

3.3 Daftar Pustaka

Soehardjo. 2000. *Dasar Matematika*. Surakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia