MAKALAH

DASAR-DASAR MATEMATIKA

RELASI ANTAR ANGGOTA HIMPUNAN

Dosen Pengampu :

Drs. Ponco Sujatmiko, M.Si

Disusun Oleh:

Ade Oktafianingrum	(K1321002)
Alridani Alif Nursavana	(K1321010)
Aulia Diva Muthiah Yuda	(K1321020)
Aura Putri Aryanti	(K1321022)
Dela Kuncaraningrum	(K1321030)
Falerinda Mardaningtyas	(K1321036)
Hafidz Ahmad Muzakky	(K1321042)

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas limpahan rahmat, taufik, serta hidayah-Nya sehingga kami dapat menyusun makalah dengan judul "Relasi Antar Anggota Himpunan" sesuai dengan yang diharapkan. Penyusunan makalah ini kami buat sebagai salah satu pemenuhan tugas pada mata kuliah Dasar-dasar Matematika

Makalah ini berisi tentang relasi antar anggota himpunan dan pembuktiannya. Penyusunan makalah ini diharapkan dapat membuat para pembaca bertambah wawasannya.

Namun kami merasa penyusunan makalah ini belum sempurna. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati, kami mengharapkan saran dan kritik yang bersifat membangun dari para pembaca demi penyempurnaan penyusunan makalah ini. Terima kasih atas semua kritik dan sarannya.

Surakarta, 15 Desember 2021

Penyusun

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Pada makalah ini dibahas konsep fungsi dan pembuktian mengenai sifat fungsi. Konsep-konsep ini menjadi dasar bagi sistem matematika dan sifat-sifat sistem. matematika. Hubungan antara dua atau lebih himpunan dapat digambarkan melalui suatu fungsi. Konsep fungsi memungkinkan kita untuk dapat mengetahui keterkaitan antara satu himpunan dengan himpunan lainnya.

Konsep fungsi atau pemetaan menempati posisi yang sentral pada setiap cabang matematika. Pada cabang matematika yang lebih dekat dengan dunia aplikasi misalnya Kalkulus, sebutan fungsi lebih populer digunakan dari pada sebutan pemetaan. Pada cabang matematika yang lebih abstrak, misalnya Struktur Aljabar, istilah pemetaan lebih populer digunakan dari pada istilah fungsi. Pada dasarnya sebuah fungsi adalah sebuah relasi atau hubungan yang mempunyai sifat khusus.

B. Rumusan Masalah

1. Bagaimana pembuktian bahwa suatu $f{:}A \rightarrow B$ dapat dikatakan sebagai fungsi?
2. Bagaimana pembuktian bahwa suatu fungsi $f{:}A \rightarrow B$ dapat dikatakan sebagai fungsi surjektif, injektif, atau bijektif?
3. Bagaimana pembuktian suatu relasi pada suatu himpunan dapat dikatakan bersifat refleksif, simetris, transitif, atau ekuivalen?

C. Tujuan

1. Untuk membuktikan bahwa suatu relasi $f{:}A \rightarrow B$ dapat dikatakan sebagai fungsi.
2. Untuk membuktikan bahwa suatu fungsi $f{:}A \rightarrow B$ dapat dikatakan sebagai fungsi surjektif, injektif, atau bijektif.
3. Untuk membuktikan bahwa suatu relasi R pada suatu himpunan dapat dikatakan bersifat refleksif, simetris, transitif, atau ekuivalen.

BAB II
PEMBAHASAN

1. Pengaitan f∶A→B dengan f(x)= x^2-1 adalah suatu fungsi.

   $\forall$x, x $\in$ A → $\exists$!y, y $\in$ B $\ni$ y = f(x)

   Artinya :

   (i) $\forall$x, x$\in$A → $\exists$y, y$\in$B $\ni$ y = f(x) dan

   (ii) $\forall x_1, x_2$ $x_1, x_2 \in$ A $x_1 = x_2 \rightarrow$ f(x_1) = f(x_2)

   Ambil sembarang x$\in$A

   Pilih y = x^2-1

   Perhatikan y = x^2-1= f(x)

   Ambil sembarang $x_1, x_2 \in$ A dengan $x_1 = x_2$ adt f(x_1)=f(x_2)

   Tulis $y_1 = x^2$ - 1

   $y_2 = x^2$ - 1

   Dengan $x_1 = x_2$

   Maka $y_1 = x_1^2$-1 = x_2^2 - 1= y_2

   f(x_1)= f(x_2)

   Karena $x_1 = x_2$ mengakibatkan f(x_1)=f(x_2) maka terbukti f(x) = x^2 - 1 adalah fungsi.

2. Pengaitan f∶ R^+→R dengan f(x) = x^2 - 1 adalah suatu fungsi injektif.

   $\forall$ x_1, x_2 $x_1, x_2 \in R^+$ f(x_1) = f(x_2) → $x_1 = x_2$

Ambil sembarang $x_1, x_2 \in R^+$

$f(x_1) = f(x_2)$

$x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1$

$x_1^2 = x_2^2$

$x_1^2 - x_2^2 = 0$

$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$

Karena $x_1, x_2 \in R^+$ maka $x_1 + x_2 \in R^+$, $x_1 + x_2 \neq 0$

Sehingga $x_1 - x_2 = 0$

$x_1 = x_2$

$\therefore$ Terbukti fungsi injektif

3. Periksa apakah f:R→R dengan $f(x) = 4x+2, \forall x \in$ R merupakan fungsi injektif?

Bukti :

$\forall x_1, x_2 \in R\ f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

Ambil sebarang $x_1, x_2 \in$ R dengan $f(x_1) = f(x_2)$

$f(x_1) = f(x_2)$

$x_1 = 1/4\ (4x_1+2-2)$

$= 1/4\ (4x_1+2) - 2/4$

$= 1/4\ (4x_2+2) - 2/4$

$= x_2 + 3/4 - 3/4 = x_2$

$x_1 = x_2$

Dengan demikian diperoleh bahwa $x_1 = x_2$. Sehingga terbukti bahwa f adalah fungsi injektif.

4. Tunjukkan bahwa f:R →R dengan f(x) = 6x+7, $\forall x \in$ R merupakan fungsi surjektif!

Bukti :

i. $\forall x, x \in R \rightarrow \quad y \in R \quad y = f(x)$

ii. $\forall x_1, x_{2,} x_1, x_2 \in R \rightarrow \quad x_1 = x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

iii. $\forall y \in R, \quad x \in R \quad f(x) = y$

Langkah i :

Ambil sebarang x $\in$ R pilih y = 6x+7

Perhatikan y = 6x+7= f(x)

Langkah ii :

Ambil sebarang $x_{1,}x_2 \in$ R dengan $x_{1=}x_2$

Perhatikan $f(x_1) = 6x+7$

$X_1 = 1/6\ (6x_1+7-7\ )$

$= 1/6\ (6x_1+7) - 7/6$

$= 1/6\ (6x_2+7\ ) - 7/6$

$= x_2 + 7/6 - 7/6 = x_2$

$X_1 = x_2$

$f(x_1) = 6x_1+7 = f(x_2) = 6\ x_2+7$

Langkah iii :

Ambil sebarang y $\in$ R

f(x) = 6x+7

y = 6x+7

y-7 = 6x

(y-7)/6 = x

Pilih x = (y-7)/6 $\in$ R

f(x) = f ((y-7)/6) = 6 ((y-7)/6) + 7

= y – 7 + 7 = y

f(x) = y

Dengan demikian diperoleh bahwa f(x) = y . Sehingga terbukti bahwa f adalah fungsi surjektif.

5. Periksa apakah f: $R \rightarrow R$ dengan $f(x) = x - 1$, $\forall x \in R$, merupakan fungsi bijektif.

Penyelesaian:

(i) fungsi surjektif

Ambil sebarang $y \in R$ pilih $x = y + 1, \in R$

$f(x) = x - 1$

$= (y + 1) - 1$

$= y$

(ii) fungsi injektif

Ambil sebarang $x1, x2 \in R$

$f(x1) = f(x2)$

$x1 - 1 = x2 - 1$

$x1 = x2$

∴ Terbukti bahwa $f: R \rightarrow R$ dengan $f(x) = x - 1, \forall x \in R$, merupakan fungsi bijektif.

6. Periksa apakah $f: R \rightarrow R$ dengan $f(x) = 3x - 7, \forall x \in R$, merupakan fungsi bijektif.

Penyelesaian:

(i) fungsi surjektif

Ambil sebarang $y \in R$ pilih $x = \frac{y+7}{3}, \in R$

$f(x) = 3x - 7$

$= 3\frac{y+7}{3} - 7$

$= y$

(ii) fungsi injektif

Ambil sebarang $x1, x2 \in R$

$f(x1) = f(x2)$

$3x1 - 7 = 3x2 - 7$

$3x1 = 3\,x2$

$x1 = x2$

∴ Terbukti bahwa $f: R \rightarrow R$ dengan $f(x) = 3x - 7, \forall x \in R$, merupakan fungsi bijektif.

7. Misal $f: R \rightarrow R$ (R = himpunan bilangan real). Periksa apakah fungsi f berikut merupakan fungsi injektif. $f(x) = 3x - 5$

Penyelesaian :

Ambil $x, y \in R$ dan $f(x) = f(y)$

$f(x) = f(y)$

$3x - 5 = 3y - 5$

$3x = 3y$

$x = y$

Karena jika $f(x) = f(y)$, maka $x = y$

Terbukti bahwa $f(x) = 3x - 5$ untuk $f: R \rightarrow R$ merupakan fungsi injektif

8. Misal $f: R \rightarrow R$ (R = himpunan bilangan real). Periksa apakah fungsi f berikut merupakan fungsi surjektif. $f(x) = x^3 - 1$

Penyelesaian :

Ambil $y \in R$ dan $f(x) = y$

$f(x) = y$

$x^3 - 1 = y$

$x = \sqrt[3]{y + 1} \in R$

Sehingga $\forall y \in$ R, $\exists x = \sqrt[3]{y + 1} \in R \ni f(x) = y$

Jadi, $f(x) = x^3 - 1$ merupakan fungsi surjektif

9. Tunjukkan bahwa $f: R \rightarrow R$ dengan $f(x) = 2x + 3$, $\forall x \in R$ merupakan fungsi surjektif!

Bukti :

Ambil sebarang $y \in R$

Pilih $x= (y-3)/2$

$f(x) = f\ (y-3)/2 = 2((y-3)/2)+3 = y - 3 + 3 = y$

$f(x) = y$

Dengan demikian diperoleh bahwa $f(x) = y$. Sehingga terbukti bahwa f adalah fungsi surjektif.

10. Tunjukkan bahwa $f: R \rightarrow R$ dengan $f(x) = + 1, \forall x \in R$ bukan merupakan fungsi injektif!

Bukti :

Pilih $-1, 1 \in R$, jelas bahwa $-1 \neq 1$

Tetapi

$f(1) = + 1 = + 1 = f(-1)$

Dengan demikian dapat disimpulkam bahwa f bukan merupakan fungsi injektif

11. Tunjukkan bahwa f:$R \rightarrow R$ dengan $f(x) = 4x+10, \forall x \in R$ merupakan fungsi surjektif!

Bukti :

i. $\forall x, x \in R \rightarrow \quad y \in R \quad y = f(x)$

ii. $\forall x_1, x_2, \in R \rightarrow \quad x_1 = x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

iii. $\forall y \in R, \quad x \in R \quad f(x) = y$

Langkah i :

Ambil sebarang $x \in R$

Pilih $y = 4x+10 \in R$

Perhatikan $y = 4x+10= f(x)$

Langkah ii :

Ambil sebarang $x_{1,}x_2 \in R$ dengan $x_{1=}x_2$

Perhatikan $f(x_1) = 4x_1+10$ diketahui $x_{1=}x_2$

$= 4x_2+10$

$= f(x_2)$

Langkah iii :

Ambil sebarang $y \in R$

Pilih $x = (y-10)/4 \in R$

Perhatikan $f(x) = 4(y-10/4) + 10$

$= y -10 + 10$

$= y$

Dengan demikian diperoleh bahwa $f(x) = y$. Sehingga terbukti bahwa f adalah fungsi surjektif.

12. R adalah relasi dalam himpunan R yang didefinisikan x-y elemen bilangan bulat buktikan R adalah relasi ekuivalen!

Pembuktian

1. Akan ditunjukkan R bersifat reflektif

$\forall x, x \in R \rightarrow xRx$

Ambil sebarang $x \in R$ akan ditunjukkan xRx

Perhatikan $x-x = 0 \in Z$

Maka terbukti xRx

2. Akan ditunjukkan R bersifat simetris

$\forall x,y \;\; x,y \in R , \;\; xRy \rightarrow yRx$

Untuk xRy artinya $x-y = k \quad k \in Z$

Untuk yRx artinya $y-x = l \quad l \in Z$

Ambil sebarang $x,y \in Z$ dan xRy akan ditunjukkan yRx

Perhatikan : $x - y = k \quad k \in Z$

$(-1)(x - y) = (-1)k \quad k \in Z$

$Y - x = -k \quad k \in Z$

Pilih $l = -k \rightarrow \;\; y - x = l \quad l = -k \in Z$

3. Akan ditunjukkan R bersifat transitif

$\forall x,y,z \in R , \;\; xRy$ dan $yRz \rightarrow xRz$

Ambil sebarang $x,y,z \in R$, xRy dan yRz akan ditunjukkan xRz

xRy artinya $x-y = k \quad k \in Z$

yRz artinya $y-z = n \quad n \in Z$

xRz artinya $x - y = m \quad m \in Z$

Eliminasi xRy dan yRz

$x-y = k \quad k \in Z$

$y-z = n \quad n \in Z$

$$\underline{\hspace{6cm}} \; +$$

$x - z = k + n \quad k,n \in Z$

Pilih $m = k+n \in Z$

$x-z = m \quad m = k + n \in Z$

Jadi terbukti bahwa relasi tersebut bersifat ekuivalen

13. Apakah pengaitan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ dengan $f(x) = x^{11} - 1$ merupakan fungsi ?

Jawab : Bukan

Karena $\exists x \ x \in \mathbb{R} \rightarrow y \in \mathbb{N} \ y \neq f(x)$

Bukti :

Karena ada maka pilih satu yaitu

$x = 0$

$f(0) = x^{11} - 1 = 0^{11} - 1 = -1 \notin \mathbb{N}$

Terbukti

14. Jika g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ maka g(x) =7/(1+x)

Jawab :

$\forall x \;\; x \in \mathbb{R} \rightarrow y \in \mathbb{N} \;\; y=g(x)$

Pernyataan diatas bernilai salah karena daerah hasil ada yang tidak termasuk bilangan asli maka untuk membuktikan bisa dengan mencari negasinya yaitu

$\exists x \;\; x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{N} \;\; y \neq 7/(1+x)$

Karena kuantornya ada, maka pilih x=-1,

Maka

$g(x) = 7/(1+x)$

$g(-1) = 7/(1+(-1)) = 7/0$,

maka $7/0 \notin \mathbb{N}$

BAB III
PENUTUP

A. Kesimpulan

Dalam matematika, relasi pada himpunan mempunyai beberapa sifat seperti refleksif, transitif, simetris, atau ekuivalen. Untuk menggolongkan apakah suatu relasi pada himpunan termasuk ke dalam beberapa bentuk relasi tersebut, maka diperlukan langkah pembuktian. Selain itu, relasi pada himpunan dalam matematika juga dapat dibuktikan bahwa relasi tersebut merupakan suatu fungsi atau bukan fungsi. Hal itu dapat dilakukan dengan cara menganalisis sifat dari suatu fungsi yang kemudian dijadikan sebagai tolak ukur pada relasi tersebut. Suatu fungsi dalam matematika memiliki beberapa bentuk seperti fungsi surjektif, injektif, dan bijektif. Dalam hal ini kita juga dapat membuktikan bahwa suatu fungsi akan termasuk ke dalam fungsi surjektif, injektif, atau bijektif atau tidak. Apabila melalui langkah pembuktian didapati suatu relasi pada fungsi memenuhi sifat sifat yang terdapat dalam fungsi surjektif, injektif, atau bijektif, maka dapat ditarik kebenarannya bahwa fungsi tersebut termasuk ke dalam bentuk fungsi surjektif, injektif, atau surjektif.

B. Saran

Kami sebagai penulis mengharapkan pembaca dapat memahami dengan baik materi yang telah kami sampaikan. Kami menyadari bahwa penyusunan makalah ini masih banyak kesalahan-kesalahan. Oleh karena itu diharapkan para pembaca bisa memberikan kritik dan sarannya agar kami bisa membuat makalah dengan lebih baik lagi.