TUGAS PROYEK II

MATA KULIAH DASAR-DASAR MATEMATIKA

Dosen Pengampu:

Drs. Ponco Sujatmiko, M.Si.

Disusun Oleh:

KELOMPOK 3

1.	Charyta Putri Martianto	K1321028
2.	Fathul Munawaroh	K1321038
3.	Heni Setiyowati	K1321044
4.	Muhammad Rizky Ardi N	K1321056
5.	Rayhan Akmal Hidayat	K1321068
6.	Rosyida Syafa Khoira	K1321072
7.	Salma Cahya Romadhani	K1321074
8.	Zulfa Mubina Pawitrasari	K1321082

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SEBELAS MARET SURAKARTA

2021/2022

BAB I
PEMBUKAAN

1.1 Latar Belakang

A. Himpunan

Himpunan adalah kumpulan semua objek yang dapat didefinisikan dengan jelas karena memiliki batasan, yang apabila setiap kali disebutkan satu objek semua sepakat bahwa objek tersebut berada di kumpulan tersebut atau tidak berada di kumpulan tersebut.

Bukan himpunan adalah ada objek yang tidak dapat didefinisikan dengan jelas karena ada objek yang apabila disebutkan ada orang yang tidak sepakat bahwa objek tersebut berada di kumpulan tersebut atau tidak berada di kumpulan tersebut.

Sifat-sifat pada himpunan:

1. **Bersifat Refleksif**

   Relasi R pada himpunan A ditulis R : $A \rightarrow$ B dikatakan bersifat refleksif, apabila:

   $\forall x, x \in A \rightarrow xRx$

   Relasi R pada himpunan A ditulis R : $A \rightarrow$ B tidak dikatakan bersifat refleksif, apabila

   $\exists x, x \in A \rightarrow x\cancel{R}x$

2. **Bersifat Simetris**

   Relasi R pada himpunan A ditulis R : A $\rightarrow$ B dikatakan bersifat simetris, apabila:

   $\forall$x, y $\in$ A, xRy $\rightarrow$ yRx

   Relasi R pada himpunan A ditulis R : A $\rightarrow$ B tidak dikatakan bersifat simetris, apabila:

   $\exists$x, y $\in$ A, xRy $\rightarrow$ y$\cancel{R}$x

3. **Bersifat Transitif**

   Relasi R pada himpunan A ditulis R : A $\rightarrow$ B dikatakan bersifat transitif, apabila:

   $\forall$x, y, z $\in$ A, xRy Λ yRz $\rightarrow$ xRz

   Relasi R pada himpunan A ditulis R : A $\rightarrow$ B tidak dikatakan bersifat transitif, apabila:

   $\exists$x, y, z $\in$ A, xRy Λ yRz Λ x$\cancel{R}$z

4. **Relasi Ekuivalen**

R : A $\rightarrow$ B dikatakan relasi ekuivalen,

apabila:

R : A $\rightarrow$ B bersifat refleksif, dan

R : A $\rightarrow$ B bersifat simetris, dan

R : A $\rightarrow$ B bersifat transitif.

R : A $\rightarrow$ B dikatakan bukan relasi ekuivalen,

apabila:

R : A $\rightarrow$ B tidak bersifat refleksif, atau

R : A $\rightarrow$ B tidak bersifat simetris, atau

R : A $\rightarrow$ B tidak bersifat transitif.

B. Fungsi

Relasi f dari himpunan A ke himpunan B (ditulis f : A $\rightarrow$ B) dikatakan fungsi (pemetaan) apabila setiap (x) anggota A dipasangkan oleh f dengan tunggal anggota di B(f(x)).

f : A $\rightarrow$ B dikatakan fungsi, apabila:

1. $\forall x, x \in A \rightarrow \exists y, y \in B$
   sedemikian sehingga y = f(x) dan
2. $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 = x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

f : A $\rightarrow$ B dikatakan bukan fungsi, apabila:

1. $\exists x, x \in A, \forall y, y \in B \rightarrow y \neq f(x)$ atau
2. $\exists x_1, x_2 \in A, x_1 = x_2 \wedge \rightarrow y_1 = f(x_1) \neq y_2 = f(x_2)$

Fungsi Konstan

Fungsi konstan yaitu fungsi yang hanya mengaitkan dengan satu bilangan.

f : A $\rightarrow$ B dikatakan fungsi konstan, apabila:

$\forall x \in A \rightarrow f(x) = y_0$ untuk suatu y_0 (tetap) $\in$ di B

Fungsi Identitas

Fungsi identitas yaitu fungsi yang hanya mengaitkan dengan dirinya.

$x \rightarrow f(x) = x$

$f : A \rightarrow B$ dikatakan sama dengan $g : A \rightarrow B$, apabila:

$f(x) = g(x)$ dan untuk $\forall x \in A$

1. **Fungsi Surjektif**

   $f : A \rightarrow B$ dikatakan fungsi surjektif,

   apabila:

   $\forall y \in B \rightarrow \exists x, x \in A$ sedemikian sehingga $y = f(x)$

   Sehingga negasinya:

   $\exists y \in B \wedge \forall x \in A$ sedemikian sehingga $y \neq f(x)$

2. **Fungsi Injektif**

   $f : A \rightarrow B$ dikatakan fungsi injektif,

   apabila:

   $\forall\ x_1, x_2 \in A$, dengan $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

   sehingga kontraposisinya:

   $\forall x_1, x_2 \in A$, dengan $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

3. **Fungsi Bijektif**

   $f : A \rightarrow B$ dikatakan fungsi bijektif karena:

   a. $f : A \rightarrow B$ fungsi injektif, dan
   b. $f : A \rightarrow B$ fungsi surjektif.

1.2 Tujuan Penulisan

Berdasarkan latar belakang diatas, penyusunan makalah ini bertujuan untuk :

1. Mengumpulkan pernyataan fungsi
2. Membuktikan pernyataan fungsi
3. Mengetahui langkah-langkah pembuktian pernyataan fungsi
4. Menyelesaikan tugas proyek dasar-dasar matematika.

BAB II
PEMBAHASAN

2.1 Pembuktian Pernyataan Fungsi

1. **Buktikan bahwa** $(A \cap B) \setminus (B \cap C) \subseteq A$

   Bukti:

A. $x \in (A \cap B) \setminus (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge \notin (B \cap C)$

B. $\rightarrow x \in (A \cap B)$

C. $\leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

D. $\rightarrow x \in A$

Perhatikan bahwa baris C ekuivalen tautologi dengan baris B, sehingga digunakan operator ekuivalen yang menunjukkan hubungan baris C dengan ruas kanan baris B. Tetapi perlu cermat mengartikan tanda implikasi pada baris B yang berlaku untuk menunjukkan hubungan baris C dengan ruas kiri baris A. Demikian pula baris D yang menggunakan tanda implikasi, maka menunjukkan bahwa baris D dengan ruas kiri baris A.

2. **Buktikan bahwa** $A \cup \emptyset = A\ jika\ dan\ hanya\ jika\ A \cup \emptyset \subseteq A\ dan\ A \subseteq A \cup\ \emptyset$

   Bukti:

A. Ambil $x \in A \cup \emptyset = x \in A \vee x \in \emptyset$

Karena $\emptyset$ adalah himpunan yang tidak memiliki anggota maka sangat jelas bahwa $x \notin \emptyset$, sehingga diperoleh $x \in A$. Jadi terbukti benar bahwa $A \cup \emptyset \subseteq A$.

B. Ambil sebarang $x \in A$

Dengan sifat adisi, diperoleh $x \in A$ atau $x \in \emptyset$. Pernyataan ini tetap bernilai benar, apapun nilai kebenaran dari $x \in \emptyset$. Sehingga terbukti bahwa $A \subseteq A \cup\ \emptyset$.

C. Kesimpulan, jadi terbukti benar bahwa $A \cup \emptyset = A\ jika\ dan\ hanya\ jika\ A \cup \emptyset \subseteq A\ dan\ \ A \subseteq A \cup\ \emptyset$

3. **Buktikan bahwa** $A \cap B \subseteq A$

   Bukti:

A. $x \in (A \cap B) \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

B. $\rightarrow x \in A$

Baris A ekuivalensi, sedangkan ruas kanan baris A secara tautologi berimplikasi ruas kanan baris B.

4. **Akan ditunjukkan bahwa untuk sembarang dua himpunan A dan B berlaku** $A \cap B = B \cap A$

   Berdasarkan definisi operasi irisan, diketahui bahwa untuk sembarang unsur x berlaku,

$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

   Selain itu, bentuk ini ekuivalensi tautologi, sehingga,

$$x \in A \wedge x \in B = x \in B \wedge x \in A \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

   Sesuai bentuk (1) maka diperoleh

$$x \in B \cap A \leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \ldots\ldots\ldots (3)$$

Dengan menggabungkan hasil (1) dan (3) dan menggunakan sifat transitivitas serta simetri dari ekuivalensi dapat diperoleh,

$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in B \cap A$$

Dan dengan aturan perluasan, dapat disimpulkan bahwa $A \cap B = B \cap A$

5. **Buktikan bahwa** $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$

Bukti:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (A \cap B) &\leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (A \cap B) \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\ &\leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B) \\ &\leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \\ &\leftrightarrow x\ A \setminus B \end{aligned}$$

6. **f : R → R di mana f(x) = 2x+5 adalah suatu fungsi.**

Buktikan.

f : R → R dikatakan suatu fungsi, apabila:

(i) ∀x, x ∈ R → ∃y, y ∈ R sedemikian sehingga y = f(x) dan

(ii) $\forall x_1, x_2 \in$ R , $x_1 = x_2 \rightarrow$ f(x_1) = f(x_2)

Bukti:

(i) Ambil sebarang x ∈ R

Pilih y = 2x+5

Perhatikan:

y = 2x+5

y = f(x)

(ii) Ambil sebarang $x_1, x_2 \in$ R diperoleh $x_1 = x_2$

Perhatikan

$y_1 = 2x_1+5$

$y_2 = 2x_2+5$

Karena $x_1 = x_2$

$y_1 = 2x_1+5$

y_1 = 2x_2+5

y_1 = y_2 = f(x)

Jadi, f : R $\rightarrow$ R di mana f(x) = 2x+5 adalah suatu fungsi, TERBUKTI.

f : $R \rightarrow R$ di mana f(x) = 2x+5 adalah fungsi surjektif.

Buktikan.

f : $R \rightarrow R$ dikatakan fungsi surjektif, apabila:

∀y ∈ R $\rightarrow$ ∃x, x ∈ R sedemikian sehingga y = f(x)

Bukti:

Ambil sebarang y ∈ R

maka terdapat

x = $\frac{(y-5)}{2}$,

sehingga

f(x) = 2x+5 = 2$\left(\frac{(y-5)}{2}\right)$ + 5 = y − 5 + 5 = y.

Jadi, f : R $\rightarrow$ R di mana f(x) = 2x+5 adalah fungsi surjektif, TERBUKTI.

f : R $\rightarrow$ R di mana f(x) = 2x + 5 adalah fungsi injektif.

Bukti.

f : R $\rightarrow$ R dikatakan fungsi injektif, apabila ∀x_1, x_2 ∈ R, dengan $x_1 \neq x_2 \rightarrow$ f(x_1) ≠ f(x_2)

sehingga kontraposisinya:

∀x_1, x_2 ∈ R , dengan f(x_1) = f(x_2)$\rightarrow$ x_1 = x_2

Bukti:

Misalkan (x_1, y) dan (x_2, y) ∈ R

Ini berarti

y = 2x_1+5

y = 2x_2+5

sehingga diperoleh

2x_1+5 = 2x_2+5

Dengan sama-sama menambah kedua sisi dengan −5 dan mengalikan kedua sisi dengan $\frac{1}{2}$,

diperoleh x_1 = x_2

Jadi, f : R → R di mana f(x) = 2x+5 adalah fungsi injektif, TERBUKTI.

Jadi, f : R → R di mana f(x) = 2x+5 dikatakan fungsi bijektif karena f : R → R di mana f(x) = 2x+5 fungsi injektif dan fungsi surjektif.

7. **f : R → R di mana f(x) = 2x+1 adalah suatu fungsi.**

Buktikan.

f : R → R dikatakan suatu fungsi, apabila:

(i) ∀x, x ∈ R → ∃y, y ∈ R sedemikian sehingga y = f(x) dan

(ii) ∀x_1, x_2 ∈ R , x_1 = x_2→ f(x_1) = f(x_2)

Bukti:

(i) Ambil sebarang x ∈ R

Pilih y = 2x+1

Perhatikan:

y = 2x+1

y = f(x)

(ii) Ambil sebarang x_1, x_2 ∈ R diperoleh x_1 = x_2

Perhatikan

y_1 = 2x_1+1

y_2 = 2x_2+1

Karena x_1 = x_2

y_1 = 2x_1+1

y_1 = 2x_2+1

y_1 = y_2 = f(x)

Jadi, f : R → R di mana f(x) = 2x+1 adalah suatu fungsi, TERBUKTI.

f : R → R di mana f(x) = 2x+5 adalah fungsi surjektif.

Buktikan.

f : R → R dikatakan fungsi surjektif, apabila:

∀y ∈ R → ∃x, x ∈ R sedemikian sehingga y = f(x)

Bukti:

Ambil sebarang y ∈ R

maka terdapat

x = $\frac{(y-5)}{2}$,

sehingga

f(x) = 2x+1 = 2$\left(\frac{(y-5)}{2}\right)$ + 1 = y − 1 + 1 = y.

Jadi, f : $R \rightarrow R$ di mana f(x) = 2x+1 adalah fungsi surjektif, TERBUKTI.

f : $R \rightarrow R$ di mana f(x) = 2x+1 adalah fungsi injektif.

Buktikan.

f : $R \rightarrow R$ dikatakan fungsi injektif, apabila f : $R \rightarrow R$ dikatakan fungsi injektif, apabila:

$\forall x_1, x_2 \in R$, dengan $x_1 \neq x_2 \rightarrow$ f(x_1) ≠ f(x_2)

sehingga kontraposisinya:

$\forall x_1, x_2 \in R$, dengan f(x_1) = f(x_2)$\rightarrow$ x_1 = x_2

Bukti:

Misalkan (x_1, y) dan (x_2, y) ∈ f

Ini berarti

y = 2x_1+1

y = 2x_2+1

sehingga diperoleh

2x_1+1 = 2x_2+1

Dengan sama-sama menambah kedua sisi dengan -1 dan mengalikan kedua sisi dengan $\frac{1}{2}$,

diperoleh x_1 = x_2

Jadi, f : $R \rightarrow R$ di mana f(x) = 2x+1 adalah fungsi injektif, TERBUKTI.

Jadi, f : R → R di mana f(x) = 2x+1 dikatakan fungsi bijektif karena f : R → R di mana f(x) = 2x+1 fungsi injektif dan fungsi surjektif.

8. Selidiki $f(x) = x^2 - 1$

Bukti :

i. Cek Fungsi

Pertama-tama, tunjukkan apakah implikasi $x_1 = x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ bernilai benar.

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$(x_1)^2 - 1 = (x_2)^2 - 1$$
$$x_1^2 = x_2^2$$

Karena $x_1 = x_2$, mengakibatkan $f(x_1) = f(x_2)$ maka terbukti $f(x) = x^2 - 1$ adalah fungsi.

ii. Cek Injektif

Kedua, tunjukkan apakah implikasi $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ bernilai benar.

Berdasarkan yang pertama, dari $f(x_1) = f(x_2)$ diperoleh $x_1^2 = x_2^2$. Dari $x_1^2 = x_2^2$, tidak dicapai kesimpulan bahwa $x_1 = x_2$, kecuali jika x_1 dan x_2 memiliki tanda yang sama. Sebagai contoh $x_1 = 2$ dan $x_2 = -2, (2)^2 = (-2)^2$ tetapi 2 ≠ -2.

Jadi, $f(x) = x^2 - 1$ bukan fungsi injektif.

Namun, apabila domain dari fungsi tersebut kita batasi, (-∞,0] atau [0,∞), maka fungsi tersebut akan merupakan fungsi injektif pada domain (-∞,0] atau [0,∞).

iii. Cek Surjektif

Ketiga, tunjukkan apakah $\forall\, y \in Y, \exists x$ sedemikian sehingga $y = f(x)$ bernilai benar.

Karena dalam penulisan suatu penulisan suatu fungsi, misalkan tidak dituliskan domainnya, berarti domain fungsinya domain alami yaitu domain dimana saja fungsi tersebut terdefinisi. Dalam soal ini, f(x) terdefinisi pada bilangan real sehingga domainnya adalah x bilangan real. Kodomain dari fungsi tersebut adalah bilangan real juga. Jadi untuk membuktikan bahwa f(x) tersebut surjeksi maka harus ditunjukkan untuk semua $y \in R$ terdapat $x \in R$ sehingga $y = x^2 - 1$.

Lihat,

$$x = \pm\sqrt{y + 1}.$$

Ambil sebarang $y \in R$. kemungkinannya $y > 0, y = 0$, dan $y < 0$. Untuk y tak-negatif, terdapat $x = \pm\sqrt{y+1}$ sehingga $y = x^2 - 1$. Tapi, untuk $y < 0$ tidak terdapat x pada bilangan real.

Jadi, $f(x) = x^2 - 1$ juga bukan fungsi surjektif.

Nampak, jika dibatasi kodomainnya untuk bilangan real yang tak negatif maka fungsi tersebut akan merupakan fungsi surjektif.

iv. Kesimpulan

Karena $f(x) = x^2 - 1$ bukan fungsi injektif dan/atau fungsi surjektif maka $f(x) = x^2 - 1$ bukan fungsi bijektif. Namun, jika dibatasi domain dan kodomainnya maka akan menjadi fungsi bijektif. $f(x) = x^2 - 1$ merupakan fungsi bijektif apabila domainnya (-∞,0] atau [0,∞), dan kodomainnya adalah [0,∞).

9. Buktikan bahwa f: (0,1) → (0, ∞) dengan $f(x) = \frac{x}{1-x}$ merupakan fungsi bijektif

Bukti :

i. Cek Fungsi

Ambil $x \in (0,1)$ maka terdapat $y \in (0, \infty)$ dimana $y = \frac{x}{1-x} = f(x)$

Ambil $x_1, x_2 \in (0,1)$ dimana $x_1 = x_2$ maka diperoleh

$$f(x_1) = \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} = f(x_2)$$

$\therefore f(x) = \frac{x}{1-x}$ adalah fungsi.

ii. Cek Injektif

Ambil $x_1, x_2 \in (0,1)$ dimana $x1 \neq x2$, sehingga

$$f(x_1) = \frac{x_1}{1-x_1} \neq \frac{x_2}{1-x_2} = f(x_2)$$

$\therefore f(x) = \frac{x}{1-x}$ adalah fungsi injektif.

iii. Cek surjektif

Ambil $y \in (0, \infty)$, maka terdapat $x \in (0,1)$ dengan $x = \frac{y}{1+y}$, diperoleh:

$$f(x) = f\left(\frac{y}{1+y}\right) = \frac{\frac{y}{1+y}}{1 - \frac{y}{1+y}} = \frac{\frac{y}{1+y}}{\frac{1+y-y}{1+y}} = \frac{\frac{y}{1+y}}{\frac{1}{1+y}} = y$$

$\therefore f(x) = \frac{x}{1-x}$ adalah fungsi surjektif.

iv. Kesimpulan

Berdasarkan pembuktian i, ii, dan iii terbukti bahwa $f(x) = \frac{x}{1-x}$ adalah fungsi bijektif.

10. Buktikan: Fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dengan $f(x) = x^2 + 1$ adalah fungsi bijektif

Fungsi $f : A \to B$ dikatakan fungsi bijektif apabila $f : A \to B$ fungsi surjektif dan fungsi injektif

Pembuktian:

i. Fungsi surjektif akan ditunjukan $y \in \mathbb{R}^+$

Pilih $x = \sqrt{y-1}$ maka

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sqrt{y-1}\right)^2 + 1 \\ &= y - 1 + 1 \\ &= y \end{aligned}$$

ii. Fungsi injektif $\forall x_1, x_2$ akan ditunjukan $x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$(x_1)^2 + 1 = (x_2)^2 + 1$$
$$(x_1)^2 = (x_2)^2$$
$$x_1 = x_2$$

11. Buktikan: Fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dengan fungsi $f(x) = -x + 1$ adalah fungsi bijektif

i. Fungsi surjektif akan ditunjukan $y \in \mathbb{R}^+$

Pilih $x = 1 - y$ maka

$$f(x) = -(1 - y) + 1$$
$$f(x) = -1 + y + 1$$
$$f(x) = y$$

ii. Fungsi injektif $\forall x_1, x_2$ maka akan ditunjukan $x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$-x_1 + 1 = -x_2 + 1$$
$$-x_1 = -x_2$$
$$x_1 = x_2$$

12. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **di mana** $f(x) = |x|$ **adalah fungsi**

Bukti :

a. $\forall x,\ x \in \mathbb{R} \to \exists y, y \in \mathbb{R} \ni y = f(x)$

Ambil sebarang $x \in \mathbb{R}$

Pilih $y = |x|$

$$f(x) = |x|$$
$$y = |x|$$

Sehingga $y = f(x)$

b. $\forall x_1 x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 = x_2 \to y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$

Ambil sebarang $x_1 x_2 \in \mathbb{R}$

Pilih $y_1 = |x_1|$

$y_2 = |x_2|$

Karena $x_1 = x_2$ maka $y_1 = |x_1| = |x_2| = y_2$

Sehingga $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$

Jadi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di mana $f(x) = |x|$ adalah fungsi telah TERBUKTI

13. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ **dengan** $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ **adalah fungsi surjektif**

Bukti :

a. $\forall x,\ x \in \mathbb{R} \to \exists y, y \in \mathbb{R}^+ \ni y = f(x)$

Ambil sebarang $x \in \mathbb{R}$

Pilih $y = \sqrt{2x - 1}$

$$f(x) = \sqrt{2x - 1}$$

$$y = \sqrt{2x - 1}$$

Sehingga $y = f(x)$

b. $\forall x_1 x_2 \in \mathbb{R}\,,\ x_1 = x_2 \ \rightarrow\ y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$

Ambil sebarang $x_1 x_2 \in \mathbb{R}$

Pilih $y_1 = \sqrt{2x_1 - 1}$

$y_2 = \sqrt{2x_2 - 1}$

Karena $x_1 = x_2$ maka $y_1 = \sqrt{2x_1 - 1} = \sqrt{2x_2 - 1} = y_2$ atau $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$

Berdasarkan bukti (a) dan (b) maka $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ adalah fungsi sudah TERBUKTI

c. $\forall y \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \ni y = f(x)$

Ambil sebarang $y \in \mathbb{R}^+$

Pilih $x = \frac{y^2+1}{2}$

Sehingga $f(x) = \sqrt{2(\frac{y^2+1}{2}) - 1}$

$= \sqrt{y^2 + 1 - 1}$

$= \sqrt{y^2}$

$f(x) = y$

Jadi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ di mana $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ adalah fungsi surjekti telah TERBUKTI

14. Selidiki apakah fungsi f : R → R dengan $f(x) = x^2 + 2$ merupakan Fungsi Injektif atau bukan !

Ambil -1, 1 $\in$ $\mathbb{R}$ di domain, sehingga diperoleh

$f(-1) = (-1)^2 + 2 = 3$ dan $f(1) = (1)^2 + 2 = 3$

berakibat f(-1) = f(1).

Karena terdapat dua elemen di domain yang memiliki peta sama di kodomain.

Jadi, fungsi f : R → R dengan **$f(x) = x^2 + 2$ bukan Fungsi Injektif**

15. Selidiki apakah fungsi f : R → R dengan $g(x) = x^3 – 2$ merupakan Fungsi Injektif atau bukan !

Ambil sebarang $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ dengan $g(x_1) = g(x_2)$ akan ditunjukkan $x_1 = x_2$

Perhatikan :

$g(x_1) = g(x_2)$

$(x_1)^3 - 2 = (x_2)^3 - 2$

$(x_1)^3 = (x_2)^3$

$x_1 = x_2$

Jadi, fungsi $f : R \rightarrow R$ dengan $g(x) = x^3 - 2$ merupakan Fungsi Injektif

16. $f : R \rightarrow R^+$ di mana $f(x) = x^2$ merupakan fungsi surjektif

Bukti :

Dapat dikatakan fungsi apabila

1. $\forall x, x \in R \rightarrow \exists y, y \in R^+ \ni y = f(x)$

   Ambil sebarang $x \in R$

   Pilih $y = x^2$

   $y = x^2 = f(x)$

   $y = f(x)$

2. $\forall x_1\, x_2 \in R, x_1 = x_2 \rightarrow y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$

   Ambil sebarang $x_1\, x_2 \in R$

   Pilih $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$

   Karena $x_1 = x_2$ maka $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$

   Sehingga $f(x) = x^2$ Terbukti

$f(x) = x^2$ dikatakan fungsi surjektif apabila

$\forall y \in R^+ \rightarrow \exists x \in R \ni y = f(x)$

Ambil sebarang $y \in R^+$

Pilih = $\sqrt{y}$

$f(x)= x^2$

$= (\sqrt{y})^2$

$= y$

Sehingga $f(x) = x^2$ merupakan fungsi surjektif Terbukti

17. $f : R \rightarrow R$ dengan $f(x) = 5\text{-}7x^2$ apakah merupakan sebuah relasi fungsi?

Bukti :

1) Pertama-tama, ambil sembarang x ϵ R, pilih y = 5-7x^2 akan ditunjukkan y = f (x)

   Karena x ϵ R → f(x) = 5-7x^2 = y ϵ R

2) Lalu tunjukkan apakah implikasi $x_1 = x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ bernilai benar.

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$5\text{-}7x_1^2 = 5 - 7x_2^2$$

$$-7x_1^2 = -7x_2^2$$

$$-x_1^2 = -x_2^2$$

$$x_1^2 = x_2^2$$

   Karena $x_1 = x_2$, mengakibatkan $f\ (x_1) = f\ (x_2)$ maka terbukti f(x) = 5-7x^2 adalah fungsi.

BAB III
PENUTUP

3.1 Kesimpulan

Materi yang telah diuraikan diatas, dapat dirangkum sebagai berikut.

1. Himpunan adalah sebuah koleksi dari onjek-onjek yang terdefinisi dengan baik.
2. Aljabar himpunan adalah hukum-hukum yang berlaku pada himpunan untuk menyelesaikan suatu masalah dalam himpunan.
3. Konsep fungsi dan pembuktian ini digunakan untuk memberikan gambaran konkrit dari sebuah analisis dilihat dari segi perhitungan matematika.
4. Sifat-sifat fungsi terbagi menjadi tiga yaitu: fungsi injektif, fungsi subjektif, dan fungsi bijektif.
5. Manfaat mempelajari materi ini adalah membantu setiap orang yang mempelajari logika untuk berpikir secara rasional, kritis, lurus, meningkatkan kemampuan berpikir secara abstrak, cermat, dan objektif, menambah kecerdasan dan meningkatkan kemampuan berpikir secara tajam dan mandiri.

3.2 Saran

Kami sadar dalam pembuatan makalah ini masih sangat jauh dari kesempurnaan, baik dalam penulisan dan kata-kata yang ada di dalam makalah ini. Kami berharap para pembaca dapat memahami dan mengerti semua pembahasan yang kami paparkan dala makalah ini. Selain itu, kritik dan saran kami perlukan untuk membangun dalam pembuatan makalah kami untuk kedepannya.