MAKALAH PEMETAAN ATAU FUNGSI

Diajukan untuk Memenuhi Tugas Proyek 2
Mata Kuliah Dasar-Dasar Matematika
Dosen Pengampu: Drs. Ponco Sujatmiko, M.Si.

Disusun oleh Tim 2 :

1. Anggi Juniarti Pertiwi	K1321012
2. Asharrul Basid	K1321018
3. Camelia Theana Rahmawati	K1321026
4. Faishal ‘Arif Syarifudin	K1321034
5. Iffah Khairina	K1321046
6. Maretha Putri Axandra	K1321052
7. Raras Barokah Nursalima	K1321066
8. Sintia Kartika Nur Fajriani	K1321076

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SEBELAS MARET

2021

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa karena atas rahmat dan hidayah-Nya, kami dapat menyelesaikan tugas makalah yang berjudul Makalah Pemetaan atau Fungsi ini tepat pada waktunya.

Adapun tujuan dari penulisan dari makalah ini adalah untuk memenuhi Tugas Proyek 2 pada mata kuliah Dasar-Dasar Matematika tahun akademik 2021/2022. Selain itu, makalah ini juga bertujuan untuk menambah wawasan dan menanamkan konsep yang benar tentang pemetaan atau fungsi bagi para pembaca serta para penyusun.

Kami mengucapkan terima kasih kepada Bapak Drs. Ponco Sujatmiko, M.Si. selaku dosen mata kuliah Dasar-Dasar Matematika yang telah memberikan tugas ini sehingga kami dapat menambah pengetahuan dan pemahaman terkait pemetaan atau fungsi. Kami juga mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu selama proses penyusunan sehingga kami dapat menyelesaikan makalah ini.

Kami menyadari bahwa makalah yang kami tulis ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, kami mengharap kritik dan saran yang membangun dari para pembaca agar kami dapat menjadi lebih baik kedepannya.

Surakarta, 9 Desember 2021

Penyusun

DAFTAR ISI

MAKALAH PEMETAAN ATAU FUNGSI 1
KATA PENGANTAR 2
DAFTAR ISI 3
BAB I 4
A. Latar Belakang 4
B. Rumusan Masalah 4
C. Tujuan 4
BAB II 5
A. Pengertian Fungsi 5
B. Notasi, Daerah Asal, Daerah Kawan, dan Daerah Hasil Suatu Fungsi 5
C. Jenis-Jenis Fungsi 6
D. Pembahasan Soal-Soal 8
BAB III 21
A. Kesimpulan 21
B. Saran 21
DAFTAR PUSTAKA 22

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang sangat erat dengan suatu bilangan. Matematika juga merupakan bahasa, dimana bahasa pada matematika tidak memiliki makna ambigu (ganda) yaitu selalu pasti. Matematika banyak memegang peran penting dalam pemecahan masalah di setiap bidang kehidupan. Kemampuannya menerjemahkan berbagai fenomena kehidupan dalam bahasa matematika sebagai ilmu dasar yang harus dikuasai oleh setiap orang.

Hubungan antara satu elemen himpunan tepat dengan satu elemen pada himpunan yang lain disebut fungsi. Dalam fungsi ada yang dikenal dengan grafik, grafik fungsi ini menggambarkan hubungan matematik antara dua variabel atau lebih.

B. Rumusan Masalah

1. Apakah Pengertian Fungsi atau Pemetaan ?
2. Bagaimana notasi dari fungsi?
3. Bagaimana definisi dan rumus pemetaan?
4. Apa saja jenis-jenis Fungsi?

C. Tujuan

1. Untuk mengetahui pengertian Fungsi atau Pemetaan.
2. Untuk mengetahui Notasi dari suatu Fungsi.
3. Untuk mengetahui definisi dan rumus pemetaan.
4. Untuk mengetahui jenis- jenis Fungsi.

BAB II
ISI

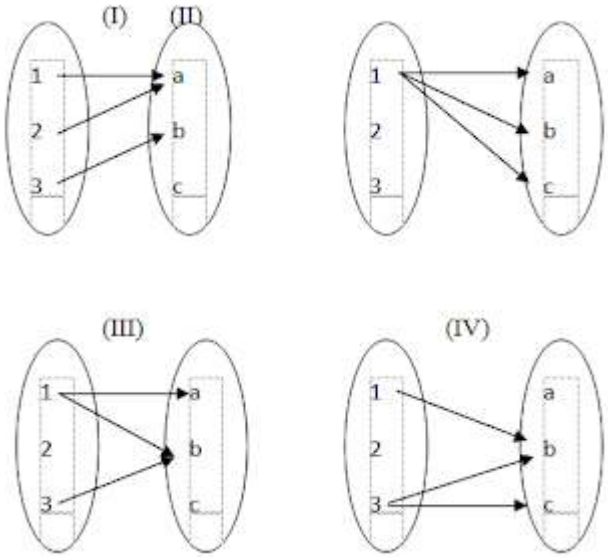
A. Pengertian Fungsi

Fungsi atau pemetaan dari himpunan A ke himpunan B adalah relasi khusus yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B. Ada dua syarat yang harus dipenuhi supaya relasi tersebut dapat dikatakan sebagai fungsi yakni:

Pertama, setiap anggota A mempunyai pasangan di B. Jika ada salah satu anggota A tidak memiliki pasangan di B, maka relasi tersebut bukan fungsi.

Kedua, setiap anggota A dipasangkan dengan tepat satu anggota B. Jika anggota A memiliki lebih dari satu pasangan maka relasi itu bukan fungsi. Syarat kedua ini tidak berlaku untuk sebaliknya, maksudnya jika syarat pertama dipenuhi anggota B boleh memiliki pasangan lebih dari satu di anggota A.

Contoh:



Pada diagram panah diatas yang merupakan pemetaan adalah diagram (I) dan (III), karena pada diagram (I) dan (III) himpunan A sudah tepat memiliki satu pasangan. Sedangkan untuk diagram (II) dan (IV) bukan pemetaan, karena ada himpunan A yang tidak memiliki pasangan di himpunan B.

B. Notasi, Daerah Asal, Daerah Kawan, dan Daerah Hasil Suatu Fungsi

Fungsi *f* dari himpunan A ke himpunan B ditulis : *f:* A→B (dibaca: fungsi *f* memetakan A ke B. Apabila f memetakan suatu *x* anggota A *(x € A)* ke suatu *y* anggota B *(y € B)* maka *y* disebut *peta* dari *x* oleh *f* atau *y=f(x),* sedangkan *x* disebut *prapeta* dari *f(x).* Jika *f* memetakan setiap *x € A* ke *f(x) € B* maka *f: A→B* ditentukan oleh *f:x*

$\rightarrow f(x)$ dengan $f(x)$ menyatakan rumus fungsi dari f. Untuk suatu a € A maka $f(a)$ merupakan nilai fungsi f untuk $x = a$.

Selanjutnya, pada fungsi $f : A \rightarrow B$ berlaku pula hal-hal sebagai berikut:

a. Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) dari f, ditulis D

b. Himpunan B disebut daerah kawan *(kodomain)* dari f

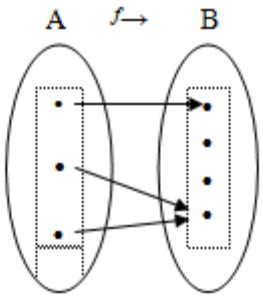
c. Himpunan dari semua peta f di B disebut daerah hasil *(range)* dari fungsi tersebut, ditulis Rf.

Tampak bahwa Rf adalah himpunan bagian dari kodomain.

C. Jenis-Jenis Fungsi

1. Fungsi Injektif (satu-satu)

Apabila setiap anggota di A dipetakan pada dua anggota yang berbeda di B maka $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif atau *satu-satu*. Dengan kata lain, suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif apabila untuk $a_1 \neq a_2$, berakibat $f(a_1) \neq f(a_2)$ atau ekuivalen dengan jika $f(a_1) = f(a_2)$, berakibat $a_1 = a_2$.



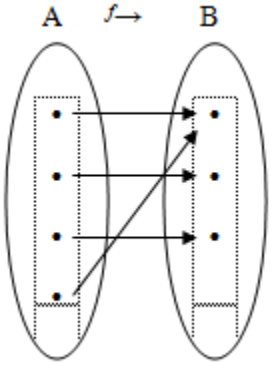
Contoh:

a. Fungsi $f : A \rightarrow B$ yang didefinisikan oleh $f(x) = 2x$

b. Fungsi $f : R \rightarrow R$ (R € himpunan bilangan real) yang didefinisikan oleh $f(x) = x^2$ bukan fungsi satu-satu sebab $f(-2) = (-2)^2 = (2)^2 = f(2)$.

2. Fungsi Surjektif (Onto)

Misalkan f adalah suatu fungsi yang memetakan A ke B maka daerah hasil $f(A)$ dari f adalah himpunan bagian dari B atau $f(A)$ C B. Jika $f(A) = B$ yang berarti setiap anggota di B pasti merupakan peta dari sekurang-kurangnya satu anggota di A maka dikatakan f adalah fungsi surjektif atau "f memetakan A onto B". Fungsi surjektif $f : A \rightarrow B$ ditunjukkan pada gambar berikut,



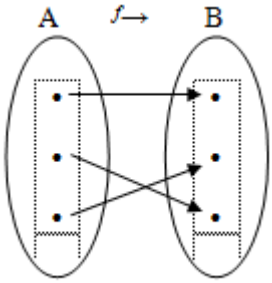
Contoh:

a. Misal $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{1\}$. Fungsi $f : A \rightarrow B$ yang didefinisikan oleh $f(x) = 1$ adalah fungsi surjektif, sebab daerah hasil dari f sama dengan kodomain dari f.

b. Fungsi $f : R \rightarrow R$ yang didefinisikan oleh $f(x) = x^2$ bukan fungsi surjektif, sebab himpunan bilangan negatif tidak dimuat oleh hasil fungsi tersebut.

3. Fungsi Bijektif (Korespondensi satu-satu)

Jika suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ merupakan fungsi injektif sekaligus fungsi surjektif, maka f adalah fungsi yang bijektif atau "A dan B berada dalam korespondensi satu-satu" seperti pada gambar berikut,



Contoh:

a. Fungsi yang memasangkan bilangan real ke dirinya sendiri atau $f : R \rightarrow R$ yang dirumuskan oleh $f(x) = x$, jelas merupakan fungsi yang bijektif.

b. Fungsi f yang memasangkan setiap negara di dunia dengan Ibukota negara-negara di dunia adalah fungsi bijektif karena tidak ada satu kota pun yang menjadi Ibukota dua negara yang berlainan.

D. Pembahasan Soal-Soal

1. Relasi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x - 3$, apakah merupakan fungsi, jika ya apakah fungsi tersebut merupakan fungsi surjektif, injektif, dan bijektif?

   1) Relasi tersebut merupakan fungsi

      Bukti :

      a. Ambil sebarang $x \in \mathbb{R}$ pilih $y = 2x - 3 \in \mathbb{R}$ akan ditunjukkan $y = f(x)$

         Karena $x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = 2x - 3 = y \in \mathbb{R}$

      b. Ambil sebarang x_1 , $x_2 \in R$ dengan $x_1 = x_2$ akan ditunjukkan $f(x_1) = f(x_2)$

         Perhatikan

         $f(x_1) = 2x_1 - 3$

         $f(x_2) = 2x_2 - 3$

         Diketahui $x_1 = x_2$

         $f(x_1) = f(x_2)$

   2) Fungsi Surjektif

      Ambil sebarang $y \in \mathbb{R}$ pilih $x = \frac{y+3}{2} \in \mathbb{R}$ akan ditunjukkan $y = f(x)$

      Perhatikan :

      $f(x) = 2x - 3$

      $f(x) = 2\left(\frac{y+3}{2}\right) - 3$

      $f(x) = y + 3 - 3$

      $f(x) = y$

      $\therefore f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x - 3$ fungsi surjektif

   3) Fungsi Injektif

      Ambil sebarang x_1 , $x_2 \in \mathbb{R}$ dengan $f(x_1) = f(x_2)$ akan ditunjukkan $x_1 = x_2$

      Perhatikan :

      $f(x_1) = f(x_2)$

      $2x_1 - 3 = 2x_2 - 3$

      $2x_1 - 3 + 3 = 2x_2$

      $2x_1 = 2x_2$

      $x_1 = x_2$

      $\therefore f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x - 3$ fungsi injektif

4) Fungsi Bijektif

Karena fungsi tersebut surjektif dan injektif maka $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x - 3$ merupakan fungsi bijektif.

2. Relasi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ dengan $f(x) = (2x + 3)^4$, apakah merupakan fungsi, jika ya apakah fungsi tersebut merupakan fungsi surjektif, injektif, dan bijektif?

1) Relasi tersebut merupakan fungsi

Bukti :

a. Ambil sebarang $x \in \mathbb{R}$ pilih $y = (2x + 3)^4 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ akan ditunjukkan $y = f(x)$

Perhatikan :

$x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = (2x + 3)^4 = y$, $y \in \mathbb{R}^+ \leftrightarrow y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

b. Ambil sebarang x_1 , $x_2 \in \mathbb{R}$ dengan $x_1 = x_2$ akan ditunjukkan $f(x_1) = f(x_2)$

Perhatikan

$f(x_1) = (2x_1 + 3)^4$

$f(x_2) = (2x_2 + 3)^4$

Diketahui $x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2)$

2) Fungsi Surjektif

Ambil sebarang $y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ pilih $x = \frac{\sqrt[4]{y} - 3}{2} \in \mathbb{R}$ akan ditunjukkan $y = f(x)$

$f(x) = (2x + 3)^4$

$f(x) = (2(\frac{\sqrt[4]{y} - 3}{2}) + 3)^4$

$f(x) = (\sqrt[4]{y} - 3 + 3)^4$

$f(x) = (\sqrt[4]{y})^4$

$f(x) = y$

$\therefore f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ dengan $f(x) = (2x + 3)^4$ fungsi surjektif

3) Fungsi Injektif

Ambil sebarang x_1 , $x_2 \in \mathbb{R}$ dengan $f(x_1) = f(x_2)$ akan ditunjukkan $x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2)$

$(2x_1 + 3)^4 = (2x_2 + 3)^4$

$2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$

$2x_1 + 3 - 3 = 2x_2$

$2x_1 = 2x_2$

$x_1 = x_2$

$\therefore f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ dengan $f(x) = (2x + 3)^4$ fungsi injektif

4) Fungsi Bijektif

Karena fungsi tersebut surjektif dan injektif maka $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ dengan $f(x) = (2x + 3)^4$ merupakan fungsi bijektif.

3. Diberikan $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dengan $f(x)=x^2-1$. Apakah f fungsi?

Jawab:
Fungsi f dikatakan fungsi apabila memenuhi $\forall x.x \in \mathbb{N} \rightarrow \exists! y, y \in \mathbb{N} \ni y=f(x)$.
Artinya : (i) $\forall x.x \in \mathbb{N} \rightarrow \exists y, y \in \mathbb{N} \ni y=f(x)$ dan,
(ii) $\forall x_1\ x_2 \in \mathbb{N}\ \ x_1=x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$
Bukti:
(i) $\forall x.x \in \mathbb{N} \rightarrow \exists y, y \in \mathbb{N} \ni y=f(x)$

Ambil sebarang $x \in \mathbb{N}$, akan ditunjukkan $\exists y, y \in \mathbb{N} \ni y=f(x)$
Perhatikan $y=x^2-1$
$y+1=x^2$
$\sqrt{y+1} = x$
Sehingga $f(x) =x^2-1$
$= (\sqrt{y+1})^2 - 1$
$= y+1-1$
$= y$
Telah diperoleh $y=f(x)$, maka TERBUKTI
Jadi, syarat (i) telah terpenuhi.

(ii) $\forall x_1\ x_2 \in \mathbb{N}\ \ x_1=x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Ambil sebarang $x_1\ x_2 \in \mathbb{N}$ dengan $x_1=x_2$, akan ditunjukkan $f(x_1) = f(x_2)$
Perhatikan $f(x_1) = (x_1)^2 - 1$
$f(x_1) = (x_2)^2 - 1$
karena $x_1 = x_2$ sehingga $f(x) = x^2 - 1$
$f(x_1) = (x_1)^2 - 1$
$= (x_2)^2 - 1$
$= f(x_2)$
Telah diperoleh $f(x_1) = f(x_2)$, maka TERBUKTI
Jadi, syarat (ii) telah terpenuhi.

Karena syarat (i) dan (ii) telah terpenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa fungsi f merupakan sebuah fungsi.

4. Diberikan fungsi f : $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dengan f(x)=2x+1. Apakah fungsi f bijektif?

Jawab:
Fungsi f : $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dikatakan fungsi bijektif apabila f : $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif.

a. Fungsi f : $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ surjektif jika memenuhi $\forall y.y \in \mathbb{R} \rightarrow \exists x_o \in \mathbb{R} \ni y=f(x_o)$

Bukti:
Ambil sebarang $y \in \mathbb{R}$, akan ditunjukkan bahwa $\exists x_o \in \mathbb{R} \ni y=f(xo)$
y=2x+1
y-1=2x
$\frac{y-1}{2} = x$
Sehingga $x_o= \frac{y-1}{2}$
Perhatikan f(x)=2x+1
$f(x_o)=2x_o+1$
$=2(\frac{y-1}{2})+1$
=y-1+1
=y
Telah diperoleh $y=f(x_o)$, maka TERBUKTI.
Jadi, fungsi f merupakan fungsi surjektif.

b. Fungsi f : $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ injektif jika memenuhi $\forall x_1\ x_2 .\ x_1\ x_2 \in \mathbb{R} \ni x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$.

Supaya lebih mudah dalam membuktikan, gunakan pernyataan yang ekuivalen yaitu kontraposisinya $\forall x_1\ x_2 \in \mathbb{R}\ f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1=x_2$
Bukti:
Ambil sebarang $x_1\ x_2 \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $f(x_1) = f(x_2)$, akan ditunjukkan $x_1=x_2$
Perhatikan $f(x_1) = f(x_2)$
$2x_1+1 = 2x_2+1$
$2x_1 = 2x_2$
$x_1 = x_2$
Telah diperoleh $x_1 = x_2$, maka TERBUKTI
Jadi, fungsi f merupakan fungsi injektif.

Karena telah terbukti bahwa fungsi f merupakan fungsi surjektif dan injektif, maka fungsi f merupakan fungsi bijektif.

5. Relasi f : Z → Z dengan f(x) = x - 1, apakah merupakan fungsi, jika ya apakah fungsi tersebut merupakan fungsi surjektif, injektif, dan bijektif?

1) Relasi tersebut merupakan fungsi

Bukti :

a. Ambil sebarang $x \in Z$ pilih $y = x - 1 \in z$ akan ditunjukkan y = f(x)

Karena $x \in Z \rightarrow f(x) = x -1 = y \in Z$

b. Ambil sebarang x_1 , x_2 ϵ R dengan $x_1 = x_2$ akan ditunjukkan $f(x_1) = f(x_2)$

Perhatikan

$f(x_1) = x_1 - 1$

$f(x_2) = x_2 - 1$

Diketahui $x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2)$

2) Fungsi Surjektif

Ambil sebarang y ϵ Z pilih $x = y + 1$ ϵ Z akan ditunjukkan y = f(x)

Perhatikan :

$f(x) = x - 1$

$f(x) = (y+1) - 1$

$f(x) = y + 1 - 1$

$f(x) = y$

$\therefore f : Z \rightarrow Z$ dengan $f(x) = x - 1$ fungsi surjektif

3) Fungsi Injektif

Ambil sebarang x_1 , x_2 ϵ Z dengan $f(x_1) = f(x_2)$ akan ditunjukkan $x_1 = x_2$

Perhatikan :

$f(x_1) = f(x_2)$

$x_1 - 1 = x_2 - 1$

$x_1 - 1 + 1 = x_2$

$x_1 = x_2$

$\therefore f : Z \rightarrow Z$ dengan $f(x) = x - 1$ fungsi injektif

4) Fungsi Bijektif

Karena fungsi tersebut surjektif dan injektif maka $f : Z \rightarrow Z$ dengan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi bijektif.

6. Relasi f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan f(x) = 3x - 5, apakah merupakan fungsi, jika ya apakah fungsi tersebut merupakan fungsi surjektif, injektif, dan bijektif?

   1) Relasi tersebut merupakan fungsi

      Bukti :

      a. Ambil sebarang x ϵ $\mathbb{R}$ pilih y = 3x - 5 ϵ $\mathbb{R}$ akan ditunjukkan y = f(x)

         Karena x ϵ $\mathbb{R}$ → f(x) = 3x -5 = y ϵ $\mathbb{R}$

      b. Ambil sebarang x_1 , x_2 ϵ R dengan $x_1 = x_2$ akan ditunjukkan $f(x_1) = f(x_2)$

         Perhatikan

         $f(x_1) = 3x_1 - 5$

         $f(x_2) = 3x_2 - 5$

         Diketahui $x_1 = x_2$

         $f(x_1) = f(x_2)$

   2) Fungsi Surjektif

   Ambil sebarang y ϵ $\mathbb{R}$ pilih x = $\frac{y+5}{3}$ ϵ Z akan ditunjukkan y = f(x)

   Perhatikan :

   f(x) = 3x - 5

   f(x) = 3($\frac{y+5}{3}$) - 5

   f(x) = y + 5 - 5

   f(x) = y

   ∴f : R → R dengan f(x) = 3x - 5 fungsi surjektif

   3) Fungsi Injektif

   Ambil sebarang x_1 , x_2 ϵ R dengan $f(x_1) = f(x_2)$ akan ditunjukkan $x_1 = x_2$

   Perhatikan :

   $f(x_1) = f(x_2)$

   $3x_1 - 5 = 3x_2 - 5$

   $3x_1 - 5 + 5 = 3x_2$

   $3x_1 = 3x_2$

   $x_1 = x_2$

   ∴f : R → R dengan f(x) = 3x - 5 fungsi injektif

   4) Fungsi Bijektif

   Karena fungsi tersebut surjektif dan injektif maka f : R → R dengan

$f(x) = 3x - 5$ merupakan fungsi bijektif.

7. Diberikan fungsi $f : R \rightarrow R$ yang didefinisikan sebagai berikut

$f(x) = x^2$, jika $x < 0$

$f(x) = -x$, jika $x \geq 0$

Buktikan bahwa fungsi f bijektif !

Jawab:

Fungsi f bijektif jika fungsi f injektif dan surjektif

- Akan dibuktikan fungsi f injektif berarti:

$(\forall x1,x2)\ f(x1) = f(x2) \Rightarrow x1 = x2$ atau $(\forall x1,x2)\ x1 \neq x2 \Rightarrow f(x1) \neq f(x2)$

-Saat $x < 0$

Ambil sebarang x1 , x2 dengan $f(x1) = f(x2)$

$f(x1) = f(x2)$

$x_1^2 = x_2^2$

$\sqrt{x12} = \sqrt{x22}$

$| x1 | = | x2 |$

$-x1 = -x2$

$x1 = x2$ karena $| x | = -x$ saat $x < 0$

Terbukti bahwa saat $x < 0$ berlaku $(\forall x1,x2)\ f(x1) = f(x2) \Rightarrow x1 = x2$, berarti f injektif di $x < 0$

Ambil sebarang x1 , $x2 \geq 0$ dengan $f(x1) = f(x2)$

$f(x1) = f(x2)$

$-x1 = -x2$

$x1 = x2$

Terbukti bahwa saat $x \geq 0$ berlaku $(\forall x1,x2)\ f(x1) = f(x2) \Rightarrow x1 = x2$, berarti f injektif

-Saat $x \geq 0$

Ambil sebarang $x1 < 0$ dan $x2 \geq 0$ maka $x1 \neq x2$

akan dibuktikan $(\forall x1,x2)\ x1 \neq x2 \Rightarrow f(x1) \neq f(x2)$

andaikan $f(x1) = f(x2)$ berarti $x12 = -x2$

$x1 = -\sqrt{-x2}$

merupakan kontradiksi karena tidak ada nilai x1 dan x2 yang memenuhi.

Terbukti bahwa $(\forall x1,x2)\ x1 \neq x2 \Rightarrow f(x1) \neq f(x2)$. Berarti f injektif di mana-mana

- Akan dibuktikan f fungsi surjektif berarti $(\forall y)(\exists x)\ (y = f(x))$

-Saat $x < 0$,

Misal $f(x) = y$ berarti

$y = x^2$

$\sqrt{y} = \sqrt{x^2}$

$\sqrt{y} = | x |$

$\sqrt{y} = -x$
$x = -\sqrt{y}$ karena $|x| = -x$ saat $x < 0$

Ambil sebarang y maka terdapat $x = -\sqrt{y} \ni f(x) = f(-\sqrt{y})^2 = y$
Terbukti bahwa saat $x < 0$ berlaku $(\forall y)(\exists x)\ (y = f(x))$ f surjektif di $x < 0$

-Saat $x \geq 0$

Misal $f(x) = y$ berarti $y = -x$ maka $x = -y$

Ambil sebarang y maka terdapat $x = -y \ni f(x) = f(-y) = -(-y) = y$

Terbukti bahwa saat $x \geq 0$ berlaku $(\forall y)(\exists x)\ (y = f(x))$ f surjektif di $x \geq 0$

Berarti f surjektif dimana-mana

- Karena f injektif dan surjektif maka f bijektif (Terbukti)

8. Jika $f : R \to R$ dengan $f(x) = 4 + 3x$. Buktikan bahwa
   a. f(x) adalah fungsi
   b. f(x) adalah fungsi injektif
   c. f(x) adalah fungsi surjektif
   d. f(x) adalah fungsi bijektif

Jawab :

a. Bukti f(x) adalah fungsi
   - $\forall x \in R \to \exists y \in R \ni y = f(x)$
     Ambil sebarang $x \in R$ pilih $y = 4+3x$ akan ditunjukkan $y=f(x)$
     Karena $x \in R$, $y = 4+3x \to y \in R$
     $y = f(x)$
   - $\forall x_1, x_2 \in R$, $x_1 = x_2 \to f(x_1) = f(x_2)$
     Ambil sebarang $x_1, x_2 \in R$, pilih $f(x_1) = 4+3x_1$
     $f(x_2) = 4+3x_2$
     Dimana $x_1 = x_2$ maka $f(x_1) = f(x_2)$

   Maka $f : R \to R$, $f(x) = 4 + 3x$ terbukti merupakan fungsi

b. Bukti injektif
   $\forall x_1, x_2 \in R$, $x_1 = x_2 \to f(x_1) = f(x_2)$
   Ambil sebarang $x_1 = x_2 \in Df$ dengan $f(x_1) = f(x_2)$ akan ditunjukkan $x_1 = x_2$

$$4+3x_1 = 4+3x_2$$
$$3x_1 = 3x_2$$
$$x_1 = x_2$$

$\therefore f : R \to R$ dengan $f(x) = 4 + 3x$ fungsi injektif

c. Bukti surjektif

$\forall y \in R \rightarrow \exists x_o \in R \ \ni \ y = f(x_o)$

Ambil sebarang y$\in R$, pilih $x_o \in R$ akan dibuktikan y=f(x_o)

Pilih $x_o = \frac{y-4}{3}$, f(x_o)= 4+3x_o

f(x_o)= 4+3($\frac{y-4}{3}$)

f(x_o)= 4+y-4

f(x_o)= y

∴ f : $R \rightarrow R$ dengan f(x) = 4 + 3x fungsi surjektif

d. Bukti bijektif

Karena fungsi tersebut surjektif dan injektif maka f : $R \rightarrow R$ dengan f(x) = 4 + 3x merupakan fungsi bijektif.

9. Jika f : $N \rightarrow N$ dengan f(x) = $4x^3 - 5$. Buktikan bahwa
   a. f(x) adalah fungsi
   b. f(x) adalah fungsi injektif
   c. f(x) adalah fungsi surjektif
   d. f(x) adalah fungsi bijektif

Jawab :

a. Bukti f(x) adalah fungsi

- $\forall x \in N \rightarrow \exists y \in N \ \ni y = f(x)$

  Ambil sebarang x$\in N$ pilih y = $4x^3 - 5$ akan ditunjukkan y=f(x)

  Karena x$\in N$, y = $4x^3 - 5 \rightarrow$ y $\in N$

  y = f(x)

  dan

- $\forall x_1, x_2 \in N$, $x_1 = x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

  Ambil sebarang $x_1, x_2 \in N$, pilih f(x_1) = $4x_1^3$-5

  f(x_2) = $4x_2^3$-5

  Dimana $x_1 = x_2$ maka f(x_1) = y_1= $4x_1^3$-5

  = $4x_2^3$-5

  = y_2

  = f(x_2)

∴Maka f : $N \rightarrow N$ dengan f(x) = $4x^3 - 5$ terbukti merupakan fungsi

b. Bukti injektif

$\forall x_1, x_2 \in N$, $x_1 = x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Ambil sebarang $x_1 = x_2 \in$ Df dengan f(x_1)=f(x_2) akan ditunjukkan $x_1 = x_2$

$4x_1^3 - 5 = 4x_2^3 - 5$

$4x_1^3 = 4x_2^3$

$x_1^3 = x_2^3$

$$x_1^3 - x_2^3 = 0$$
$$(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2) = 0$$
$$x_1-x_2=0 \quad \cup \quad x_1^2+x_1x_2+x_2^2 \neq 0 \text{ karena } x_1 , x_2 \in N$$
$$x_1=x_2$$

$\therefore$ f : $N \rightarrow N$ dengan f(x) = $4x^3 - 5$ fungsi injektif

c. Bukti surjektif

$\forall y \in N \rightarrow \exists x_o \in N \ni y = f(x_o)$

Ambil sebarang y$\in N$, pilih $x_o \in N$ akan dibuktikan y=f(x_o)

Pilih $x_o = \sqrt[3]{\frac{y+5}{4}}$, f(x_o)= $4x^3 - 5$

$$f(x_o) = 4(\sqrt[3]{\frac{y+5}{4}})^3 - 5$$
$$f(x_o) = 4\ (\frac{y+5}{4}) - 5$$
$$f(x_o) = y+5-5$$
$$f(x_o) = y$$

$\therefore$ f : $N \rightarrow N$ dengan f(x) = $4x^3 - 5$ fungsi surjektif

d. Bukti bijektif

Karena fungsi tersebut surjektif dan injektif maka f : $N \rightarrow N$ dengan f(x) = $4x^3 - 5$ merupakan fungsi bijektif.

10. Bila A,B dan C masing-masing terbatas,buktikan bahwa n(A U B U C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A ∩B)-n(A ∩ C)-n(B ∩ C)+n(A ∩ B ∩ C)

Bukti:

n(A U B) = n(A)+n(B)-n(A ∩ B)

n(A U B U C)=n(A U B)+n(C)-n ((A U B) ∩ C)

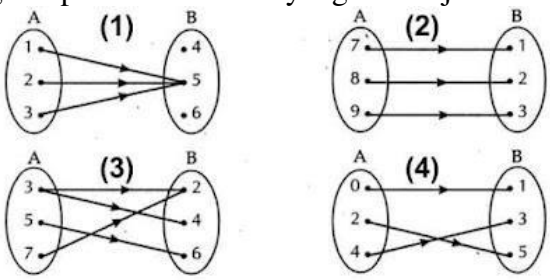
n(A U B)+n(C)-n((A ∩ C) U (B ∩ C))

n(A U B)+n(C)- n((A ∩ C)+n(B ∩ C)-n(A ∩ C ∩ B ∩ C))

n(A)+n(B)-n(A ∩ B)+n(C)-n(A ∩ C)-n(B ∩ C)+n(A ∩ B ∩ C)

n((A)+n(B)+n(C)- n(A ∩ B)- ,n (A ∩ C)-n(B ∩ C)+n(A ∩ B ∩ C)

11. Manakah gambar diagram panah berikut ini yang menunjukkan fungsi bijektif?



Jawaban: Fungsi f : A → B disebut fungsi bijektif atau berkorespondensi satu-satu, jika f adalah fungsi surjektif dan juga fungsi injektif sekaligus. Berdasarkan konsep tersebut maka diagram panah yang menunjukkan fungsi bijektif adalah gambar (2) dan (4).

12. Relasi f: ℝ → ℝ dengan f(x) = 3x - 2, apakah merupakan sebuah fungsi?

$f(x)$ dikatakan sebuah fungsi apabila memenuhi,

- $\forall\, x \in R \rightarrow \exists\, y \in R \ni y = f(x)$
- $\forall x_1, x_2 \in R$, $x_1 = x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Dibuktikan dengan :

- Ambil sebarang x∈ R pilih y = 3x - 2 akan ditunjukkan y = $f(x)$

  Karena x∈ R, y = 3x - 2 → y ∈ R

  y = $f(x)$
- Ambil sebarang $x_1, x_2 \in R$, pilih $f(x_1) = 3x_1 - 2$

$$f(x_2) = 3x_2 - 2$$
$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$3x_1 - 2 = 3x_2 - 2$$
$$3x_1 - 2 + 2 = 3x_2$$
$$3x_1 = 3x_2$$
$$x_1 = x_2$$

Dimana didapatkan $x_1 = x_2$ maka $f(x_1) = f(x_2)$

Maka f : $R \rightarrow R$, $f(x)$ = 3x - 2 terbukti merupakan fungsi

13. Relasi f: ℝ → ℝ dengan $f(x)$ = 4x - 1, apakah merupakan sebuah fungsi, jika iya apakah fungsi tersebut fungsi surjektif?

- $f(x)$ dikatakan sebuah fungsi apabila memenuhi,
  + $\forall\, x \in \mathbb{R} \rightarrow \exists\, y \in \mathbb{R} \ni y = f(x)$

    Ambil sebarang x∈ ℝ, pilih y = 4x - 1 akan di tunjukkan y = $f(x)$

    Karena x∈ R dan y = 4x - 1 maka y ∈ ℝ

    y = $f(x)$
  + $\forall x_1, x_2 \in R$, $x_1 = x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

    Ambil sebarang $x_1, x_2 \in R$, pilih $f(x_1) = 4x_1 - 1$

$$f(x_2) = 4x_2 - 1$$
$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$4x_1 - 1 = 4x_2 - 1$$
$$4x_1 - 1 + 1 = 4x_2$$

$$4x_1 = 4x_2$$
$$x_1 = x_2$$

Dimana didapatkan $x_1 = x_2$ maka $f(x_1) = f(x_2)$

Maka f : $R \rightarrow R$, $f(x)$ = 4x - 1 terbukti merupakan fungsi

- $f(x)$ dikatakan sebagai fungsi surjektif apabila

  $\forall y \in R \rightarrow \exists x_o \in R \ \ni = f(x_o)$

  Ambil sebarang y$\in R$, pilih $x_o \in R$ akan dibuktikan y=f(x_o)

  Pilih $x_0 = \frac{y+1}{4}$, $f(x_0) = 4x_0 - 1$

  $f(x_o) = 4(\frac{y+1}{4}) - 1$

  $f(x_o) = y + 1 - 1$

  $f(x_o) = y$

  Didapatkan bahwa f : $R \rightarrow R$ dengan f(x) = 4x - 1 fungsi surjektif

14. Periksa apakah $g : R \rightarrow R$ dengan $g(x) = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$ merupakan fungsi injektif.

    Bukti :

    Diambil sebarang $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $g(a) = g(b)$.

    Perhatikan bahwa

    $$f(a) = f(b)$$
    $$a^3 = b^3$$
    $$0 = b^3 - a^3$$
    $$0 = (b^2 + ab + a^2)(b - a) \ldots . (1)$$

    Pandang faktor pertama sebagai fungsi kuadrat dalam *b*, yaitu

    $$h(b) = (b^2 + ab + a^2)$$

    Diskriminan dari *h* kurang dari nol ($D < 0$). Karena koefisien b^2 bernilai positif, maka *h* adalah definit positif. Dengan kata lain, $b^2 + ab + a^2 > 0$.

    Akibatnya, persamaan (1) hanya dipenuhi oleh

    $$b - a = 0 \Longrightarrow b = a$$

    Dengan demikian, g adalah fungsi injektif.

15. Periksa apakah $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ merupakan fungsi surjektif.

    Bukti :

    Diambil sebarang $b \in \mathbb{R}$ (kodomain fungsi *f*).

    Kita perlu menemukan $a \in \mathbb{R}$ (domain fungsi *f*) yang memenuhi $f(a) = b$.

    Perhatikan bahwa

    $$f(a) = b$$
    $$2a + 1 = b$$
    $$2a = b - 1$$
    $$a = \frac{b-1}{2}$$

    Lalu, $\frac{b-1}{2}$ adalah bilangan real, sehingga inilah nilai a yang kita cari.

Terdapat $a = \frac{b-1}{2} \in \mathbb{R}$, sedemikian sehingga

$$f(a) = f\ \frac{(b-1)}{2}$$

$$= 2\,.\ \frac{(b-1)}{2} + 1$$

$$= b - 1 + 1$$

$$= b$$

Dengan demikian, f adalah fungsi surjektif.

BAB III
PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan uraian di atas, kami dapat menyimpulkan bahwa suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap elemen dari A secara tunggal, dengan elemen pada B. Ditulis $f : A \rightarrow B$ dibaca "fungsi f pemetaan A ke dalam / into B". Apabila f memetakan suatu elemen $x \in A$ ke suatu $y \in B$ dikatakan bahwa y adalah peta dari x oleh f dan peta ini dinyatakan dengan notasi $f(x)$, dan biasa ditulis dengan $f{:}x \rightarrow f(x)$, sedangkan x biasa disebut prapeta dari $f(x)$. Himpunan A dinamakan daerah asal (domain) dari fungsi f, sedangkan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain) sedangkan himpunan dari semua peta di B dinamakan daerah hasil (range) dari fungsi f tersebut.

B. Saran

Demikian makalah yang kami susun ini, semoga memberi manfaat bagi para pembaca. Apabila ada kritik dan saran yang ingin disampaikan terkait isi makalah ini, kami mempersilakan untuk menghubungi salah satu anggota kelompok kami. Kami memohon maaf jika terdapat kesalahan dan kekurangan dalam penyusunan makalah ini.

DAFTAR PUSTAKA

Soehardjo.1996. Dasar Matematika. Surakarta: UNS Press