MAKALAH
DASAR MATEMATIKA
RELASI ANTAR ANGGOTA HIMPUNAN

Dosen Pengampu :

Ponco Sujatmiko, S.Pd., M.Pd.

Disusun oleh :

1. Alfina Damayanti (K1321006)
2. Araminta Setyari Nugraheni (K1321016)
3. Diva Puspita Sari (K1321032)
4. Kezia Titan Desanda (K1321050)
5. Nesthi Wahyuningsih (K1321060)
6. Noviana Pratiwi (K1321062)
7. Rafiftya Yosindra Saputra (K1321064)
8. Ridho Dwi Saputra (K1321070)

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SEBELAS MARET SURAKARTA

2021

KATA PENGANTAR

Puji syukur sepatutnya kita panjatkan ke hadirat Allah SWT, karena berkat taufiq dan hidayah-Nya kami dapat menyelesaikan penulisan makalah dengan judul “RELASI ANTAR ANGGOTA HIMPUNAN” tanpa halangan suatu apapun. Makalah ini disusun untuk memenuhi tugas Mata Kuliah Dasar-Dasar Matematika. Selain itu, makalah ini juga bertujuan untuk menambah wawasan tentang bagaimana menyatakan relasi dalam bentuk simbol matematis. Makalah ini dapat diselesaikan dengan tepat waktu atas bantuan dan dukungan dari berbagai pihak dan literatur. Maka dari itu, kami ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang ikut terlibat dalam penyusunan makalah ini. Kami menyadari bahwa penyusunan makalah ini masih jauh dari kata sempurna karena keterbatasan pengetahuan kami. Oleh karena itu, kami sangat menerima saran, kritik, atau masukan dalam bentuk apapun yang bertujuan memberikan pencerahan kepada kami agar lebih baik kedepannya.

Surakarta, 10 Desember 2021

Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu bidang studi yang ada pada semua jenjang pendidikan, mulai dari tingkat sekolah dasar hingga perguruan tinggi. Belajar Matematika merupakan suatu syarat cukup untuk melanjutkan pendidikan ke jenjaang berikutnya. Karena dengan belajar matematika, kita akan belajar bernalar secara kritis, kreatif, dan aktif. Matematika merupakan ide-ide abstrak yang berisi simbol-simbol, maka konsep-konsep matematika harus di pahami terlebih dahulu sebelum memanipulasi simbol-simbol itu.

Pernyataan adalah kalimat yang mempunyai nilai benar atau salah, tetapi tidak sekaligus benar dan salah. Pernyataan-pernyataan sering kali kita jumpai, mulai dari buku, tugas, hingga percakapan lingkungan sekitar yang dapat kita dengar. Pernyataan tersebut dapat kita jadikan sebagai bahan penilitian dalam matematika, apakah pernyataan tersebut benar atau salah sehingga membuat kita paham dengan maksud dari pernyataan tersebut.

TUJUAN

1. Memahami apa maksud dari relasi dan fungsi .
2. Mengetahui dan memahami maksud dari sifat refleksif, simetris, dan transitif pada relasi himpunan.
3. Mengetahui apa yang dimaksud relasi ekuivalensi
4. Mengetahui dan memahami apa yang dimaksud fungsi surjektif, injektif dan fungsi bijektif.
5. Mengetahui bagaimana cara membuktikan kebenaran pernyataan terkait relasi pada himpunan dan fungsi.

ISI

1. Apa pengaitan $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dengan $\mathrm{f(x)} = x^2 - 2$ adalah fungsi?

   Jawab : Bukan karena
   $\exists x\ x \in \mathbb{Z} \to y \in \mathbb{N}\ \ y \neq f(x)$
   Bukti
   Karena ada maka pilih satu yaitu
   $x_0 = 0$
   $f(0) = x^2 - 2$
   $f(0) = 0^2 - 2 = -2 \notin \mathbb{N}$
   Terbukti

2. Jika $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}\ maka\ g(x) = \frac{2}{(x-1)}$
   Jawab :

   $\forall x\ x \in \mathbb{Z} \to y \in \mathbb{N}\ y = g(x)$
   Pernyataan diatas bernilai salah karena daerah asalnya ada yang tidak termasuk bilangan asli maka cari negasinya
   $\exists x\ x \in \mathbb{Z}\ \wedge y \in\ \mathbb{N}\ y \neq \frac{2}{(x-1)}$
   Dikarenakan kuantornya ada maka
   Pilih X = 1, maka
   $g(x) = \frac{2}{(x-1)}$
   $g(1) = \frac{2}{(1-1)} = \frac{2}{0}$,
   Maka $\frac{2}{0} \notin \mathbb{N}$

3. $n \in Z$ didefinisikan relasi R pada Z yaitu $aRb \leftrightarrow a - b = nk, k \in Z$

Tentukan apakah R merupakan relasi ekuivalensi?

Kita akan menunjukan R memenuhi relasi refleksif, relasi simetris, dan relasi transitif

a. Akan ditunjukkan R memenuhi relai refleksif

Ambil sebarang $a \in Z$

Perhatikan bahwa $a - a = 0 = n, 0 \in Z$

Jadi aRa

Jadi R memenuhi relasi refleksif

b. Akan ditunjukkan R memenuhi relasi simetris

Ambil sebarang $a, b \in Z$ dengan aRb berarti $a - b = np, p \in Z$

Perhatikan bahwa $b - a = -(a - b) = -(np) = n(-p), -p \in Z$

Jadi bRa

Jadi $aRb \rightarrow bRa, \forall a, b \in Z$

Jadi R memenuhi relasi simetris

c. Akan ditunjukkan R memenuhi relasi transitif

Ambil sebarang $a, b, c \in Z$ dengan aRb danbRc

Perhatikan bahwa aRb berarti $a - b = np, p \in Z$

$b - c$ berarti $b - c = nq, q \in Z$

Perhatikan bahwa $a - c = (a - b) + (b - c) = np + nq = n(p + q), p, q \in Z, p + q \in Z$

Jadi aRc

Jadi $\forall a, b, c \in Z, aRb$ dan i $bRc \rightarrow aRc$

Jadi R memenuhi relasi transitif

Berdasarkan a, b, c diperoleh R merupakan relasi ekuivalensi

4. $R\ relasi\ di\ \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ (a,b)\ R(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$. Buktikan apakah R bersifat simetris?

Akan ditunjukkan R memenuhi relasi simetris

$$\forall (n,n),(p,q)\ ((m,n)R(p,q) \Longrightarrow (p,q)R(m,n))$$

$$(m,n)R(p,q) \Leftrightarrow m + q = n + p$$

$$q + m = p + n$$

$$p + n = q + m$$

$$(p,q)R(m,n)$$

$$\boldsymbol{Terbukti}$$

5. Tunjukan bahwa f dengan $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ bukan suatu fungsi!

Jawab :

f dikatakan fungsi apabila

$\forall x1, x2\ \ jika\ x1 = x2\ maka\ f(x1) = f(x2)$

Karena akan ditunjukkan f bukan fungsi maka dinegasikan menjadi

$\exists x1, x2\ \ , x1 = x2\ dan\ \ f(x1) \neq f(x2)$

Penyelesaian

Pilih $x1 = \sqrt{0{,}75} = x2$

Perhatikan bahwa

$$f(x1) = \sqrt{1 - \sqrt{0{,}75}^2} = \sqrt{1 - 0{,}75} = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$$

$$f(x2) = \sqrt{1 - \sqrt{0{,}75}^2} = \sqrt{1 - 0{,}75} = \sqrt{0{,}25} = -0{,}5$$

Sehingga diperolerh $x1 = x2\ dan\ \ f(x1) \neq f(x2)$

TERBUKTI f bukan fungsi

6. Tunjukkan bahwa $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ dengan\ f(x) = 2x + 3$ merupakan fungsi surjektif !

Jawab

Ambil sebarang $y \ni \mathbb{R}$

Pilih x

$y = 2x + 3$

$2x = y - 3$

$x = \frac{y-3}{2} \ni \mathbb{R}$

Maka

$$f(x) = f\left(\frac{y-3}{2}\right) = 2\left(\frac{y-3}{2}\right) + 3$$

$$= y - 3 + 3$$

$$= y$$

Sehimgga diperoleh f(x) = y

TERBUKTI fungsi surjektif

7. Periksa apakah f : R→R dengan $f(x) = 2x + 1, \forall x \in$ R merupakan fungsi injektif.

Dikatakan injektif apabila

$\forall x_1, x_2 \in R, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

Kontraposisinya

$\forall x_1, x_2 \in R, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

Ambil sebarang $x_1, x_2 \in$ R dengan $f\ (\ x_1) = f(x_2)$

$x_1 = \frac{1}{2}(2x_1)$

$x_1 = \frac{1}{2}(2x_1 + 1 - 1)$

$x_1 = \frac{1}{2}(2x_1 + 1) - \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{1}{2}(2x_2 + 1) - \frac{1}{2}$

$x_1 = x_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

$x_1 = x_2$

Diperoleh $x_1 = x_2$. Dengan demikian, *f* adalah fungsi injektif.

8. Periksa apakah *f* : R→R dengan $f(x) = x^2 + 1, \forall x \in$ R bukan fungsi injektif.

   Dikatakan tidak injektif apabila

   $\exists x_1, x_2 \in R, x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$

   Pilih Satu $x_1, x_2 \in$ R dengan $x_1 \neq x_2$

   $x_1 = -1$

   $x_2 = 1$

   maka

   $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1^2 + 1 = f(1)$

   $f(-1) = f(1)$

   Diperoleh $f(-1) = f(1)$. Dengan demikian, *f* adalah bukan fungsi injektif.

9. Selidiki apakah relasi R berikut refleksif pada A = {x, y, z}

   (a) R = {(x,x), (x,y), (y,y), (z,y)}

   (b) R = {(x,x), (x,y), (y,y), (z,z)}

   PEMBAHASAN :

   (a) Relasi R tidak refleksif karena z ∈ A tetapi (z,z) ∉ R.

   (b) Relasi R refleksif karena x,y,z ∈ A dan (x,x), (y,y), (z,z) ∈ R.

10. Tunjukan apakah relasi R = {(x,y) adalah bilangan genap} dengan x,y ∈ Z merupakan relasi refleksif, simetri, transitif!

PEMBAHASAN :

- **<u>Refleksif</u>:**

Jika (x,x) ∈ R ∀ x ∈Z

(x,x) ∈ R → x+x

→ 2x (benar)

Jadi R adalah Simetri

- **<u>Simetri</u>:**

Jika (x,y) ∈ R maka (y,x) ∈ R

(x,y) ∈ R → x+y adalah bil.genap

→ x+y = 2k

→ y+x = 2k

→ (y,x) ∈ R

Jadi R adalah simetri

- **<u>Transitif</u>** :

Jika (x,y) ∈ R dan (y,z) ∈ R maka (x,z) ∈ R

(x,y) ∈ R dan (y,z) ∈ R → x+y = $2K_1$, y+z = $2k_2$

→ x+y+y+z = $2K_1 + 2K_2$

→ x+z+2y = $2(K_1 + K_2)$

→ x+z = $2(K_1 + K_2) – 2y$

→ x+z = $2(K_1+K_2 – y)$

→ (x,z) ∈ R

Jadi R adalah transitif.

11. Apakah $R = \{(a, b)|a = b$ atau $a = -b, a, b \in \mathbb{Z}\}$, merupakan relasi ekivalen?

Jawab :

- Jelas dipenuhi $a = a, \forall a \in \mathbb{Z}$, berarti $(a, a) \in R$ atau bersifat reflektif.
- Untuk sifat simetri, terdapat dua kemungkinan :

Jika $a = b$, berarti $(a, b) \in R, \forall a, b \in \mathbb{Z}$ maka $b = a$, berarti $(b, a) \in R$

Jika $a = -b$, berarti $(a, b) \in R, \forall a, b \in \mathbb{Z}$ maka $b = -a$, berarti $(b, a) \in R$,

Sehingga R bersifat simetris.

- Untuk sifat transitif, mempunyai empat kemungkinan :

Jika $a = b$, dan $b = c$, maka $a = c$, berarti $(a, c) \in R, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

Jika $a = b$, dan $b = -c$, maka $a = -c$, berarti $(a, c) \in R, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

Jika $a = -b$, dan $b = c$, maka $a = -c$, berarti $(a, c) \in R, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

Jika $a = -b$, dan $b = -c$, maka $a = c$, berarti $(a, c) \in R, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

Sehingga R bersifat transitif.

Jadi, R merupakan relasi ekivalen.

12. Apakah g: A → B dengan $A, B \in \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai g(x) = x + 10 merupakan fungsi surjektif?

    Jawab : g merupakan fungsi surjektif karena $\forall b \in B \rightarrow \exists a \in A \ni b = g(a)$

    Bukti : Ambil sebarang $b \in B$, pilih $a = b - 10$.

    Perhatikan $g(a) = (b - 10) + 10 = b \in \mathbb{R}$

    Jadi, g merupakan fungsi surjektif. Terbukti

13. Periksa apakah R merupakan suatu relasi yang refleksif, simetrik, atau transitif
    R = { (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (b,a) } pada A = { a,b, c, d }

    - R merupakan suatu relasi yang reflektif karena terdapat / mengandung pasangan berurut yaitu (a,a) (b,b) (c,c) (d,d)
    - R suatu relasi yang simetrik karena memenuhi syarat (a,b) ∈ R kemudian (b,a) ∈ R yaitu (a,b) (b,a)
    - R termasuk relasi transitif karena memenuhi syarat (a,b) (b,c) ∈ R kemudian (a,c) ∈ R, salah satu contohnya yaitu (a,a) (b,b) (a,b)

14. Periksa apakah R merupakan suatu relasi yang refleksif, simetrik, atau transitif
    Relasi pada Z dimana xRy ↔ | x-y | < 1

    | x-y | < 1, maka | x-y | = 0
    | x | = | y |
    x = y

    Jadi, xRy ∈ Z maka (x,x) ∈ Z

    - Refleksi karena (x,x) ∈ Z
    - Simetrik karena (x,x) berkebalikan dengan dirinya sendiri yaitu (x,x) (x,x) ∈ Z maka (x,x) ∈ Z
    - Transitif karena (x,x) transitif dengan dirinya sendiri yaitu (x,x) (x,x) ∈ Z maka (x,x) ∈ Z.

15. Selidiki apakah relasi R transitif pada $\mathbb{Z}$ = {1.2.3.4}

a. R = {2,2},{2,3},{2,4},{3,2},{3,3},{3,4}

b. R ={2,4} {4,2}

Jika (a,b) ∈R dan (b,c) ∈ R, maka (a,c) ∈ R, ∀a, b, c ∈ R ∩ R ∈ $\mathbb{Z}$

(2,2) ∈R, (2,3) ∈ R, maka (2,3) ∈ R, R ∈ $\mathbb{Z}$

(2,3) ∈R, (3,2) ∈ R, maka (2,2) ∈ R, R ∈ $\mathbb{Z}$

(2,3) ∈R, (3,3) ∈ R, maka (2,3) ∈ R, R ∈ $\mathbb{Z}$

(2,3) ∈ R, (3,4) ∈ R, maka (2,4) ∈ R, R ∈ $\mathbb{Z}$

(3,2) ∈ R, (2,2) ∈ R, maka (3,2) ∈ R, R ∈ $\mathbb{Z}$

(3,2) ∈ R, (2,4) ∈ R, maka (3,4) ∈ R, R ∈ $\mathbb{Z}$

(3,3) ∈ R, (3,2) ∈ R, maka (3,2) ∈ R, R ∈ $\mathbb{Z}$

(2,2) ∈ R, (2,4) ∈ R, maka (2,4) ∈ R, R ∈ $\mathbb{Z}$

Sehingga fungsi bersifat transitif.

b. Jika (a,b) ∈R dan (b,c) ∈ R, maka (a,c) ∈ R, ∀a, b, c ∈ R ∩ R ∈ $\mathbb{Z}$

R tidak bersifat transitiif karena (2,4) (4,2) ∈ R tetapi (2,2) ∉ R.

dan R tidak bersifat transitif karena (4,2) (2,4) ∈ R tetapi (4,4) ∉ R.

Jadi terbukti bahwa relasi R bukan transitif pada $\mathbb{Z}$

16. Buktikan bahwa f: R → R dengan f(x) $= 3x + 6$ adalah fungsi surjektif !

∀x ∈ R, R ∈ $\mathbb{Z}$ dan R surjektif dengan f
Ambil sebarang y ∋ R, misalnya x.
y=3x+6
3x=$y - 3$
x=$\frac{y-6}{3}$, sehingga $\frac{y-6}{3}$ ∋ R.
Akan dibuktikan bahwa f(x) = y

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{y-6}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{y-6}{3}\right) + 6 \\ &= y - 6 + 6 \\ &= y. \end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa fungsi tersebut surjektif.

KESIMPULAN

Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah hubungan yang memasangkan anggota-anggota himpunan A dengan anggota – anggota himpunan B. Sifat - sifat relasi antaralain; refleksif, setangkup (simetris), transitif, antisimetris, dan ekuivalensi. Fungsi (pemetaan) dari himpunan A ke himpunan B adalah relasi khusus yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B. Jenis -jenis fungsi: fungsi konstan, fungsi kuadrat, fungsi identitas, fungsi tangga, fungsi modulus, fungsi ganji, fungsi genap, fungsi komposisi dan fungsi invers dengan sifat - sifatnya, yaitu: injektif, surjektif, bijektif. Relasi dan fungsi dapat dinyatakan dengan tiga cara, yaitu: diagram panah, diagram Cartesius, dan himpunan pasangan berurutan. Jika x anggota A (domain) dan y anggota B (kodomain) maka fungsi f yang memetakkan x ke y dinotasikan dengan f : x → y, dibaca fungsi f memetakan x ke y atau x dipetakan ke y oleh fungsi f. Jika banyaknya anggota himpunan A adalah n(A) = a dan banyaknya anggota himpunan B adalah n(B) = b maka:

1. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B adalah b^a .
2. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari B ke A adalah a^b.

Jika nilai variabel suatu fungsi berubah maka akan menyebabkan perubahan pada nilai fungsinya.

SARAN

Kami sadar dalam pembuatan makalah ini masih terdapat kekurangan baik dalam penulisan dan kata-kata yang ada di dalam makalah ini dan masih sangat membutuhkan penambahan-penambahan, misalnya contoh-contoh dan pembahasan yang mungkin masih belum bisa dimengerti dengan cepat oleh pembaca, kami harapkan semoga makalah ini dapat berguna bagi pembacanya, selain itu kritik dan saran kami perlukan untuk membangun dalam membuat makalah kami untuk kedepannya.