

Sistem Bilangan Riil



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

1. Menjelaskan pengertian bilangan riil
2. Menjelaskan kaitan bilangan rasional dan irasional dengan bentuk desimal berulang dan tak berulang
3. Menjelaskan sifat-sifat kerapatan dan urutan pada sistem bilangan riil



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Kalkulus di dasarkan pada sistem bilangan riil dan sifat-sifatnya. Apa yang dimaksud dengan bilangan riil ? Sebelum menjawab pertanyaan tersebut kita mulai dengan beberapa sistem bilangan yang lebih sederhana



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Himpunan bilangan asli

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Himpunan bilangan bulat

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Himpunan bilangan rasional (\mathbb{Q}):

$$\left\{ x \mid x = \frac{m}{n} \text{ untuk suatu } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \text{ dan } n \neq 0 \right\}$$

$$\text{Contoh : } \frac{3}{4}, \frac{-5}{8}, \frac{21}{11}, \frac{19}{-2}$$

Himpunan bilangan tak rasional :

$$\left\{ x \mid x \neq \frac{m}{n} \text{ untuk setiap } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \text{ dan } n \neq 0 \right\}$$

$$\text{Contoh : } \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{9}, \pi$$

Himpunan bilangan riil (\mathbb{R}) :

gabungan himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan tak rasional

Himpunan Semesta pembicaraan di Kalkulus adalah

Himpunan Bilangan Riil



Buatlah diagram Venn yang menunjukkan gambaran hubungan antara himpunan bilangan asli, himpunan bilangan bulat, himpunan bilangan rasional, himpunan bilangan irasional dan himpunan bilangan riil



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Setiap bilangan riil memiliki representasi desimal

Bilangan rasional berkaitan dengan representasi desimal yang berulang

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{3}{8} = 0,375 \quad \frac{3}{7} = 0,428571428571428571 \dots$$

Bilangan irasional berkaitan dengan representasi desimal yang tak berulang

$$\sqrt{2} = 1,4142135623 \quad \pi = 3,1415926535$$



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Sifat Aljabar R

Himpunan bilangan Riil dilengkapi dengan operasi tambah dan kali memiliki :

1. Sifat Komutatif

untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $x + y = y + x$ dan $xy = yx$

2. Sifat Asosiatif

untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $(x + y) + z = x + (y + z)$ dan $(xy)z = x(yz)$

3. Elemen Identitas

terdapat $0 \in R$ dan $1 \in R$ sehingga $x + 0 = x = 0 + x$ dan $1x = x = x1$ untuk setiap $x \in R$

4. Invers

untuk setiap $x \in R$ terdapat $-x$ sehingga $x + (-x) = 0 = (-x) + x$

untuk setiap $x \in R, x \neq 0$ terdapat $\frac{1}{x}$ sehingga $x \frac{1}{x} = 1 = \frac{1}{x} x$

5. Sifat Distributif

untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku

Operasi kurang dan bagi definisikan dengan :

$$x - y = x + (-y)$$

$$\frac{x}{y} = x \frac{1}{y}$$



Himpunan bilangan riil seringkali disajikan dengan garis (terdapat korespondensi satu-satu antara himpunan bilangan riil dengan titik-titik pada garis)

Setiap titik pada garis dilabelkan secara tunggal oleh bilangan riil dan sebaliknya setiap bilangan riil melabeli secara tunggal titik pada garis

Pada garis tersebut bilangan riil mengukur jarak berarah ke kanan atau ke kiri dari suatu titik tetap yang diberi label

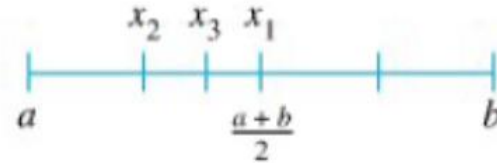


Garis yang dipakai untuk merepresentasikan bilangan riil dinamakan garis riil



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Diantara dua bilangan riil terdapat tak terhingga banyaknya bilangan riil yang lain



Diantara dua bilangan riil terdapat tak terhingga banyaknya bilangan rasional dan irasional

Bilangan rasional dan irasional padat pada garis riil

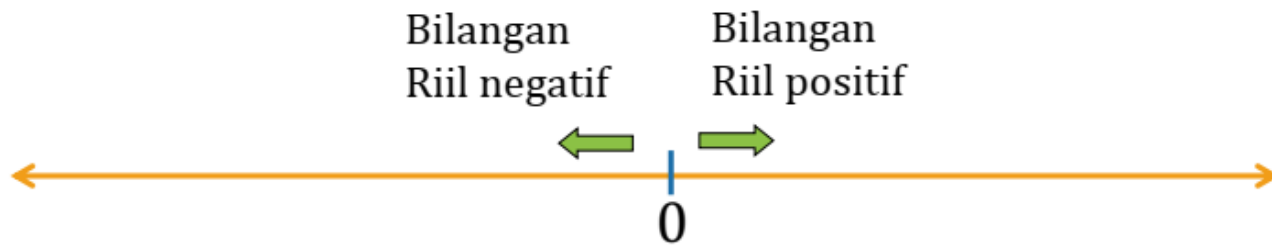


Setiap bilangan irasional dapat dihamperi oleh barisan bilangan rasional



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Himpunan bilangan riil dipisahkan menjadi dua himpunan terpisah, yakni himpunan bilangan riil positif dan bilangan riil negatif



Hal ini memungkinkan kita mengenal relasi urutan



Dikatakan $x < y$ jika $y - x$ positif

Lambang $x < y$ dibaca " x kurang dari y "

Sifat Urutan R :

1. Jika x dan y adalah bilangan riil, maka pasti satu diantara yang berikut berlaku $x < y$ atau $x = y$ atau $y < x$
2. Jika $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$
3. $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$
4. Jika z positif, $x < y \Leftrightarrow xz < yz$
Jika z negatif, $x < y \Leftrightarrow xz > yz$



Pada garis bilangan, $x < y$ jika dan hanya jika x terletak di kiri y



$x < y$ ekuivalen dengan $y > x$ kita katakan “ y lebih dari x “

Lambang $x \leq y$ berarti $x < y$ atau $x = y$

Lambang $<$, $>$, \leq dan \geq disebut tanda-tanda ketidaksamaan



Bagaimana urutan π , $\frac{22}{7}$ dan 3,14 ?

Bagaimana posisi π , $\frac{22}{7}$ dan 3,14 pada garis riil ?



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

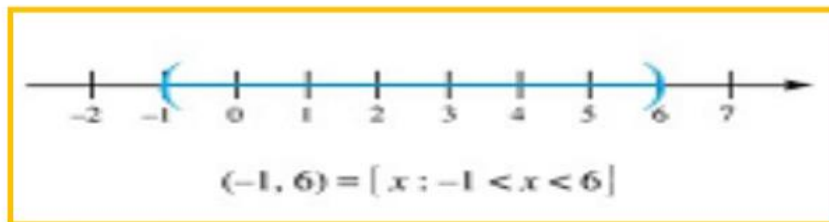
Selang










Selang buka dari a ke b adalah himpunan semua bilangan di antara a dan b , dinyatakan dengan (a, b)

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}$$



Contoh :



Set Notation	Interval Notation	Graph
$\{x: a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x: a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x: a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x: a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
$\{x: x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x: x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x: x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x: x > a\}$	(a, ∞)	
\mathbb{R}	$(-\infty, \infty)$	



Pertidaksamaan



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

$$3 < 4$$

$$4 > 7$$

$$x < 6$$

$$x^2 - 4x - 5 < 0$$

Diantara kalimat-kalimat ini manakah yang merupakan ketidaksamaan dan mana yang merupakan pertidaksamaan ?

Ketidaksamaan :

Kalimat tertutup yang memuat tanda ketidaksamaan $>$, $<$, \geq atau \leq

Pertidaksamaan :

Kalimat terbuka yang memuat tanda ketidaksamaan $>$, $<$, \geq atau \leq



Variabel adalah simbol (biasanya berupa huruf) yang digunakan untuk mewakili sebarang anggota suatu himpunan

Nilai pengganti variabel yang menyebabkan pertidaksamaan menjadi ketidaksamaan yang bernilai benar disebut **penyelesaian pertidaksamaan**. Himpunan dari semua penyelesaian disebut himpunan penyelesaian

Menyelesaikan pertidaksamaan berarti mencari himpunan penyelesaian pertidaksamaan



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Contoh soal :

Periksa apakah yang berikut adalah penyelesaian pertidaksamaan $x^2 - 4x - 5 < 0$:

a. $x = 2$

b. $x = 6$



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Contoh Soal :

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan yang berikut

a. $3x - 5 < 4x - 6$

b. $4x^2 - 5x - 6 < 0$

c. $\frac{x - 2}{x + 4} \leq 2$





UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Secara umum prosedur menyelesaikan pertaksamaan terdiri dari pengubahan pertaksamaan langkah demi langkah menjadi pertidaksamaan yang ekivalen hingga diperoleh pertidaksamaan yang himpunan penyelesaiannya jelas.
Alat utamanya adalah sifat-sifat urutan



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Adakah pertidaksamaan yang himpunan penyelesaiannya himpunan kosong ?
Adakah pertidaksamaan yang himpunan penyelesaiannya himpunan bilangan riil ?

Berikan contoh :

- pertidaksamaan yang himpunan penyelesaiannya adalah himpunan kosong
- pertidaksamaan yang himpunan penyelesaiannya adalah himpunan bilangan riil



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET