

PERTEMUAN 1

Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

1. Menjelaskan pengertian bilangan riil
2. Menjelaskan kaitan bilangan rasional dan irasional dengan bentuk desimal berulang dan tak berulang
3. Menjelaskan sifat-sifat kerapatan dan urutan pada sistem bilangan riil

Materi Ajar

Sistem Bilangan Riil

Kalkulus di dasarkan pada sistem bilangan riil dan sifat-sifatnya. Apa yang dimaksud dengan bilangan riil ? Sebelum menjawab pertanyaan tersebut kita mulai dengan beberapa sistem bilangan yang lebih sederhana

Bilangan Riil

Bilangan-bilangan asli

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

adalah bilangan yang paling sederhana yang kita kenal. Dengan bilangan asli kita membilang, misalnya banyaknya mahasiswa di kelas atau banyaknya buku di perpustakaan. Bilangan-bilangan asli bersama-sama dengan negatifnya dan 0 dinamakan bilangan-bilangan bulat.

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Bilangan bulat tidak selalu memadai untuk mewakili hasil suatu pengukuran panjang, hasilnya bisa jauh dari presisi. Kita kemudian menemui bilangan yang merupakan perbandingan dari dua bilangan bulat, seperti

$$\frac{3}{4}, \frac{-7}{8}, \frac{21}{5}, \frac{19}{-2}, \frac{16}{2}, \text{ and } \frac{-17}{1}$$

Selanjutnya bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{m}{n}$, dengan m, n bilangan

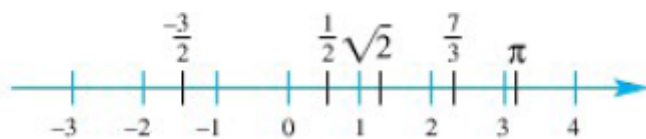
bulat dan $n \neq 0$ dinamakan bilangan rasional. Bentuk $\frac{m}{0}$ tidak diikuti sertakan karena

kita tidak mungkin memberi makna pada bentuk tersebut

Apakah bilangan pecahan mencukupi untuk semua keperluan mengukur panjang ? Ternyata tidak. Misalnya $\sqrt{2}$ - yang dapat dilihat sebagai panjang dari sisi miring dari

suatu segitiga siku-siku - tidak dapat dinyatakan sebagai hasil bagi dari dua bilangan bulat. Jadi $\sqrt{2}$ bukan bilangan rasional atau dinamakan bilangan irasional. $\sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, \pi, e$ adalah beberapa contoh bilangan irasional lainnya.

Semua bilangan rasional dan bilangan irasional dinamakan bilangan riil. Bilangan riil dapat dipandang sebagai label dari titik pada garis dan mengukur jarak dari kanan atau kiri (jarak berarah) dari suatu titik tetap yang disebut titik asal dan diberi label 0. Walaupun kita tidak dapat menuliskan semua label, tapi setiap titik dilabelkan secara tunggal oleh bilangan riil. Garis yang dipakai untuk merepresentasikan bilangan riil tersebut dinamakan garis riil (lihat Gambar 1)



Gambar 1

Untuk selanjutnya di kalkulus, jika tidak ada penjelasan tambahan maka jika kita mengatakan bilangan maka yang dimaksud adalah bilangan riil atau semesta pembicaraan kita tentang bilangan adalah bilangan riil.

Operasi Aritmatika pada Himpunan bilangan riil

Diberikan dua bilangan riil x dan y , kita menjumlahkan dan mengalikan keduanya sehingga diperoleh bilangan riil yang baru $x + y$ dan xy . Penjumlahan dan perkalian memiliki sifat yang disebut sebagai sifat lapangan, yakni :

1. Hukum komutatif : $x + y = y + x$ dan $xy = yx$
2. Hukum asosiatif : $(x + y) + z = x + (y + z)$ dan $(xy)z = x(yz)$
3. Hukum distributif: $x(y + z) = xy + xz$
4. Elemen identitas : terdapat bilangan riil 0 dan 1 yang memenuhi $0 + x = x = x + 0$ dan $1x = x = x1$ untuk setiap bilangan riil
5. Invers : setiap bilangan riil x memiliki invers penjumlahan (sering disebut lawan) $-x$, yang memenuhi $-x + x = 0 = x + -x$. Setiap bilangan riil x kecuali 0, memiliki invers perkalian (disebut resiprokal) x^{-1} yang memenuhi $xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$

Pengurangan dan pembagian didefinisikan sebagai :

$$x - y = x + (-y)$$

$\frac{x}{y} = xy^{-1}$, asalkan $y \neq 0$, pembagian dengan 0 tidak didefinisikan

Urutan

Bilangan bulat tak nol dapat dipisahkan menjadi bilangan positif dan bilangan negatif. Selanjutnya kita dapat mengenalkan relasi urutan $<$ (dibaca : kurang dari), dengan

$$x < y \Leftrightarrow y - x \text{ adalah positif}$$

Disepakati bahwa $x < y$ dan $y > x$ adalah hal yang sama. Berikut adalah sifat-sifat relasi urutan :

1. Trikotomi , jika x dan y adalah bilangan riil, maka satu diantara yang berikut berlaku

$$x < y \text{ atau } x = y \text{ atau } x > y$$

2. Ketransitifan , $x < y$ dan $y < z \Rightarrow x < z$ untuk sebarang x, y, z di R

3. $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$ untuk sebarang x, y, z di R

4. Jika z positif , berlaku $x < y \Leftrightarrow xz < yz$ untuk sebarang x, y di R dan jika z negatif, berlaku $x < y \Leftrightarrow xz > yz$ untuk sebarang x, y di R

Relasi \leq (dibaca "kurang dari atau sama dengan"), didefinisikan sebagai

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \text{ positif atau nol}$$

Sifat-sifat urutan 2,3 dan 4 berlaku dengan lambang $<$ diganti dengan lambang \leq

Desimal Berulang dan Tidak Berulang

Setiap bilangan rasional dan irasional dapat dinyatakan dalam bentuk desimal. Representasi desimal dari bilangan rasional dapat berakhir atau terus berulang secara teratur, sebagai contoh

$$\frac{1}{2} = 0.5 \quad \frac{3}{8} = 0.375 \quad \frac{3}{7} = 0.428571428571428571 \dots$$

Sedangkan representasi desimal dari bilangan irasional tidak berulang dan tanpa akhir, misalnya

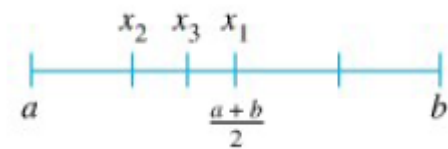
$$\sqrt{2} = 1.4142135623 \dots, \quad \pi = 3.1415926535 \dots$$

Sebaliknya juga berlaku, yakni suatu penyajian desimal yang berakhir atau terus berulang secara teratur dapat ditulis sebagai suatu bilangan rasional dan suatu

penyajian desimal yang tidak berulang dan tanpa akhir adalah mewakili suatu bilangan irasional

Kerapatan

Diantara sebarang dua bilangan riil a dan b , betapapun dekatnya terdapat bilangan riil yang lain, khususnya $x_1 = \frac{a+b}{2}$ yakni bilangan riil yang terletak dipertengahan a dan b . Proses itu dapat kita lanjutkan, sehingga diantara a dan x_1 terdapat bilangan riil x_2 , diantara x_1 dan x_2 terdapat bilangan riil x_3 dan seterusnya selalu dapat kita lakukan demikian (lihat Gambar 2)



Gambar 2

Jadi masuk akal jika kemudian dikatakan bahwa terdapat tak berhingga bilangan riil diantara sebarang dua bilangan riil. Dikatakan bahwa bilangan riil adalah rapat disepanjang garis riil

TUGAS 1

1. Nyatakan $\frac{1}{9}$ sebagai desimal berulang menggunakan *bar*(garis diatas) untuk menunjukkan digit yang berulang.. Apakah representasi desimal untuk $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{8}{9}$ dan $\frac{7}{9}$? Adakah hal menarik yang anda temukan ?
2. Apakah $x = 0,999999 \dots$ adalah bilangan rasional ? Jelaskan jawabanmu