TURUNAN DAN PENGGUNAANNYA

Tujuan pembelajaran

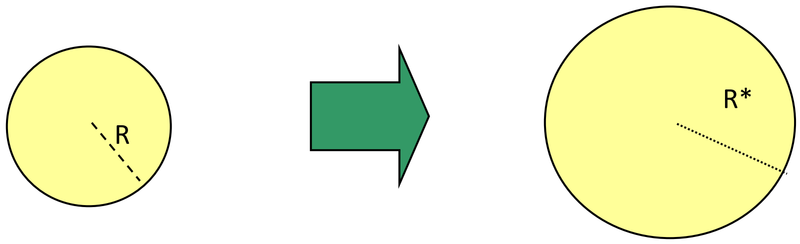
- Mahasiswa mampu menerapkan konsep turunan pertama pada konsep kecepatan benda gerak
- Mahasiswa mampu menerapkan aturan pencarian turunan baik turunan fungsi aljabar maupun fungsi trigonometri
- Mahasiswa mampu menentukan turunan dengan dalil rantai
- Mahasiswa mampu menerapkan turunan fungsi implisit
- Mahasiswa mampu menyelesaikan permasalahan laju dengan menggunakan turunan

Materi perkuliahan

- Konsep kecepatan benda bergerak untuk turunan
- Aturan pencarian turunan
- Turunan Fungsi implisit
- Permasalahan yang berkaitan dengan laju

Dalam kehidupan sehari-hari sering kita temui masalah yang berkaitan dengan konsep turunan. Contoh kasus di bawah ini :

- Sebuah balon bundar dipompa, Cari laju perubahan volume balon terhadap jari-jarinya pada saat jari-jari balon 5 meter.
- Jika volume balon di atas bertambah pada laju tetap sebesar 10 meter kubik tiap jam, seberapa cepat jari-jari bertambah pada saat jari-jari balon = 5m

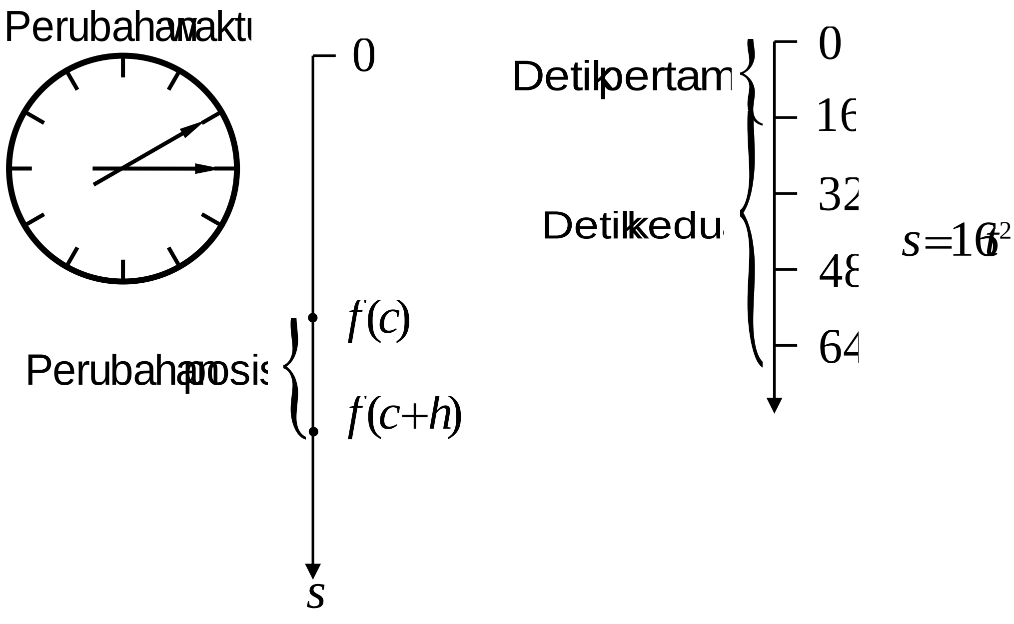


Bagaimana anda menyelesaikan permasalahan di atas ?? Silahkan anda diskusikan dengan teman dalam kelompok saudara!

Permasalahan di atas adalah salah satu bentuk masalah yang berkaitan dengan laju perubahan yang merupakan konsep dari turunan**. Anda masih ingat dengan apa itu kecepatan sebagai turunan pertama dari fungsi jarak? Percepatan sebagai turunan kedua dari suatu fungsi jarak atau turunan pertama dari kecepatan ?**

- **Masalah Kecepatan sesaat :**

Jika kita naik motor dari rumah ke kampus yang berjatak 40 km dalam waktu 1 jam, maka kecepatan rata-rata kita dikatakan 40 km/jam. Benarkah kecepatan rata-rata kita 40 km/jam? Perhatikan spedometer, selama perjalanan spedometer sering tidak menunjuk pada angka 40 km. Waktu berangkat 0 km, kadang kita melaju dengan cepat sehingga spedometer menunjuukan angka 50 km. terhalang macet, lampu merah dan laian-lain sehingga spedometer menunjukkan angka yang berbeda-beda selama perjalanan dari rumah ke kampus. Lalu kecepatan kita yang benar yang mana??



Ambil contoh : benda P yang jatuh dalam ruang hampa udara . percobaan tersebut menunjukkan bahwa P jatuh sejauh $16t^2$ meter dalam t detik. Jadi benda ini jatuh sejauh 16 meter dalam detik pertama dan 64 meter pada detik ke dua.

Selama detik ke dua (t =1 sampai t = 2), kecepatan rata-rata adalah :

$$v = \frac{16(2^2) - 16}{2-1} = \frac{64-16}{1} = 48\, m/\text{det}$$

Bagaimana dengan selang waktu dari t = 1 sampai t= 1,5. Kecepatan rata-rata P :

$$v=\frac{16(1,5)^2-16}{1,5-1}=\frac{20-16}{0,5}=40\,m/\mathrm{det}$$

Kecepatan rata-rata P saat selang waktu dari t = 1 sampai t= 1,01 adalah :

$$v=\frac{16(1,01)^2-16}{1,01-1}=\frac{0,321}{0,01}=32,16\,m/\mathrm{det}$$

Apa yang dapat anda simpulkan dari ketiga perhitungan di atas ? apa sebenarnya yang kita cari ??

Jika sebuah benda P tersebut bergerak sepanjang garis koordinat t diberikan oleh s = f(t). Maka saat (t=c) adalah f(c) dan saat t = c+h adalah f(c+h) , sehingga kecepatan rata-rata pada selang tersebut adalah :

$$v=\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

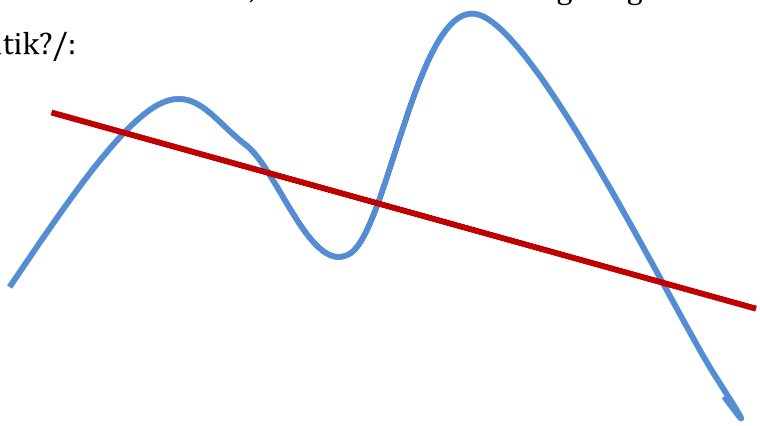
Dan kecepatan benda tersebut adalah :

$$v=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

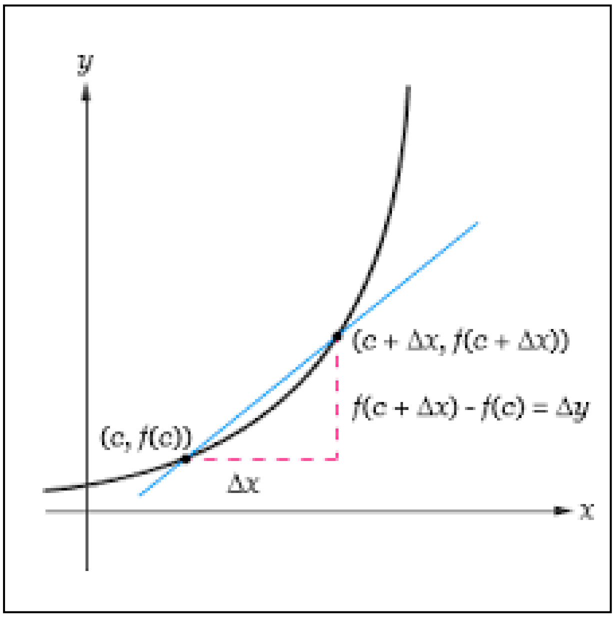
- **Masalah Kemiringan / Gradien Garis Singgung Kurva**

Bagaimana dengan masalah garis singgung? Masih ingatkah anda apa itu garis singgung... ya , garis singgung sebagai garis yang memotong kurva di satu titik . tapi apakah definisi itu berlaku untuk kurva lain, misalkan garis singgung di titik P pada kurva di bawah ini, bukankah tidak mungkin garis tsb akan memotong hanya di satu titik?/:

P



Definisi garis singgung di P adalah pembatas dari talibusur PQ jika Q bergerak ke arah P sepanjang kurva



Andaikan P adalah suatu titik tetap pada sebuah kurva dan andaikan Q adalah sebuah titik yang berdekatan yang dapat dipindah-pindah pada kurva tersebut. Garis yang melalui P dan Q disebut **tali busur**

Kurva y=f(x) dengan koordinat P (c, f(c)) dan titik Q (c+h, f(c+h)), dan tali busur yang melalui PQ mempunyai kemiringan **m**

$$m_h = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Perhatikan kata " **Q bergerak mendekati P**", apa yang anda dapat simpulkan? Ya tentang limit..sehingga kemiringan m di titik P adalah :

$$m^* = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

DEFINISI TURUNAN

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Cobalah tentukan turunan dari f(x) = x^2

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ....masih ingat fungsi, **jika f(x) = x^2 maka f(x+h) = $(x+h)^2$**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2-(x)^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x^2+2xh+h^2)-(x^2)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2x\cancel{h}}{\cancel{h}}$$

$$f'(x) = 2x$$

Sekarang kita coba untuk membuktikan apakah benar bahwa :

- $D(5x-4)=5$
- $D\left(\sqrt{x}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $D\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{1}{x^2}$

ATURAN PENCARIAN TURUNAN

Anda masih ingat dengan aturan pencarian turunan dibawah ini yang sudah anda terIma di SMA? Coba anda buktikan dengan menggunakan definisi turunan

Definisi

Bila $y=f(x)$ adalah fungsi x dan $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ atau $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ada dan terbatas maka limit tersebut dinamakan turunan (derivative) dari *y* terhadap *x* dan *f(x)* dikatakan fungsi *x* yang dapat diturunkan (differentiable).

Turunan Kanan dan Kiri

Turunan kanan dari $y=f(x)$ pada $x=x_0$ didefinisikan :

$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ jika limitnya ada, dan

Turunan kiri dari $y=f(x)$ pada $x=x_0$ didefinisikan :

$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Suatu fungsi $y=f(x)$ mempunyai turunan pada $x=x_0$ jika dan hanya jika $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$

Differentiabelitas dalam suatu Interval

Jika suatu fungsi mempunyai derivative di setiap titik dari suatu interval maka dikatakan fungsi tersebut differentiabel dalam interval. Jika $y=f(x)$ tertentu dalam interval tertutup $a\le x\le b$ maka $y=f(x)$ differentiabel dalam interval tersebut jika dan hanya jika $f'(x_0)$ada untuk setiap x_0 pada $a<x_0<b$ dan jika $f'_+(x_0)$dan $f'_-(x_0)$keduanya ada.

Teorema

Jika $u(x)$ dan $v(x)$ merupakan fungsi kontinu dan mempunyai turunan pertama pada domain D maka berlaku :

1. $\frac{d}{dx}\{u(x)\pm v(x)\}=\frac{du(x)}{dx}\pm\frac{dv(x)}{dx}=u'(x)\pm v'(x)$

2. $\frac{d}{dx}\{u(x).v(x)\}=\frac{du(x)}{dx}v(x)+u(x)\frac{dv(x)}{dx}=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

3. $\frac{d}{dx}\{k\,u(x)\}=k\frac{du(x)}{dx}=k\,u'(x)$, k=konstan

4. $\frac{d}{dx}\left\{\frac{u(x)}{v(x)}\right\}=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

5. Bila $y=f(u)$ dan $u=g(x)$ maka $y=f(g(x))$ sehingga $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$ (dalil Rantai)

6. . Bila $y=f(x)$ mempunyai invers $f^{-1}(x)$ maka $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{dx/dy}$

Masih belum familiarkah dengan teorema di atas? Benar... biasanya anda menggunakan aturan berikut:

Aturan dalam Pencarian Turunan : Jika D adalah operator dari turunan pertama suatu fungsi:

1. D(k) = 0 , k : konstanta	**5. D(f(x) + g(x)) = D(f(x) + D(g(x))**
2. D (x) = 1	**6. D(f(x) - g(x)) = D(f(x) - D(g(x))**
3. D($x^n) = nx^{n-1}$	**7. D(f(x) .g(x)) = g(x)D(f(x) + f(x)D(g(x))**
4. D(k f(x)) = k Df(x)	**8.** $D(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg)(x)}{[g(x)]^2}$

Selain huruf D diatas , kita juga dapat menggunakan bentuk $f'(x)$ untuk menyatakan turunan pertama suatu fungsi. Sedangkan bentuk $\frac{dy}{dx}$ adalah lambang turunan yang digunakan Leibniz untuk untuk menyatakan turunan pertama suatu fungsi.

Kita akan akan melihat bentuk $\frac{dy}{dx}$, bentuk tersebut **bukan**lah bentuk pembagian antara dy sebagai pembilang dan dx sebagai penyebut.

Cobalah anda membuktikan aturan pencariai turunan di atas dengan menggunakan definisi turunan

Sebagai contoh kita buktikan D(kf(x)) = k Df(x)

$$D(f(x)) = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$D(kf(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}$$

$$D(kf(x)) = \lim_{h\to 0}k\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$D(kf(x)) = k\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$D(kf(x)) = kD(f(x))$$

Turunan Fungsi Trigonometri : Jika D adalah operator dari turunan pertama suatu fungsi:

1. D(sin x) = cos x

2. D (cos x) = - sin x

3. D(tgx) = $\sec^2 x$

4. D(ctg x)) = -cosec ^{2} **x** .

5. D(sec x) = sec x tgn x

- **cobalah anda buktikan dengan menggunakan definisi turunan dan aturan pencarian turunan**

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari

- $y = \frac{2+x}{x-5}$
- $y = 4x^{40} - 30x^3 - \frac{1}{2x}$
- $y = \pi x^5$

ATURAN RANTAI

Apa itu aturan rantai?

Bagaimana jika kita akan menurunkan fungsi f(x)= (x^2+ 2)^2 dengan aturan pencarian turunan? Ya..kita akan mengalikan bersama ke dua faktor dari (x^2+ 2) sehingga kita akan menurunkan f(x) = x^4+ 2 x^2+ 4

Sehingga f'(x) = 4x^3+ 4x

Sekarang bayangkan jika kita harus menurunkan f(x)= (x^2+ 2)^{90}

Ya, pertama kita harus mengalikan ke 90 faktor dari x^2+ 2, baru kemudian mendifferensialkan polinom berderajat 180

Hal tersebut tentunya menyulitkan. Nah kita kan pelajari dengan aturan rantaiDalam kalkulus. Ka**idah rantai** atau **aturan rantai** adalah rumus untuk turunan fungsi komposit (fungsi bersusun) dari dua fungsi matematika.

Secara intuitif, bila variabel *y* bergantung pada variabel kedua, *u*, yang pada gilirannya bergantung pada variabel ketiga, *x*, maka laju perubahan *y* terhadap *x* dapat dihitung sebagai laju perubahan *y* terhadap *u* dikalikan dengan laju perubahan *u* terhadap *x*. Ini dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Misalkan fungsi *f* dengan $y = f(u)$ dan fungsi *g* dengan $u = g(x)$ masing-masing terdiferensiasi di titik $u = u_0$ dan $x = x_0$. Maka y merupakan fungsi komposit dari x $(y = (f \circ g)(x))$.

Turunan *y* terhadap *x* di titik x_0 dinyatakan sebagai

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{\Delta x}$$

Misalkan $\Delta u = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$, dan $u_0 = g(x_0)$. Untuk $x \to 0$maka $u \to 0$.
Dengan mensubstitusi, kita dapat menuliskan

$$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)$$

$$= \left[\lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)}{\Delta u} \right] \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right]$$

$$= \frac{dy}{du}|_{u=u_0} \cdot \frac{du}{dx}|_{x=x_0}.$$

Contoh :

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika $y=(1+2x+3x^2)^{123}$

Kita pikirkan bahwa bentuk awal y= u¹²³ dengan $u=(1+2x+3x^2)$

$y=u^{123}$	$u=(1+2x+3x^2)$
$\frac{dy}{du}=123u^{122}$	$\frac{du}{dx}=2+6x$

Sehingga

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

$\frac{dy}{dx}=(123u^{122})(2+6x)$ **.....ubah** $u=(1+2x+3x^2)$

$$\frac{dy}{dx}=(123(1+2x+3x^2)^{122})(2+6x)$$

Contoh :

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika $y=\cos(\cos(1+2x+3x^2))$

Kita pikirkan bahwa bentuk awal y= cos u dengan v = cos v dan $v=(1+2x+3x^2)$

$y=\cos u$	$u=\cos v$	$v=(1+2x+3x^2)$
$\frac{dy}{du}=-\sin u$	$\frac{du}{dv}=-\sin v$	$\frac{dv}{dx}=2+6x$

Sehingga

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$\frac{dy}{dx}=-\sin u.-\sin v.(2+6x)$ **.....ubah** $u=\cos v$ dengan $v=1+2x+3x^2$ sehingga

$$u=\cos(1+2x+3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\sin(\cos(1+2x+3x^2).-\sin(1+2x+3x^2)(2+6x)$$

Mudah bukan ?

Sekarang coba anada cari $\frac{dy}{du}$ dari fungsi berikut :

$$y=\cos\left[\frac{1+2x}{3x}\right]^{20}$$

$$y=\sin(\cos(\sec(x^2+2)))$$

TURUNAN FUNGSI IMPLISIT

- Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi y = $2x^5+5x+7$. Mudah bukan?

Fungsi eksplisit

Namun bagaimana jika menentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi berikut : $y^3+2y=x^3$??

- Bedakan bentuk fungsi y = $2x^5+5x+7$ dengan

$y^3+2y=x^3$ atau $y^3+2y-x^3=0$

Berilah kesimpulan dari perbedaan bentuk kedua fungsi di atas !

Tentunya yang pertama yang akan anda lakukan adalah membuat y sebagai fungsi x

y = f(x) dan hal tersebut tidaklah mudah. Bentuk pendiferensialan dari bentuk fungsi yang dinyatakan dengan f(x,y) = 0 adalah **pendiferensialan fungsi implisit**.

- Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y^3+2y=x^3$

$$3y^2\frac{dy}{dx}+2\frac{dy}{dx}=3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2+2)=3x^2$$ ➡ diskusikan dengan kelompok anda!

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{3y^2+2}$$

Perhatikan :

- fungsi f(x,y) = 0 di atas diturunkan terhadap dx
- ingat dan perhatikan bentuk turunan dari perkalian fungsi

D(f(x) .g(x)) = g(x) D(f(x) + f(x)D(g(x)). Begitupun dengan bentuk turunan dari $4x^2y$.

Anggap $4x^2 \Rightarrow f(x)$ ➡ D(f(x)) = 8x

$y \Rightarrow g(x)$ D(g(x)) = $\frac{dy}{dx}$

- Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $4x^2y-3y=x^3-1$

$$4x^2\frac{dy}{dx}+8xy-3\frac{dy}{dx}=3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(4x^2-3)=3x^2-8xy$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-8xy}{4x^2-3}$$

Dari dua contoh di atas, apa yang dapat anda simpulkan tentang pendiferensialan implisit

PENERAPAN TURUNAN PADA MASALAH LAJU YANG BERKAITAN

- Jika peubah y tergantung pada waktu t, maka turunan nya $\frac{dy}{dt}$ disebut sebagai laju sesaat perubahan. Tentu saja, jika y mengukur jarak ,maka laju sesaat perubahan ini disebut kecepatan, namun bagaimana dengan beraneka laju sesaat misal laju perubahan volume balon pada contoh di atas.Jika y diberikan secara eksplisist dalam bentuk t, maka masalahnya akan menjadi sederhana; kita cukup mendifferensialkan dan kemudian menghitung turunan pada saat yang diminta

Mungkin saja, sebagai ganti diketahuinya y secara gamblang dalam bentuk t, kita mngetahui hubungan yang mengaitkan y dan peubah lain x dan kita juga mengetahui sesuatu tentang $\frac{dx}{dt}$. Kita masih juga mampu mencari $\frac{dy}{dt}$, karena $\frac{dy}{dt}$ dan $\frac{dx}{dt}$ adalah laju-laju yang berkaitan, dan biasanya ini akan memerlukan pendifferensialan implisist.

- Tentunya sekarang anda dapat menyelesaikan masalah balon di atas , yakni dengan melihat bahwa akan terdapat perubahan dari volume balon terhadap jari-jari ($\frac{dV}{dr}$) karena balon tersebut dipompa dan juga akan terjadi perubahan volume balon terhadap waktu ($\frac{dV}{dt}$)
- Sebuah balon bundar dipompa, Cari laju perubahan volume balon terhadap jari-jarinya pada saat jari-jari balon 5 meter.

Penyelesaian : V = $\frac{4}{3}\pi r^3$.......... **masih ingat rumus bola**

$\frac{dV}{dr} = 3.\frac{4}{3}\pi r^2$ ...**perhatikan laju perubahan volum dipengaruhi oleh laju perubahan jari-jari**

$$\frac{dV}{dr} = 3.\frac{4}{3}\pi(5)^2$$ ......**saat jari-jari = 5**

- Jika volume balon di atas bertambah pada laju tetap sebesar 10 meter kubik tiap jam, seberapa cepat jari-jari bertambah pada saat jari-jari balon 5meter?

V = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{dV}{dt} = 3.\frac{4}{3}\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$10 = 3.\frac{4}{3}\pi(5)^2\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{3.10}{3.4.5^2\pi}$$

Prosedur untuk menyelesaikan masalah laju sebagai penerapan dari turunan suatu fungsi :

1. Andai t menyatakan waktu. Gambar diagram yang berlaku untuk semua t>0. beri pengenal besaran-besaran yang nilainya tidak berubah bila t bertambah, dengan nilai-nilai konstanta yang diketahui. Berikan nama huruf pada besaran yang berubah sesuai waktu dan bubuhkan garis-garis yang sesuai waktu dan bubuhkab garis-garis yang sesuai dari gambar dengan peubah-peubah ini.
2. nyatakan apa yang diketahui dan informasi apa yang diinginkan tentang peubah-peubah. Informasi akan berbentuj turunan-turunan terhadap t
3. tulislah semua persamaan yang menghubungkan peubah-peubah yang sahih untuk semua waktu t>0, bukan hanya pada beberapa saat tertentu
4. diferensialkan persamaan yang ditentukan dalam langkah 3 secara implisit terhadap t. persamaan yang dihasilkan memuat turunan terhadap t, sahih untuk setiap t > 0
5. gantikan persamaan yang ditemukan dalam langkah 4 untuk semua data yang sahih pada saat tertenti untuk jawab masalah yang disyaratkan
6. selesaikan turunan yang diinginksn

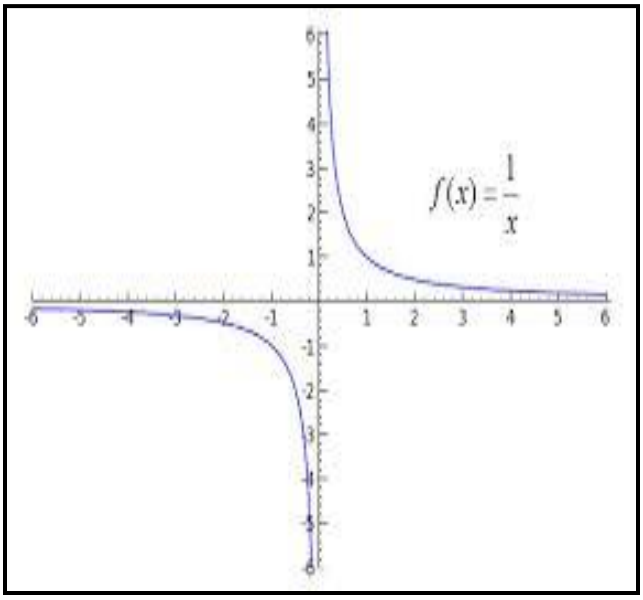
PENGGUNAAN TURUNAN DALAM MENENTUKAN MAKSIMUM MINIMUM, TITIK KRITIS DAN PENGGAMBARAN GRAFIK FUNGSI

1. MAKSIMUM DAN MINIMUM

Diberikan fungsi f dengan daerah asal S. Maka kita akan bertanya tentang nilai maksimum(minimum)

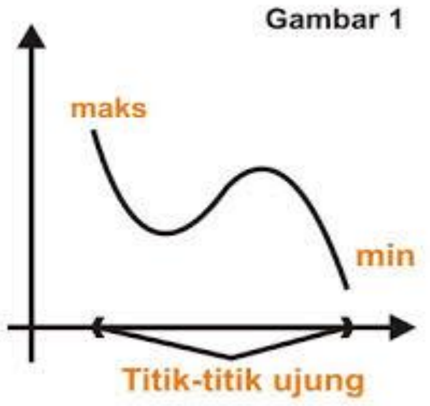
- Apakah f mempunyai maksimum pada S?
- Jika terdapat maksimum, dimana dicapainya pada S?
- Berapa nilai maksimumnya?

Perhatikan gambar berikut :



Dari gambar grafik fungsi $f(x)=\frac{1}{x}$ dengan domain dari $(-\infty,\infty)$, kita ketahui bahwa fungsi tersebut tidak mempunyai maksimum/ minimumnya. Namun jika kita batasi domain $f(x)=\frac{1}{x}$ dalam [1,3], apa yang dapat anda katakan? Benar , kita mempunyai harga maksimum/minimum dari $f(x)=\frac{1}{x}$. Nilai maksimum saat x = 1 sehingga y = 1 dan nilai mimimum saat x = 3 dengan $y=\frac{1}{3}$

Jadi apa yang dapat kita simpulkan?



DEFINISI

Andai S : domain f, memuat titik c, maka:

a. f(c) adalah nilai maksimum f pd S jika f(c) $\geq$ f(x) utk $\forall x \in S$

b. f(c) adalah nilai minimum f pd S jika f(c) $\leq$ f(x) utk $\forall x \in S$

c. f(c) adalah nilai ekstrim f pd S jika ia adalah nilai maks/nilai min

TEOREMA KEWUJUDAN MAKS/MIN

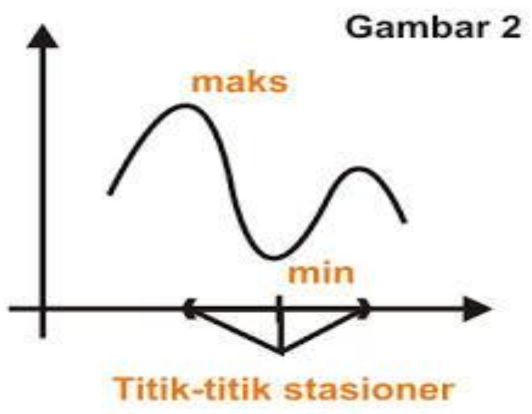
Jika f kontinu pd selang tertutup [a,b] maka f mencapai nilai maksimum dan minimum

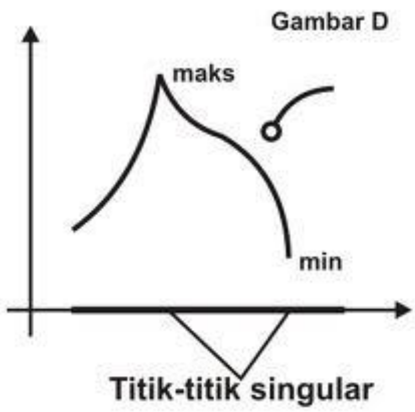
TEOREMA TITIK KRITIS

Andai f didefinisikan pd selang I yg memuat titik c. Jika f (c) adalah titik ekstrim maka c haruslah titik kritis, yakni c berupa salah satu :

a. titik ujung I
b. titik stasioner f (f'(c) =0)
c. titik singular f (f'(c) tidak ada)

Perhatikan gambar berikut :

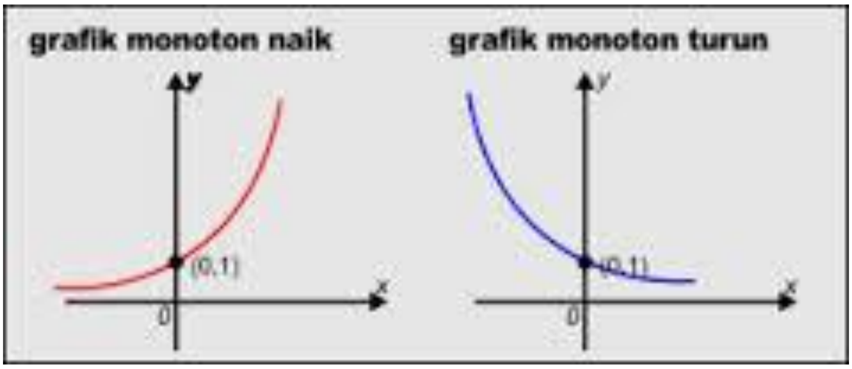




DEFINISI:

Andai f terdefinisi pd selang I

a. f naik pd I jika utk $\forall x_1, x_2$ dalam I berlaku $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
b. f turun pd I jika utk $\forall x_1, x_2$ dalam I berlaku $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
c. f monoton murni pd I jika ia naik/ turun pd I



TEOREMA

Andai f kontinu pd selang I dan dapat didifferensialkan pd setiap titik pd I

a. jika f' (x) > 0 utk setiap titik dalam x $\in$ I, maka f naik pd I
b. jika f' (x) < 0 utk setiap titik dalam x $\in$ I, maka f turun pd I

DEFINISI

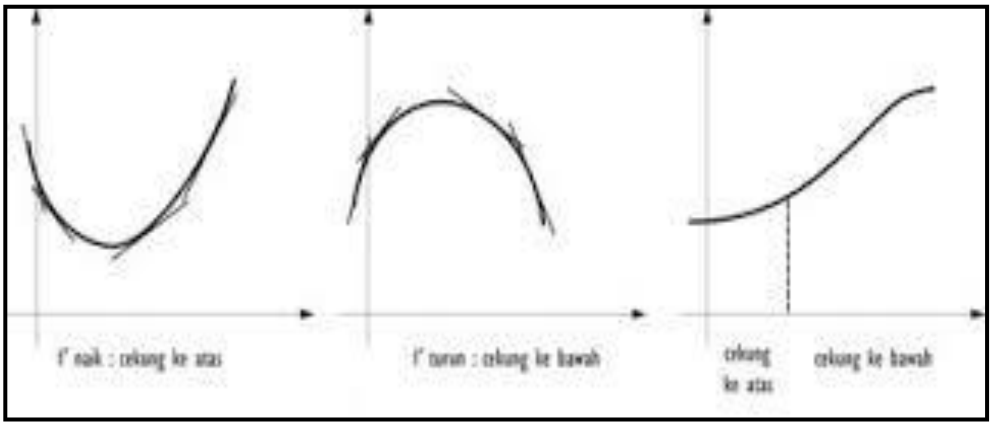
Andai f dapat didiferensialkan pd selang terbuka I,

a. jika f' naik pd I, maka grafik f cekung ke atas
b. jika f' turun pd I, maka grafik f cekung ke bawah

TEOREMA KECEKUNGAN

Andai f terdiferensial dua kali pd (a,b)

a. jika f''(x) > 0 $\forall x \subset (a,b)$, maka f cekung ke atas pada (a,b)
b. jika f''(x) < 0 $\forall x \subset (a,b)$, maka f cekung ke bawah pada (a,b)



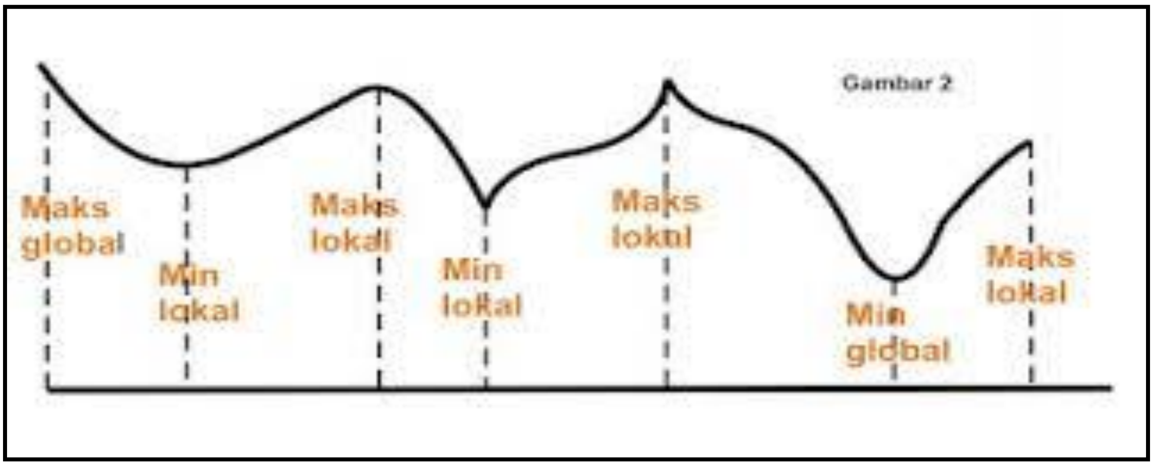
DEFINISI

Andai S : domain f, memuat titik c

a. f(c) nilai maks lokal f jika terdapat selang (a,b) yang memuat c sedemikian shg f(c) nilai maksimum f pada (a,b) $\cap S$

b. f(c) nilai min lokal f jika terdapat selang (a,b) yang memuat c sedemikian shg f(c) nilai minimum f pada (a,b) $\cap S$

c. f(c) nilai ekstrim lokal jika ia berupa nilai maksimum lokal /minimum lokal



Jika anda membagi dalam beberapa interval, apakah maksimum global juga merupakan maksimum lokal?

TURUNAN PERTAMA UNTUK EKSTRIM LOKAL

a. jika f'(x) > 0 utk $\forall x \subset (a,c)$ dan f'(x) < 0 utk semua x dalam (c,b), maka f(c) adalah nilai maksimum lokal f

b. jika f'(x) < 0 utk $\forall x \subset (a,c)$ dan f'(x) > 0 utk semua x dalam (c,b), maka f(c) adalah nilai minimum lokal f

c. jika f'(x) bertanda sama pada kedua pihak c, maka f(c) bukan nilai ekstrim lokal f

UJI TURUNAN KE DUA

Andai f' dan f'' ada pada setiap titik dalam (a,b) yang memuat c, dan andai f'(c) =0

a. jika f'' (c) < 0, f(c) adalah nilai mimimum lokal f

b. jika f'' (c) > 0, f(c) adalah nilai maksimum lokal f

Contoh :

Sketsa grafik y= 3x^{3}-9x^{2}-27x+1

Tentukan naik turunnya, titik ekstrim & titik kritisnya, serta kecekungan grafik

Kita lakukan uji turunan pertama untuk menentukan titik ekstrim

$$f^1(x) = 9x^2 - 18x - 27$$

$$f^1(x) = 9(x^2 - 2x - 3)$$

$$f^1(x) = 9(x-3)(x+1)$$

Maksimum /mimimum $f^1(x) = 0$

$$9(x-3)(x+1) = 0$$

Sehingga x = 3 atau x = -1

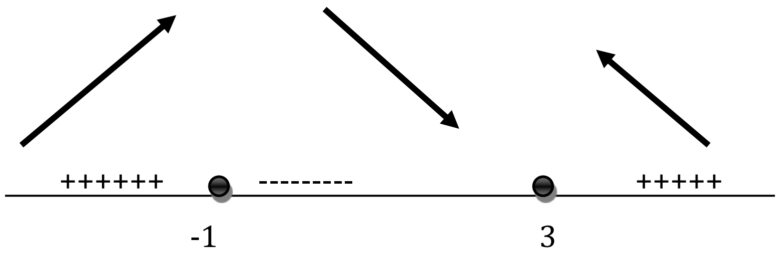
Masukkan ke harga fungsi y = 16 untuk x= -1

y= -16 untuk x =3

Uji turunan pertama

Fungsi naik jika $f^1(x) > 0$……….fungsi naik pada (-∞,-1] dan [3,∞)

Fungsi turun jika $f^1(x) < 0$……fungsi turun pada [-1,3]



Kemudian lakukan uji turunan ke dua untuk melihat kecekungan

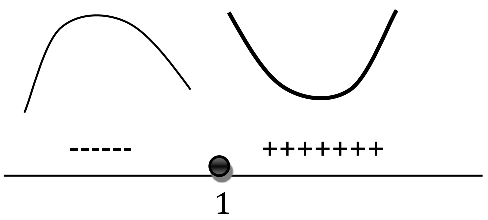
$$f^1(x) = 9x^2 - 18x - 27$$

$$f''(x) = 18x - 18$$

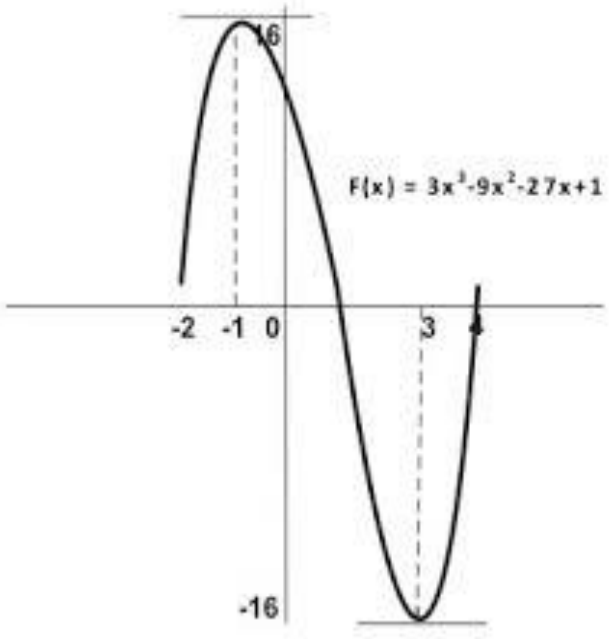
$$f''(x) = 18(x - 1)$$

Uji kecekungan $f''(x) > 0$ maka grafik akan cekung ke atas

$f''(x) < 0$ maka grafik akan cekung ke bawah



Cobalah dengan membuat sketsanya



Dalam menggambar grafik fungsi y=f(x) :

1. Tentukan perpotongan grafik dengan sumbu x , yang artinya y=0

   Tentukan perpotongan grafik dengan sumbu y, yang artinya x=0
2. Lakukan uji turunan pertama untuk menentukan titik ekstrimnya
   - Jika f'(x) > 0 maka grafik akan naik
   - Jika f'(x) = 0 maka grafik menuju titik kritis (stasioner)
   - Jika f'(x) > 0 maka grafik akanturun
3. Lakukan uji turunan kedua untuk menentukan titik ekstrimnya
   - Jika f''(x) > 0 maka grafik akan cekung ke atas
   - Jika f'(x) = 0 maka akan ditemukan titik belok
   - Jika f'(x) > 0 maka grafik akan cekung ke bawah
4. Periksalah adakah asimtootnya
   - Asimtoot datar y = c , yakni saat $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$
   - Asimtoot tegak x = c, yakni saat $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$
   - Asimtoot miring y = ax +b, yakni saat $\lim_{x \to \infty} f(x) = ax + b$

TEOREMA NILAI RATA-RATA UNTUK TURUNAN

Jika f kontinu pada selang tertutup [a,b] dan terdifferensial pada titik (a,b) , maka terdapat paling sedikit satu bilangan c dalam (a,b) dimana:

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ Atau f(b)-f(a) = f'(c) (b-a)

Sumber belajar :

- Louis Leithold , Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik Jilid 1 Edisi 5, Jakarta : Erlangga
- Purcel, EJ dan Varberg, Kalkulus dan Geometri Analitik Jilid 1, Jakarta : Erlangga
- James Stewart, Kalkulus Jilid 1, edisi 4, Jakarta : Erlangga

LEMBAR KERJA MAHASISWA-1

Selesaikan masalah di bawah ini dengan berdiskusi dalam kelompok saudara dan presentasikan :

1. Sebuah kota dijangkiti oleh epidemi influensa, petugas menaksir bahwa t hari setelah mulainya epidemi, banyaknya orang yang sakit flu diberikan oleh

N(t)= $120t^2 - 2t^3$, asal $0 \leq t \leq 40$. Dengan laju berapa flu menular pada saat t=20?

2. Masing-masing berikut adalah suatu turunan,tetapi dari fungsi apa:

a. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(4+h)^2 - 16}{h}$

b. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3+h)^2 + 2(3+h) - 15}{h}$

3, Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$ dari fungsi berikut dengan menggunakan aturan pencarian turunan maupun turunan fungsi implisit:

a. $x^2 + y^2 - (12{,}5)^2 = 0$

b. $6x - \sqrt{2xy} + xy^3 = y^2$

b. $\dfrac{y^2}{x^3} - 1 = y^{3/2}$

4. Sketsalah grafiknya

a. f(x) = 2- 15 x+ 9 x^2 + x^3

b. $f(x) = \dfrac{3x^5 - 20x^3}{32}$

(dengan menentukan naik turunnya fungsi, kecekungan serta semua titik kritis dan ekstrim lokalnya