HIMPUNAN KOMPAK

Definisi 1

Misal (X, d) ruang metrik, $K \subset X$, A himpunan indeks dan G_α himpunan terbuka dalam X untuk suatu $\alpha \in X$. Keluarga himpunan terbuka $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ disebut **penutup (selimut) terbuka** (***open cover***) untuk K jika $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Hal ini berarti jika $x \in K$, maka terdapat $\alpha \in A$ sehingga $x \in G_\alpha$.

Jika $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in A\}$ suatu penutup terbuka untuk K, $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$, dan $\mathcal{A}$ masih merupakan penutup terbuka untuk K, maka $\mathcal{A}$ disebut **penutup (selimut) bagian terbuka** (***open subcover***) dari $\mathcal{G}$.

Contoh 1

Diberikan himpunan buka $K = (0,1)$ dan keluarga himpunan terbuka $\mathcal{G}_1 = \{(0, n) : n = 1,2,3,4,5\}$, $\mathcal{G}_2 = \{(0, n) : n \in \mathbb{N}\}$ dan $\mathcal{G}_3 = \{(0, r) : r \in \mathbb{Q}^+\}$. Selidikilah apakah $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ dan $\mathcal{G}_3$ merupakan penutup (selimut) terbuka untuk K? Selidiki pula mana yang merupakan penutup (selimut) terbuka bagian dari yang lain.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa $(1,3) \subset (0,5) = \bigcup_{n=1}^{5} (0, n)$, hal ini berarti $\mathcal{G}_1$ merupakan penutup terbuka untuk K.

Perhatikan bahwa $(1,3) \subset (0, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (0, n)$, hal ini berarti $\mathcal{G}_2$ merupakan penutup terbuka untuk K.

Perhatikan bahwa $(1,3) \subset (0, \infty) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^+} (0, r)$, hal ini berarti $\mathcal{G}_2$ merupakan penutup terbuka untuk K.

Jika diperhatikan lebih lanjut, maka diperoleh hubungan $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_3$, dan $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_3$. Dengan demikian $\mathcal{G}_1$ merupakan penutup bagian terbuka dari $\mathcal{G}_2$ dan $\mathcal{G}_3$, serta $\mathcal{G}_2$ merupakan penutup bagian terbuka dari $\mathcal{G}_3$.

Contoh 2

Diberikan himpunan $K = \{x_n \in \mathbb{R} : n = 1,2,3, \cdots, N_0\}$ dan keluarga himpunan terbuka $\mathcal{G}_1 = \{\mathbb{R}\}$, $\mathcal{G}_2 = \{(x_n - 1, x_n + 1) : x_n \in K, n = 1,2,3, \cdots, N_0\}$, dan $\mathcal{G}_3 = \{(-r, r) : r \in \mathbb{Q}\}$. Selidikilah apakah $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ dan $\mathcal{G}_3$ merupakan penutup (selimut) terbuka untuk K? Selidiki pula mana yang merupakan penutup (selimut) terbuka bagian dari yang lain.

Pembahasan:

Jelas bahwa $K \subset \mathbb{R}$, hal ini berarti $\mathcal{G}_1$ merupakan penutup terbuka untuk K.

Perhatikan bahwa $x_n \in (x_n - 1, x_n + 1)$ untuk setiap $n = 1,2,3, \cdots, N_0$, akibatnya:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{N_0} (x_n - 1, x_n + 1)$$

Hal ini berarti $\mathcal{G}_2$ merupakan penutup terbuka untuk *K*.

Perhatikan pula bahwa jika $x_n \in \mathbb{R}$, maka terdapat bilangan rasional $r_n > 0$ sehingga $x_n \in (-r_n, r_n)$ untuk setiap $n = 1,2,3,\cdots, N_0$, akibatnya:

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{N_0} (-r_n, r_n) \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (-r, r)$$

Hal ini berarti $\mathcal{G}_3$ merupakan penutup terbuka untuk *K*.

Jika diperhatikan lebih lanjut, maka diperoleh $\mathcal{G}_1 \not\subset \mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_1 \not\subset \mathcal{G}_3$, dan $\mathcal{G}_2 \not\subset \mathcal{G}_3$. Dengan demikian $\mathcal{G}_1$ bukan merupakan penutup bagian terbuka dari $\mathcal{G}_2$ dan $\mathcal{G}_3$, serta $\mathcal{G}_2$ juga bukan merupakan penutup bagian terbuka dari $\mathcal{G}_3$.

Definisi 2

Misal (X, d) ruang metrik dan $K \subset X$. Himpunan *K* disebut **kompak** jika setiap penutup terbuka untuk *K* mempunyai penutup bagian terbuka berhingga.

Himpunan *K* disebut **tidak kompak** jika ada penutup (selimut) terbuka untuk *K* yang tidak mempunyai penutup bagian terbuka berhingga.

Contoh 3

Diberikan himpunan $K = \{x_n \in \mathbb{R} : n = 1,2,3,\cdots, N_0\}$. Selidikilah apakah *K* merupakan himpunan kompak atau bukan.

Pembahasan:

Diberikan $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in A\}$ sebarang penutup terbuka untuk *K*, yaitu berlaku $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Perhatikan bahwa jika $x_n \in K$ untuk suatu $n \in \{1,2,3,\cdots, N_0\}$, maka terdapat $\alpha_n \in A$ sehingga $x_n \in G_{\alpha_n}$. Akibatnya diperoleh $K = \bigcup_{n=1}^{N_0} \{x_n\} \subset \bigcup_{n=1}^{N_0} G_{\alpha_n} \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Hal ini berarti keluarga himpunan $\{G_{\alpha_n} : n = 1,2,3,\cdots, N_0\}$ merupakan penutup bagian terbuka berhingga untuk *K*.

Karena $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in A\}$ sebarang penutup terbuka untuk *K*, maka disimpulkan *K* merupakan himpunan kompak.

Contoh 4

Diberikan himpunan $K = \mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$, yaitu himpunan semua bilangan asli. Selidikilah apakah *K* merupakan himpunan kompak atau bukan.

Pembahasan:

Andaikan *K* merupakan himpunan kompak.

Dipilih keluarga himpunan terbuka $\mathcal{G} = \left\{\left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) : n = 1,2,3,\cdots\right\}$. Perhatikan bahwa $K = \mathbb{N} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) = \mathbb{R}$, hal ini berarti $\mathcal{G}$ merupakan penutup terbuka untuk *K*. Berdasarkan pengandaian, K merupakan himpunan kompak, oleh karena itu $\mathcal{G}$ mempunyai penutup bagian terbuka berhingga. Jadi terdapat koleksi berhingga $\left\{G_{k_1}, G_{k_2}, G_{k_3}, \cdots, G_{k_{N_0}}\right\} \subset \mathcal{G}$ dengan $G_{k_i} = \left(k_i - \frac{1}{2}, k_i + \frac{1}{2}\right)$, $i = 1,2,\cdots,N_0$ sehingga berlaku $K = \mathbb{N} \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} G_{k_i}$. Selanjutnya diambil $M_0 = \text{maks}\{k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{N_0}\}$, maka $k_i + \frac{1}{2} \leq M_0 + \frac{1}{2} < M_0 + 1$ dengan $i = 1,2,\cdots,N_0$. Hal ini berarti $M_0 + 1 \in \mathbb{N}$, tetapi $M_0 + 1 \notin \bigcup_{i=1}^{N_0} G_{k_i} = \bigcup_{i=1}^{N_0}\left(k_i - \frac{1}{2}, k_i + \frac{1}{2}\right)$. Kontradiksi dengan hasil di atas bahwa $\bigcup_{i=1}^{N_0} G_{k_i}$ merupakan penutup bagian terbuka berhingga untuk $K = \mathbb{N}$. Dengan demikian pengandaian salah. Jadi $K = \mathbb{N}$ bukan merupakan himpunan kompak.

Contoh 5

Diberikan himpunan $K = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, dengan $\mathbb{N}$ himpunan semua bilangan asli. Selidikilah apakah *K* merupakan himpunan kompak atau bukan.

Pembahasan:

Andaikan *K* merupakan himpunan kompak.

Dipilih keluarga himpunan terbuka $\mathcal{G} = \left\{\left(\frac{1}{n + \frac{1}{2}}, \frac{1}{n - \frac{1}{2}}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$. Perhatikan bahwa $K \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{n + \frac{1}{2}}, \frac{1}{n - \frac{1}{2}}\right)$, hal ini berarti $\mathcal{G}$ merupakan penutup terbuka untuk *K*.

Berdasarkan pengandaian, K merupakan himpunan kompak, oleh karena itu $\mathcal{G}$ mempunyai penutup bagian terbuka berhingga. Jadi terdapat koleksi berhingga $\left\{G_{k_1}, G_{k_2}, G_{k_3}, \cdots, G_{k_{N_0}}\right\} \subset \mathcal{G}$ dengan $G_{k_i} = \left(\frac{1}{k_i + \frac{1}{2}}, \frac{1}{k_i - \frac{1}{2}}\right)$, $i = 1,2,\cdots,N_0$ sehingga berlaku $K \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} G_{k_i}$. Selanjutnya diambil $M_0 = \text{maks}\{k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{N_0}\}$, maka $k_i + \frac{1}{2} \leq M_0 + \frac{1}{2} < M_0 + 1$ dan akibatnya $\frac{1}{k_i + \frac{1}{2}} \geq \frac{1}{M_0 + \frac{1}{2}} > \frac{1}{M_0 + 1}$ dengan $i = 1,2,\cdots,N_0$. Hal ini berarti $\frac{1}{M_0+1} \in K$, tetapi $\frac{1}{M_0+1} \notin \bigcup_{i=1}^{N_0} G_{k_i} = \bigcup_{i=1}^{N_0}\left(\frac{1}{k_i + \frac{1}{2}}, \frac{1}{k_i - \frac{1}{2}}\right)$. Kontradiksi dengan hasil di atas bahwa $\bigcup_{i=1}^{N_0} G_{k_i}$ merupakan penutup bagian terbuka berhingga untuk K. Dengan demikian pengandaian salah. Jadi $K = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ bukan merupakan himpunan kompak.

Contoh 6

Diberikan himpunan $K = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\right\}$. Selidikilah apakah K merupakan himpunan kompak atau bukan.

Pembahasan:

Misal $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ sebarang penutup terbuka untuk K. Hal ini berarti $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$.

Berdasarkan yang diketahui $0 \in K$, maka terdapat $\alpha_0 \in A$ sehingga $0 \in G_{\alpha_0}$. Mengingat bahwa G_{α_0} merupakan himpunan terbuka, maka terdapat $\delta > 0$ sehingga berlaku $N_\delta(0) \subset G_{\alpha_0}$. Jelas bahwa 0 merupakan titik limit K, akibatnya $N_\delta(0)$ memuat tak hingga banyak titik-titik anggota K.

Dengan adanya $\delta > 0$, maka berdasarkan sifat Archimedes, terdapat $N_0 \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku $N_0 > \frac{1}{\delta}$, yang ekuivalen dengan $\delta > \frac{1}{N_0}$. Akibatnya, untuk semua $n \geq N_0$, berlaku $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_0}$. Hal ini berakibat $\frac{1}{n} \in N_\delta(0) \subset G_{\alpha_0}$ untuk semua $n \geq N_0$.

Jadi titik-titik anggota K yang tidak terletak di dalam G_{α_0} banyaknya berhingga, yaitu paling banyak adalah titik-titik $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{N_0 - 1}$. Selanjutnya untuk setiap $\frac{1}{k}$, $1 \leq k \leq N_0 - 1$, diambil satu $\alpha_k \in A$ sehingga $\frac{1}{k} \in G_{\alpha_k}$, dengan $k = 1,2,3, \cdots, N_0 - 1$.

Jadi $\left\{G_{\alpha_0}, G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha_{N_0-1}}\right\}$ merupakan penutup bagian terbuka berhingga untuk K. Dengan demikian K merupakan himpunan kompak.

Contoh 7

Diberikan himpunan $K = (0, 1)$. Selidikilah apakah K merupakan himpunan kompak atau bukan.

Pembahasan:

Andaikan K merupakan himpunan kompak.

Dipilih keluarga himpunan terbuka $\mathcal{G} = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right) : n = 1,2,3, \cdots\right\}$. Perhatikan bahwa $K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}, 1\right) = (0, 1)$, hal ini berarti $\mathcal{G}$ merupakan penutup terbuka untuk K. Berdasarkan pengandaian, K merupakan himpunan kompak, oleh karena itu $\mathcal{G}$ mempunyai penutup bagian terbuka berhingga. Jadi terdapat koleksi berhingga $\left\{G_{k_1}, G_{k_2}, G_{k_3}, \cdots, G_{k_{N_0}}\right\} \subset \mathcal{G}$ dengan $G_{k_i} = \left(\frac{1}{k_i}, 1\right)$, $i = 1,2, \cdots, N_0$ sehingga berlaku $K \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} G_{k_i}$. Selanjutnya diambil $M_0 = \text{maks}\left\{k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{N_0}\right\}$, maka $k_i \leq M_0 < M_0 + 1$ dan akibatnya $\frac{1}{k_i} \geq \frac{1}{M_0} > \frac{1}{M_0 + 1}$ dengan $i = 1,2, \cdots, N_0$. Hal ini berarti $\frac{1}{M_0+1} \in K$, tetapi $\frac{1}{M_0+1} \notin \bigcup_{i=1}^{N_0} G_{k_i} = \bigcup_{i=1}^{N_0} \left(\frac{1}{k_i}, 1\right) = \left(\frac{1}{M_0}, 1\right)$.

Kontradiksi dengan hasil di atas bahwa $\bigcup_{i=1}^{N_0} G_{k_i}$ merupakan penutup bagian terbuka berhingga untuk K. Dengan demikian pengandaian salah. Jadi $K = (0, 1)$ bukan merupakan himpunan kompak.

Teorema

Misal (X, d) ruang metrik, dan $E \subset X$. Jika E kompak, maka E tertutup.

Bukti:

Misal $p \in E^c$ sebarang, maka $p \notin E$ dan akibatnya $x \neq p$ untuk semua $x \in E$. Hal ini berakibat $d(x, p) > 0$ untuk semua $x \in E$. Lebih lanjut, untuk semua $x \in E$ dibuat persekitaran $N_{r_x}(x)$ dan $N_{r_x}(p)$ dengan $0 < r_x < \frac{1}{2} d(x, p)$.

Jelas bahwa untuk semua $x \in E$ berlaku $N_{r_x}(x) \cap N_{r_x}(p) = \emptyset$ dan $\{N_{r_x}(x) | x \in E\}$ merupakan peliput terbuka untuk E, sebab $E \subset \bigcup_{x \in E} N_{r_x}(x)$.

Menurut asumsi (hipótesis) E merupakan himpunan kompak, maka terdapat $x_1, x_2, \cdots, x_{N_0} \in E$ sehingga $E \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} N_{r_{x_i}}(x_i)$.

Pilih $r = \min \{r_{x_i} | 1 \leq i \leq N_0\} > 0$, maka $p \in N_r(p) \subset N_{r_{x_i}}(p)$, dengan $i = 1, 2, 3, \cdots, N_0$.

Lebih lanjut diperoleh:

$$\begin{aligned}
(N_r(p) \cap E) &\subset N_r(p) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{N_0} N_{r_{x_i}}(x_i)\right) \\
&= \bigcup_{i=1}^{N_0} \left(N_r(p) \cap N_{r_{x_i}}(x_i)\right) \\
&\subset \bigcup_{i=1}^{N_0} \left(N_{r_{x_i}}(p) \cap N_{r_{x_i}}(x_i)\right) \\
&= \bigcup_{i=1}^{N_0} \emptyset = \emptyset
\end{aligned}$$

Hal ini berarti $N_r(p) \cap E = \emptyset$, akibatnya $N_r(p) \subset E^c$.

Jadi jika $p \in E^c$ sebarang, maka terdapat $r > 0$ sehingga berlaku $N_r(p) \subset E^c$. Dengan demikian p merupakan titik interior E^c. Hal ini berarti E^c merupakan himpunan terbuka, akibatnya merupakan E himpunan tertutup.

Teorema

Misal (X, d) ruang metrik, dan $E \subset X$. Jika E kompak, maka E terbatas.

Bukti:

Untuk semua $x \in E$ dibuat persekitaran $N_1(x)$. Perhatikan bahwa $E \subset \bigcup_{x \in E} N_1(x)$, hal ini berarti $\{N_1(x) | x \in E\}$ merupakan peliput terbuka untuk E. Menurut asumsi (hipótesis) E merupakan himpunan kompak, maka terdapat $x_1, x_2, \cdots, x_{N_0} \in E$ sehingga $E \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} N_1(x_i)$.

Hal ini berarti untuk sembarang $x \in E$, terdapat bilangan asli m dengan $1 \leq m \leq N_0$ sehingga $x \in N_1(x_m)$, yang berakibat $d(x, x_m) < 1$.

Selanjutnya diambil $x_1 \in E \subset X$, dan diperoleh:

$$d(x, x_1) \leq d(x, x_m) + d(x_m, x_1) < 1 + d(x_m, x_1).$$

Diambil $M - 1 = \text{maks}\left\{d\left(x_j, x_1\right) \mid 1 \leq j \leq m\right\}$, maka untuk semua $x \in E$ berlaku

$$d(x, x_1) < 1 + d(x_m, x_1) \leq 1 + (M - 1) = M.$$

Jadi terdapat $x_1 \in E \subset X$ dan $M > 0$ sedemikian hingga $d(x, x_1) < M$ untuk semua $x \in E$. Dengan demikian *E* terbatas.

Cara lain:

Teorema

Misal $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ruang metrik, dan $E \subset \mathbb{R}$. Jika *E* kompak, maka *E* terbatas.

Bukti:

Perhatikan bahwa untuk setiap bilangan asli *n*, $H_n = (-n, n)$ merupakan himpunan terbuka dan berlaku:

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) = \mathbb{R}.$$

Hal ini berarti koleksi $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$ merupakan penutup terbuka untuk *E*. Menurut asumsi (hipótesis) *E* merupakan himpunan kompak, maka terdapat koleksi berhingga $H_1, H_2, \cdots, H_M$ sehingga

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{M} H_n = (-M, M).$$

Hal ini berarti $|x| \leq M$ untuk semua $x \in E$. Jadi *E* terbatas.

Teorema

Misal (X, d) ruang metrik, dan $K, E \subset X$. Jika K kompak dan E infinite subset K, maka *E* mempunyai titik limit di dalam K.