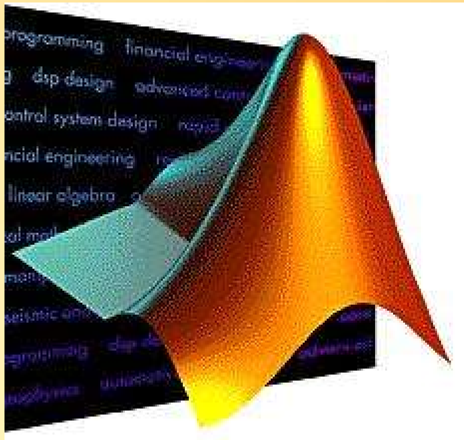
09 Parsial Differential Equation

Parsial Differential Equation



Persamaan differensial parsial secara umum untuk orde dua

Persamaan differensial parsial secara umum untuk orde dua dalam variabel bebas x dan y dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

Persamaan differensial parsial dapat diklasifikasikan tergantung dari nilai $B^2 - 4AC$.

- jika $B^2 - 4AC < 0$, maka persamaan Eliptik
- jika $B^2 - 4AC = 0$, maka persamaan Parabolik
- jika $B^2 - 4AC > 0$, maka persamaan Hiperbolik

- Jika koefisien A, B, dan C adalah fungsi x, y, dan/atau u, persamaan mungkin berubah dari satu klasifikasi menjadi klasifikasi lain pada titik bervariasi.
- Dalam teknik kimia persamaan yang sering dijumpai adalah persamaan differensial eliptik dan parabolik, sehingga kedua persamaan itulah yang akan dibahas dalam kuliah ini.

PERSAMAAN DIFFERENSIAL ELIPTIK

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

Persamaan differensial eliptik terbentuk jika koefisien A dan C pada persamaan umum sama dengan 1 dan B sama dengan nol, sehingga $B^2 - 4AC < 1$.

Ada 2 type persamaan differensial eliptik yang akan dibahas, yaitu

- Persamaan Laplace

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- Persamaan Poisson

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

PERSAMAAN LAPLACE

- Persamaan Laplace sering muncul dari penyusunan persoalan perpindahan panas dalam suatu plat.
- Bentuk paling sederhana persamaan Laplace adalah

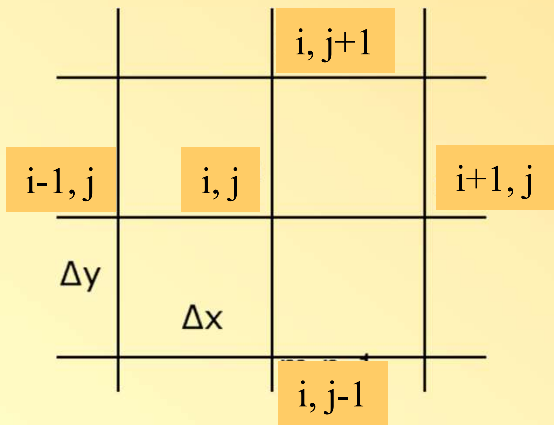
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Penyelesaian persamaan Laplace adalah metode beda hingga.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} +_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} +_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

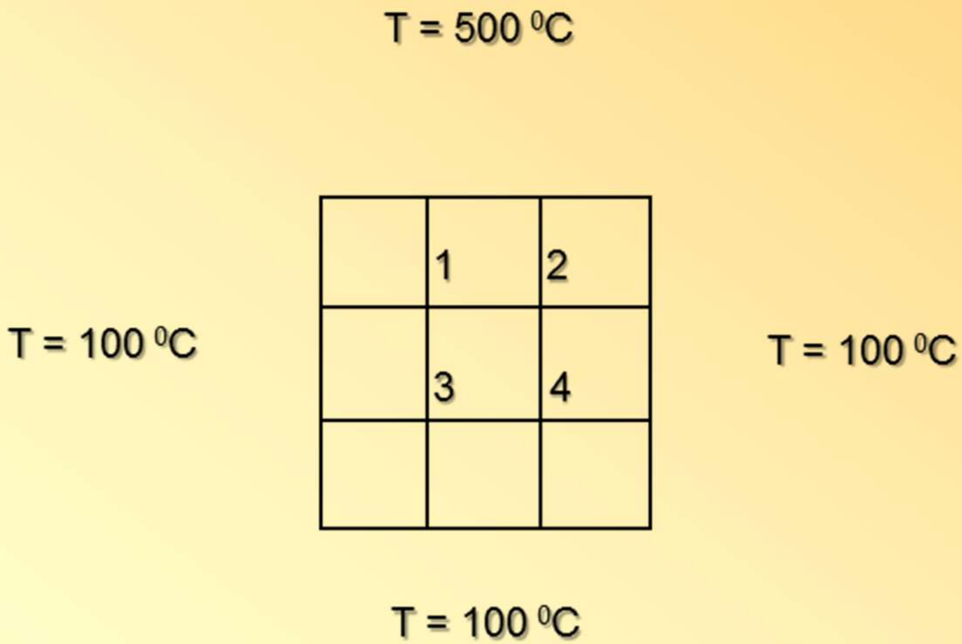
Jika diambil $\Delta x = \Delta y = h$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} [\, u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}] = 0$$

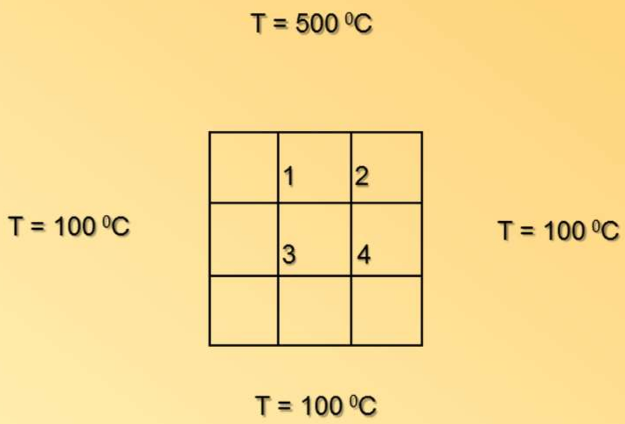


Contoh 1

Plat tembaga tipis dengan ukuran 3 cm x 3 cm. Permukaan salah satu sisi dipertahankan 500 ^{o}C dan ketiga sisi yang lain dipertahankan pada suhu 100 ^{o}C. Permukaan plat diisolasi sehingga panas mengalir arah x dan y saja. Tentukan distribusi suhu plat tersebut pada keadaan tunak (*steady)*.



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{h^2}\left[\, u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}\right]=0$$



$T2 + 100 + 500 + T3 - 4T1 = 0$

$100 + T1 + 500 + T4 - 4T2 = 0$

$T4 + 100 + T1 + 100 - 4T3 = 0$

$100 + T3 + T2 + 100 - 4T4 = 0$

$$\begin{aligned}
-4T1 + T2 + T3 \quad &= -600\\
T1 - 4T2 \quad + T4 &= -600\\
T1 \quad - 4T3 + T4 &= -200\\
T2 + T3 - 4T4 &= -200
\end{aligned}$$

$$T = \begin{matrix} 250\\ 250\\ 150\\ 150 \end{matrix}$$

Contoh 2

Plat tembaga tipis dengan ukuran 6 cm x 8 cm. Permukaan salah satu sisi dengan panjang 6 cm dipertahankan 100 ^{o}C dan ketiga sisi yang lain dipertahankan pada suhu 40 ^{o}C. Permukaan plat diisolasi sehingga panas mengalir arah x dan y saja. Tentukan distribusi suhu plat tersebut pada keadaan tunak (steady).

Contoh 3

Plat tipis dari baja mempunyai ukuran 10 cm x 20 cm. Jika salah satu sisi ukuran 10 cm dijaga pada 100 ^{O}C dan ketiga sisi yang lain dijaga pada 0 ^{O}C. Tentukan profil temperatur pada plat. Untuk baja k = 0,16 kal/detik.cm^2.C/cm.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

dengan $u(x,0) = 0,$

$u(x,10) = 0,$

$u(0,y) = 0,$

$u(20,y) = 100.$

```
clear;
N=20;
M=10;

for j=0:N-2
  for i=1:M-2
     X(i+j*(M-1))=0;
  end
end
for i=1:M-1
   X(i*(N-1))=-100;
end
```

```
% Penyusunan matriks A
for i=1:(N-1)*(M-1)
   A(i,i)=-4;
end
for i=1:N-2
   for k=0:M-2
   A(i+k*(N-1),i+1+k*(N-1))=1;
   end
end
for k=0:M-3
   for i=1:N-1
   A(i+k*(N-1),i+(k+1)*(N-1))=1;
   end
end
for i=1:(N-1)*(M-1)
   for j=1:i
   A(i,j)=A(j,i);
   end
end
```

```
% Inversi Matriks dan Perhitungan Temperatur
G=inv(A);
U=G*X';

% Plot hasil bentuk contour
for i=1:M-1
    for j=1:N-1
    x(i,j)=U(j+(i-1)*(N-1));
    end
end
T = x
[i,j]=meshgrid(1:1:N-1,1:1:M-1);
[c,h]=contourf(i,j,x);
```

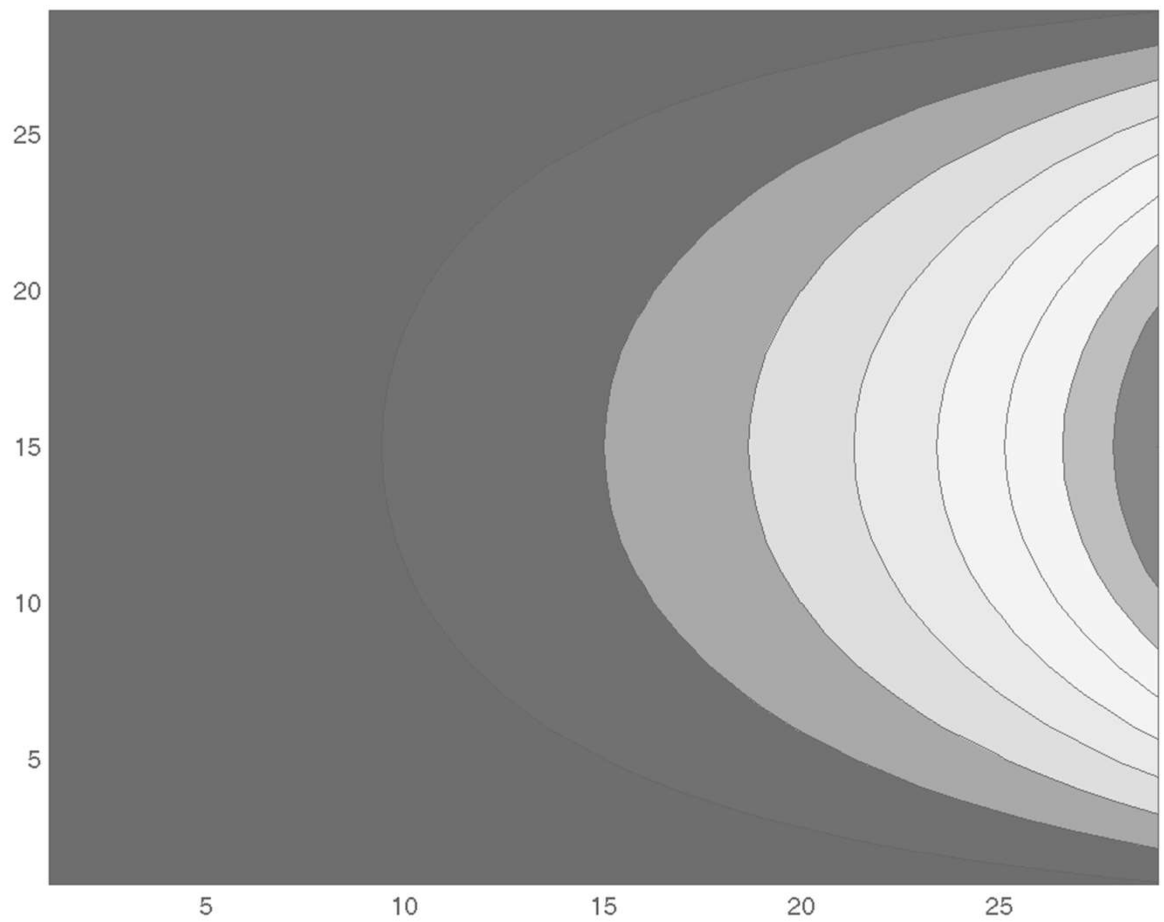
Contoh 4

Tentukan distribusi temperatur pada sebuah plat bujursangkar yang salah satu sisinya mengikuti persamaan T = 100*sin(π*y), sedang ketiga sisi yang lain sama dengan nol.

```
clear;
N=30;

for j=0:N-2
 for i=1:N-2
   X(i+j*(N-1))=0;
 end
end
for i=1:N-1
  X(i*(N-1))=-100*sin(i*pi/N);
end
```

```
% Penyusunan matriks A
for i=1:(N-1)*(N-1)
  A(i,i)=-4;
end
for i=1:N-2
  for k=0:N-2
  A(i+k*(N-1),i+1+k*(N-1))=1;
  end
end
for k=0:N-3
  for i=1:N-1
  A(i+k*(N-1),i+(k+1)*(N-1))=1;
  end
end
for i=1:(N-1)*(N-1)
  for j=1:i
  A(i,j)=A(j,i);
  end
end
```

```
% Inversi Matriks dan Perhitungan temperatur
M=inv(A);
U=M*X';

% Plot hasil pada bentuk contour
for i=1:N-1
    for j=1:N-1
    x(i,j)=U(j+(i-1)*(N-1));
    end
end

[i,j]=meshgrid(1:1:N-1,1:1:N-1);
[c,h]=contourf(i,j,x);
```


25
20
15
10
5
5
10
15
20
25

Fungsi ellipgen

```
function [a,om]=ellipgen(nx,hx,ny,hy,G,F,bx0,bxn,by0,byn)
%       Penyelesaian persamaan PD Parsial Eliptik
%         d^2 Z    d^2 Z
%         ----- + ----- + G(x,y)*Z = F(x,y)
%         d x^2    d y^2
%       pada plat rektanguler
%       Cara menggunakan fungsi ini
%       hx,hy = ukuran titik arah x, y
%       F, G = array (ny+1,nx+1) representasi F(x,y), G(x,y)
%       bx0, bxn = vektor baris kondisi batas pada x0, xn
%       by0, byn = vektor baris kondisi batas pada y0, yn
%       a = array (ny+1,nx+1) penyelesaian
%
%       Nama File : ellipgen.m
%       Surakarta, Oktober 2005
%    ---------------------------------------------------------------

nmax=(nx-1)*(ny-1); r=hy/hx;
a=zeros(ny+1,nx+1); p=zeros(ny+1,nx+1);
if nargin==6
```

```
nmax=(nx-1)*(ny-1); r=hy/hx;
a=zeros(ny+1,nx+1); p=zeros(ny+1,nx+1);
if nargin==6
    ncase=0;mode=F;
end
if nargin==10
    test=0;
    if F==zeros(ny+1,nx+1), test=1; end
    if bx0==zeros(1,ny+1), test=test+1; end
    if bxn==zeros(1,ny+1), test=test+1; end
    if by0==zeros(1,nx+1), test=test+1; end
    if byn==zeros(1,nx+1), test=test+1; end
    if test==5
        disp(' WARNING ')
        disp('  ')
        break
    end
    bx0=bx0(1,ny+1:-1:1); bxn=bxn(1,ny+1:-1:1);
    a(1,:)=byn; a(ny+1,:)=by0;
    a(:,1)=bx0'; a(:,nx+1)=bxn';ncase=1;
end
for i=2:ny
    for j=2:nx
        nn=(i-2)*(nx-1)+(j-1);
        q(nn,1)=i; q(nn,2)=j; p(i,j)=nn;
    end
end
C=zeros(nmax,nmax); e=zeros(nmax,1); om=zeros(nmax,1);
if ncase==1, g=zeros(nmax,1); end
for i=2:ny
    for j=2:nx
        nn=p(i,j); C(nn,nn)=-(2+2*r^2); e(nn)=hy^2*G(i,j);
        if ncase==1, g(nn)=g(nn)+hy^2*F(i,j); end
        if p(i+1,j)~=0
            np=p(i+1,j); C(nn,np)=1;
        else
            if ncase==1, g(nn)=g(nn)-by0(j); end
        end
        if p(i-1,j)~=0
            np=p(i-1,j); C(nn,np)=1;
```

Distribusi Temperatur pada Plat Rektanguler

Tentukan distribusi temperatur dalam suatu plat rektanguler, dengan kondisi batas sebagai berikut

$x = 0, T = 100y$

$x = 3, T = 250y$

$y = 0, T = 0$

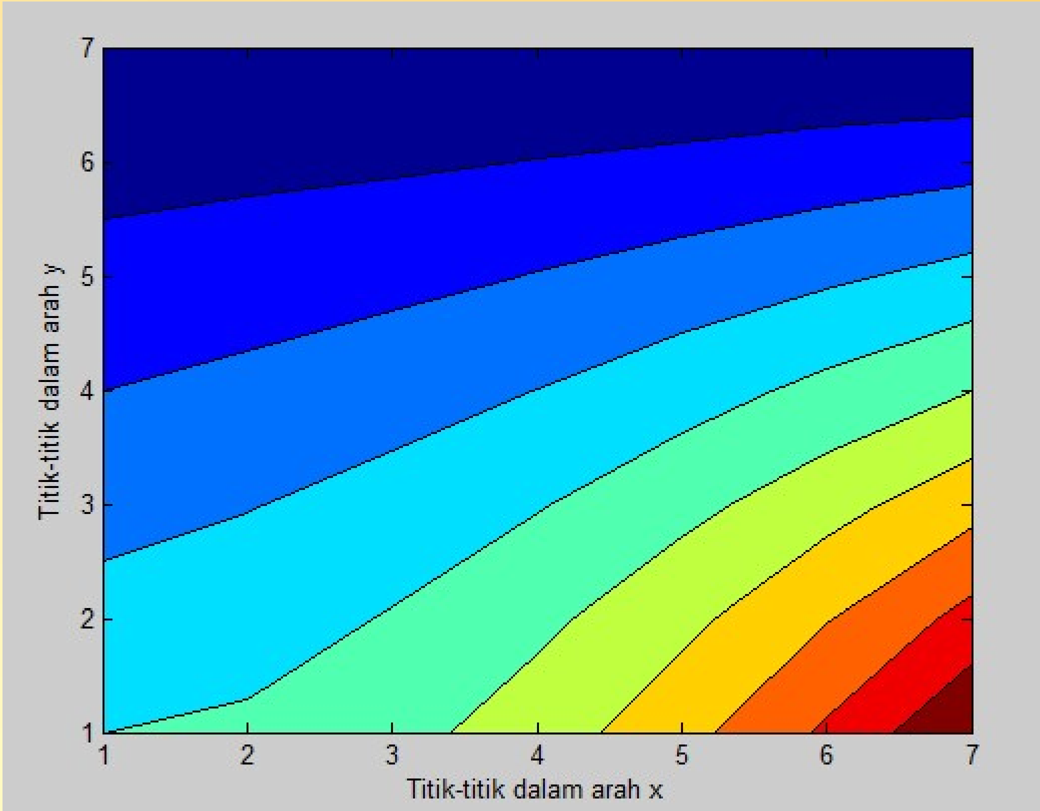
$y = 2, T = 200 + (100/3)x^2$

Penyelesaian untuk ukuran 6 x 6.

Program Matlab

```
clear all
% Jumlah titik arah x, y
nx=6; ny=6;
% Ukuran titik arah x, y
hx=0.5; hy=0.3333;
% Input data pada kondisi batas
by0=[0 0 0 0 0 0 0];
byn=[200 208.33 233.33 275 333.33 408.33 500];
bx0=[0 33.33  66.67 100 133.33 166.67 200];
bxn=[0 83.33 166.67 250 333.33 416.67 500];
% Penyelesaian dg fungsi ellipgen
F=zeros(ny+1,nx+1); G=F;              % PD Laplace
a=ellipgen(nx, hx, ny, hy, G, F, bx0, bxn, by0, byn);
% Plot hasil
contourf(a)
xlabel('Titik-titik dalam arah x');
ylabel('Titik-titik dalam arah y');
```

09 Parsial Differential Equation

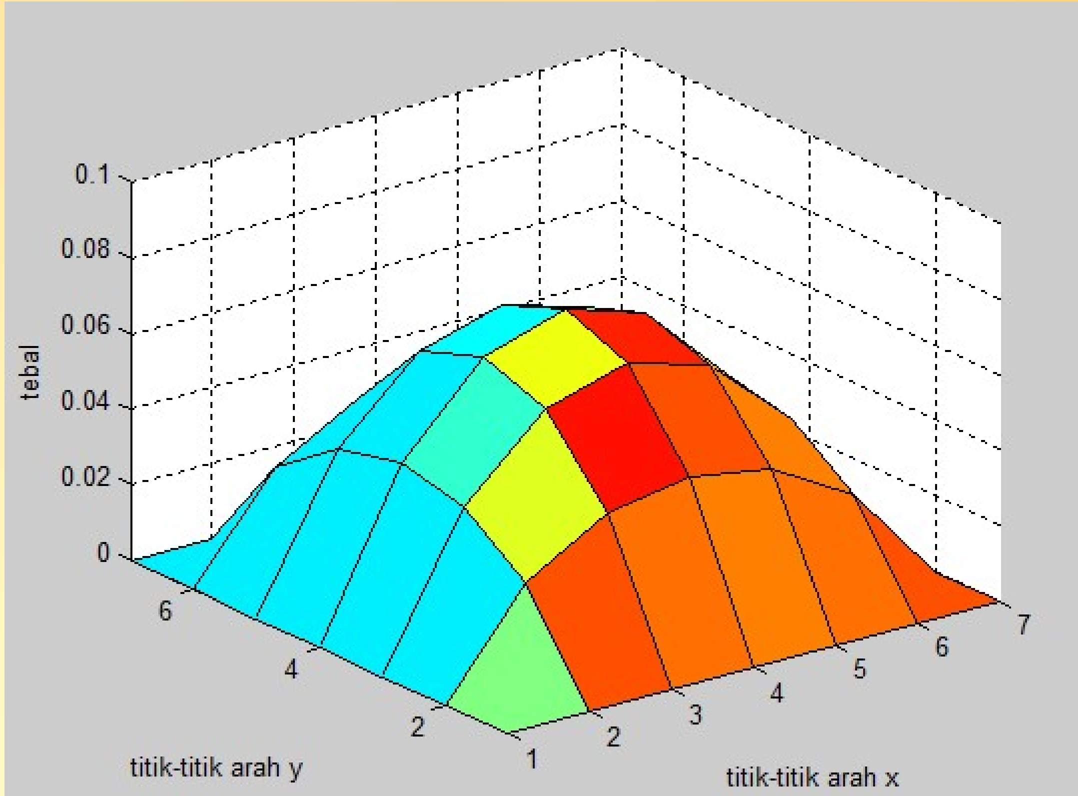


PERSAMAAN POISSON

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Tentukan defleksi membran bujursangkar seragam dengan ujung-ujung tetap dijaga. Sedang beban distribusi dapat didekati dengan suatu beban pada suatu titik. Permasalahan ini mengikuti persamaan Poisson dengan F(x,y) menunjukkan beban membran.

```
% Jumlah titik arah x, y
nx=6; ny=6;
% Ukuran titik arah x, y
hx=1/6; hy=1/6;
% Input data pada kondisi batas
by0=[0 0 0 0 0 0 0];
byn=[0 0 0 0 0 0 0];
bx0=[0 0 0 0 0 0 0];
bxn=[0 0 0 0 0 0 0];
% Penyelesaian dg fungsi ellipgen
F=-ones(ny+1,nx+1); G=zeros(nx+1,ny+1);
a=ellipgen(nx, hx, ny, hy, G, F, bx0, bxn, by0, byn);
% Plot hasil
surfl(a)
axis([1 7 1 7 0 0.1])
xlabel('titik-titik arah x');
ylabel('titik-titik arah y ');
zlabel('tebal');
```


0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
tebal
6
4
2
titik-titik arah y
1
2
3
4
5
6
7
titik-titik arah x

PERSAMAAN PARABOLIK

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{c\rho}{k} \frac{\partial u}{\partial t}$$

METODE EKSPLISIT

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^{j} + 2u_{i}^{j} + u_{i-1}^{j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i}^{j+1} - u_{i}^{j}}{\Delta t}$$

$$u_i^{j+1} = \frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}\left(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j\right) + \left(1 - \frac{2k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}\right)u_i^j$$

Penyederhanaan $\frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{M}$

$$u_i^{j+1} = \frac{1}{2}\left(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j\right)$$

Distribusi Temperatur sebagai Fungsi Waktu pada Plat Tipis

Plat besi yang sangat luas mempunyai tebal 2 cm. Temperatur mula-mula dalam plat merupakan fungsi jarak dari salah satu sisinya sebagai berikut :

$u = 100x$ untuk $0 < x < 1$,

$u = 100(2 - x)$ untuk $1 < x < 2$.

Tentukan temperatur tebal plat sebagai fungsi x dan t, jika kedua permukaan tetap dijaga 0 ^{O}C. Untuk besi k = 0,13 kal/detik.cm. ^{O}C, c = 0,11 cal/g. ^{O}C, ρ = 7,8 g/cm^3.

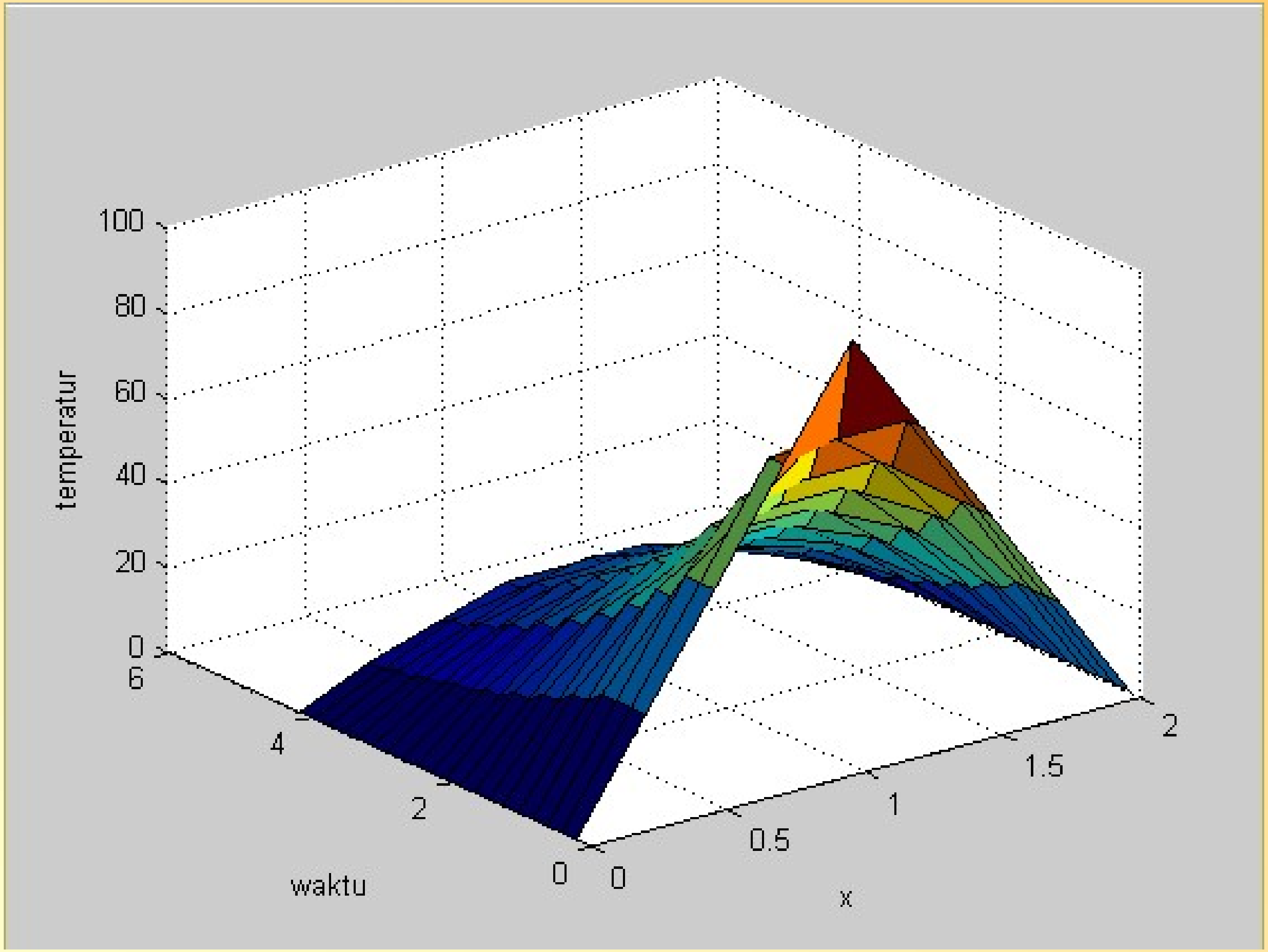
$$\frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{M}$$

$\Delta x = 0{,}25$ sehingga $\Delta t = 0{,}206$ detik

```
clc
clear all

% Data-data
L=2;
k=0.13;
c=0.11;
rho=7.8;

% Interval
N=8;
M=0.5;
delx=L/N;
delt=M*c*rho*delx^2/k;
xo=0;
Jend=20;
```

```
for i=1:N+1
    x(i)=xo+delx*(i-1);
end

% Kondisi awal
for i=1:ceil((N+1)/2)
    u(1,i)=100*x(i);
end
for i=N+1:-1:ceil((N+1)/2)
    u(1,i)=100*(2-x(i));
end
for i=1:Jend
    t(i)=delt*i;
end
```

```
for j=1:Jend
    for i=2:ceil((N+1)/2)+1
        u(j+1,i)=(k*delt/(c*rho*delx^2))*(u(j,i-1)+u(j,i+1))+...
            (1-2*k*delt/(c*rho*delx^2))*u(j,i);
    end
    for i=N+1:-1:ceil((N+1)/2)+1
        u(j+1,i)=u(j+1,ceil((N+1)/2)*2-i);
    end
end
t', u
surf(x, t', u(1:Jend,:))
xlabel('x');  ylabel('waktu');
zlabel('konsentrasi')
```



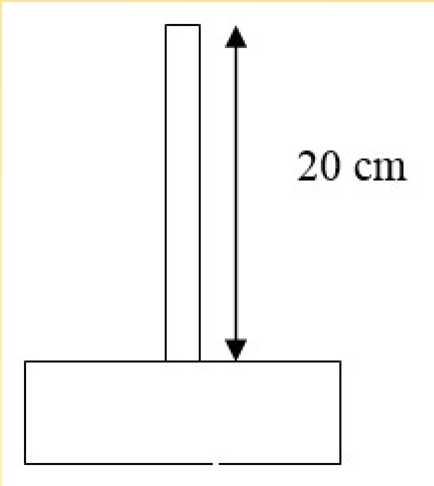
100
80
60
40
20
0
temperatur
6
4
2
0
waktu
0
0.5
1
1.5
2
x

Difusi alkohol

Suatu tabung panjang 20 cm mula-mula berisi udara dengan 2 % uap alkohol. Pada bagian bawah tabung berhubungan dengan bejana berisi alkohol sehingga alkohol tersebut menguap melalui tabung yang mula-mula berisi udara diam tersebut. Pada bagian ini konsentrasi alkohol dijaga tetap 10 %. Pada bagian atas (puncak) tabung uap alkohol di permukaan atas tabung dapat dianggap selalu nol.

Tentukan distribusi konsentrasi alkohol pada tabung sampai minimal 1000 detik.

Diketahui $\vartheta = 0{,}119\ cm^2$ / detik.



Persamaan Parabolik

d^2 c   d c
D ------- = -----
d x^2   d t

Kondisi awal

c(x,0) = 2

Kondisi batas

c(0,t) = 0   c(20,t) = 10

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^{j} \square 2u_i^j + u_{i-1}^{j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}$$

$r = \vartheta \, \Delta t/(\Delta x)^2 = 1/2$ dan $\Delta x = 4$ cm.

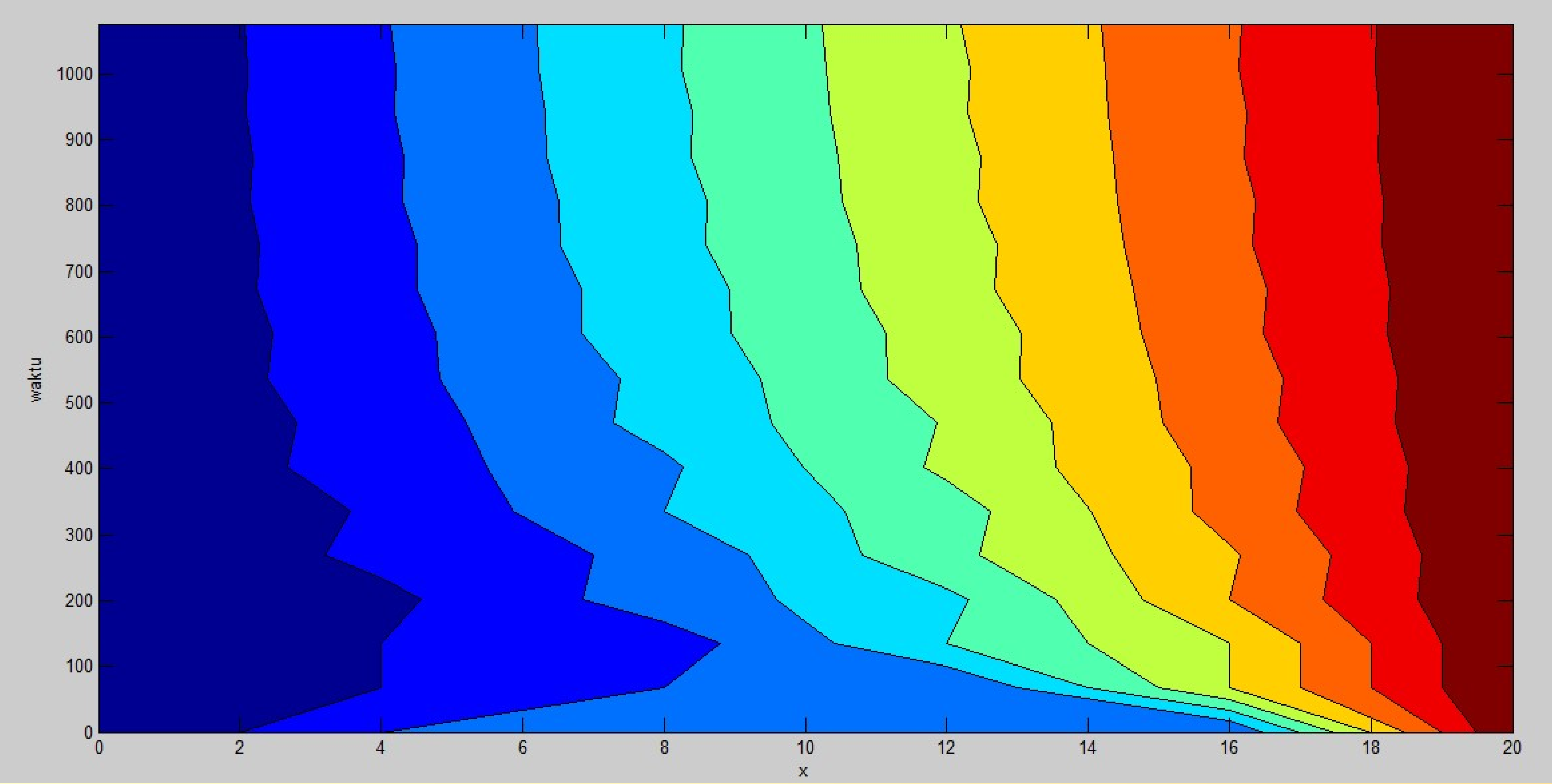
$\Delta t = 0.5(\Delta x)^2/\vartheta = 67{,}2$ detik

```
format short
clc
clear all
% Data-data
L=20;
D=0.119;
N=5;
M=0.5;
delx=L/N;
delt=M/D*delx^2;
xo=0;
Jend=16;
for i=1:N+1
            x(i)=xo+delx*(i-1);
end
x
%Kondisi awal
u(1,1)=0.0;
for i=2:N
   u(1,i)=2;
end
u(1,N+1)=10.0;
```

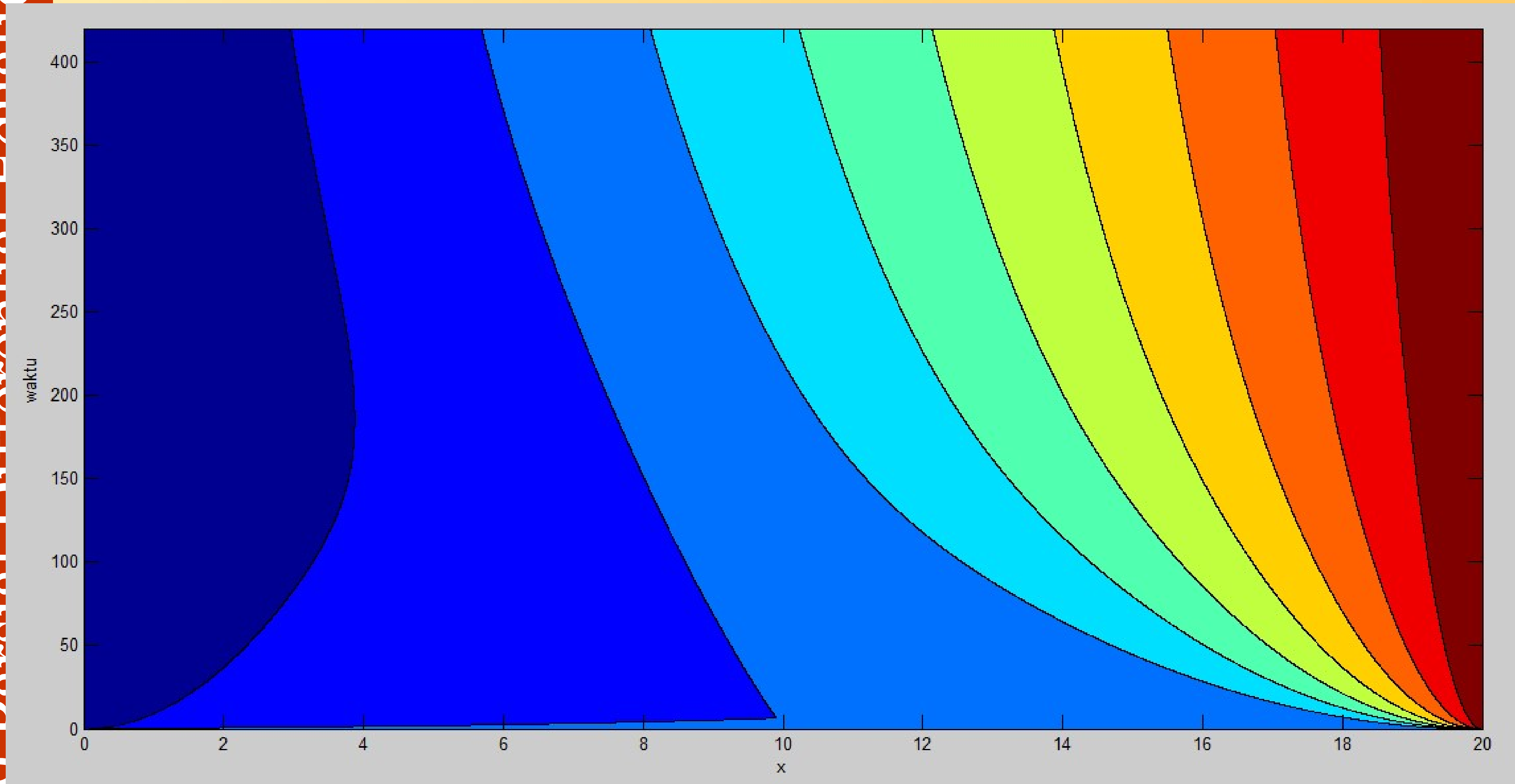
```
% interval waktu
for i=1:Jend+1
   t(i) = delt*i-delt;
end
t=t'
for j=1:Jend
   u(j+1,1)=0.0;
   for i=2:N

u(j+1,i)=(delt*D/delx^2)*(u
(j,i-1)+u(j,i+1))+...
(1-2*delt*D/delx^2)*u(j,i);
   end
   u(j+1,N+1)=10.0;
end
u
mesh(x, t, u(1:Jend+1,:))
xlabel('x');  ylabel('waktu');
zlabel('konsentrasi')
```

```
x =
     0     4     8    12    16    20

t =
  1.0e+003 *
         0
    0.0672
    0.1345
    0.2017
    0.2689
    0.3361
    0.4034
    0.4706
    0.5378
    0.6050
    0.6723
    0.7395
    0.8067
    0.8739
    0.9412
    1.0084
    1.0756

u =
         0    2.0000    2.0000    2.0000    2.0000   10.0000
         0    1.0000    2.0000    2.0000    6.0000   10.0000
         0    1.0000    1.5000    4.0000    6.0000   10.0000
         0    0.7500    2.5000    3.7500    7.0000   10.0000
         0    1.2500    2.2500    4.7500    6.8750   10.0000
         0    1.1250    3.0000    4.5625    7.3750   10.0000
         0    1.5000    2.8438    5.1875    7.2813   10.0000
         0    1.4219    3.3438    5.0625    7.5938   10.0000
         0    1.6719    3.2422    5.4688    7.5313   10.0000
         0    1.6211    3.5703    5.3867    7.7344   10.0000
         0    1.7852    3.5039    5.6523    7.6934   10.0000
         0    1.7520    3.7188    5.5986    7.8262   10.0000
         0    1.8594    3.6753    5.7725    7.7993   10.0000
         0    1.8376    3.8159    5.7373    7.8862   10.0000
         0    1.9080    3.7875    5.8511    7.8687   10.0000
         0    1.8937    3.8795    5.8281    7.9255   10.0000
         0    1.9398    3.8609    5.9025    7.9140   10.0000
```

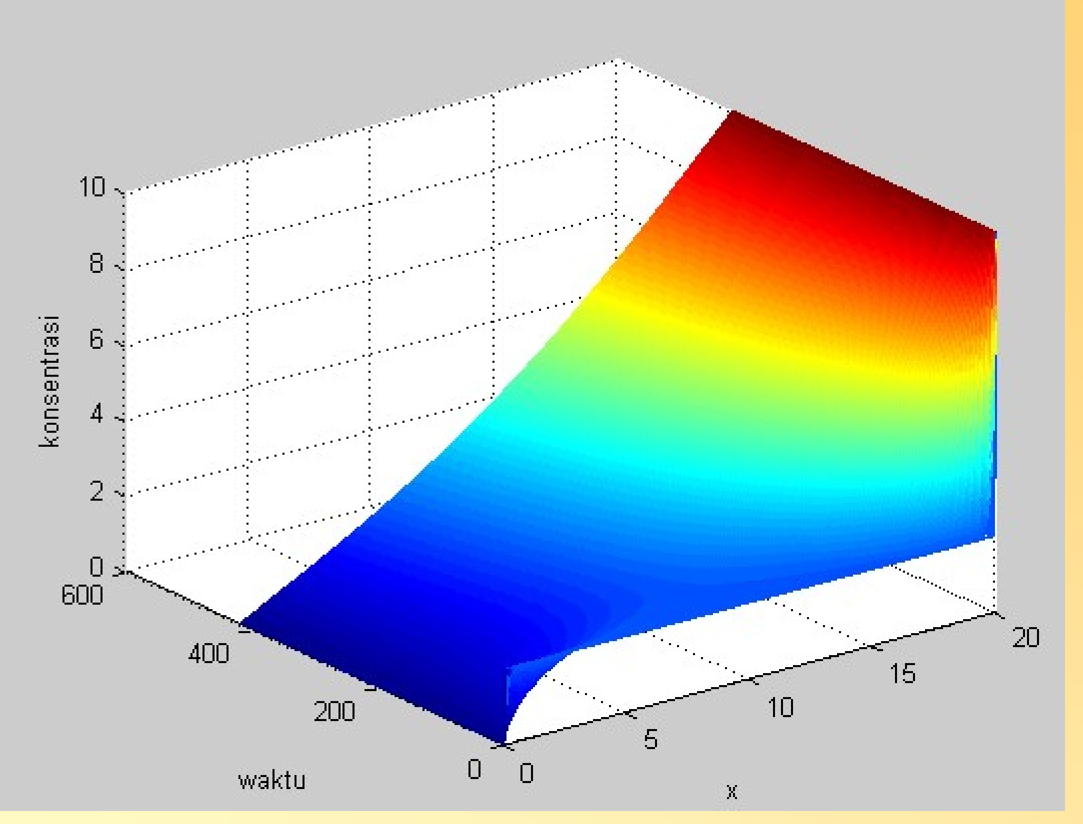
09 Parsial Differential Equation



- Coba untuk $\Delta x = 0.1$ cm



waktu
x
0
50
100
150
200
250
300
350
400
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20


konsentrasi
10
8
6
4
2
0
600
400
200
0
waktu
0
5
10
15
20
x