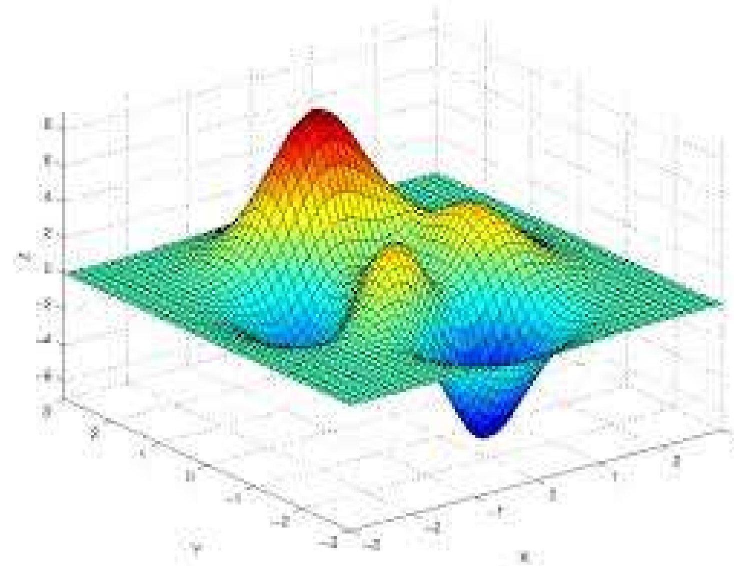


Kalkulus I

Fungsi Dan Grafik Fungsi

Dr. Eko Pujiyanto, S.Si., M.T.

eko@uns.ac.id

081 2278 3991

eko.staff.uns.ac.id/kalkulus1

Materi

- Fungsi (Daerah definisi, daerah asal dan daerah hasil)
- Fungsi Surjektif, Injektif, Bijektif dan Invers
- Operasi Pada Fungsi dan Fungsi Komposisi
- Grafik Fungsi Dalam Sistem Koordinat Kartesius

Hubungan atau Relasi

- Dalam berbagai aplikasi, **hubungan/relasi** antara dua himpunan (sering disederhanakan menjadi variabel) sering terjadi.
- Misalnya, volume bola dengan jari-jari *r* diberikan oleh relasi

$$V = \frac{4}{3}\pi\ r^3$$

- Definisi : Diketahui R relasi dari A ke B. Apabila setiap $x \in A$ berelasi R dengan tepat satu $y \in B$ maka R disebut **fungsi** dari A ke B.

Fungsi

- Fungsi dinyatakan dengan huruf-huruf: *f*, *g*, *h*, *F*, *H*, dst.
- Apabila *f* merupakan fungsi dari himpunan *A* ke himpunan *B*, maka dituliskan:

$$f : A \rightarrow B$$

- Dalam hal ini, **himpunan *A*** dinamakan *domain* atau *daerah definisi* atau *daerah asal*, sedangkan **himpunan *B*** dinamakan *kodomain* atau *daerah kawan* fungsi *f*.

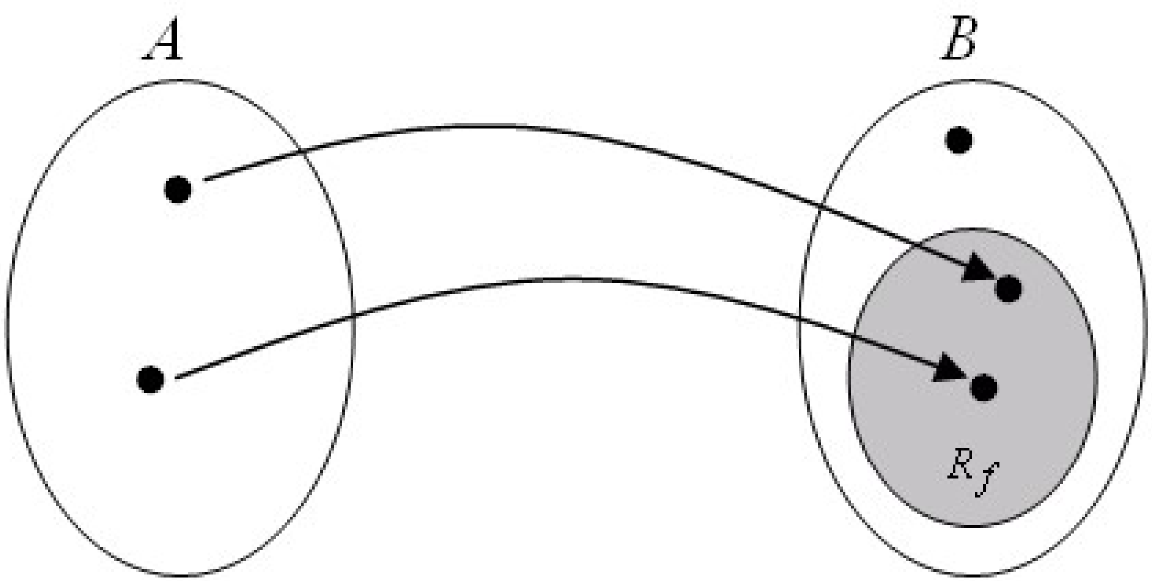
Daerah Asal dan Nilai

- Domain fungsi *f* ditulis dengan notasi *Df*,

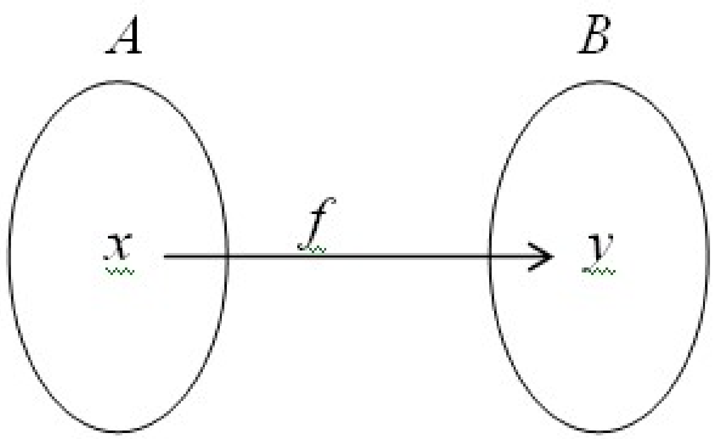
$$D_f = \{x \in R : \ f(x) \ \text{ada (terdefinisikan)}\}$$

- Himpunan semua anggota *B* yang mempunyai kawan di *A* dinamakan *range* atau *daerah nilai* fungsi *f*, ditulis R_f atau Im(*f*) → Perhatikan gambar berikut

Fungsi : Daerah Asal dan Nilai



Fungsi



- Jika pada fungsi $f : A \to B$, sebarang elemen $x \in A$ mempunyai kawan $y \in B$, maka dikatakan "*y* merupakan nilai fungsi *f* di *x*" dan ditulis $y = f(x)$.
- Selanjutnya, *x* dan *y* masing-masing dinamakan *variable bebas* dan *variabel tak bebas*.
- Sedangkan $y = f(x)$ disebut *rumus fungsi f*.

Daerah Asal dan Nilai

- Daerah asal (D_f)

$$D_f = \{x \in R : f(x) \in R\}$$

$$D_f = \{x \in R \; sehingga \;\; f(x) \text{ ada (terdefinisikan)}\}$$

- Daerah nilai (R_f)

$$R_f = \{f(x) \in R : x \in D_f\}$$

$$R_f = \{berapa\; f(x) \in R\; untuk\; semua\; x \in D_f\}$$

Mencari daerah asal dan daerah nilai

Contoh 1

$$f(x) = \sqrt{1+x} \qquad \text{dan} \qquad g(x) = -x^2 - 1$$

$$D_f = \text{Di bawah akar} \geq 0$$

$$= 1 + x \geq 0$$

$$D_f = [-1, \infty)$$

$$R_f = [0, \infty)$$

$$D_g = (-\infty, \infty)$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$0 \leq x^2 < \infty$$

$$-\infty < -x^2 \leq 0$$

$$-\infty - 1 < -x^2 - 1 \leq 0 - 1$$

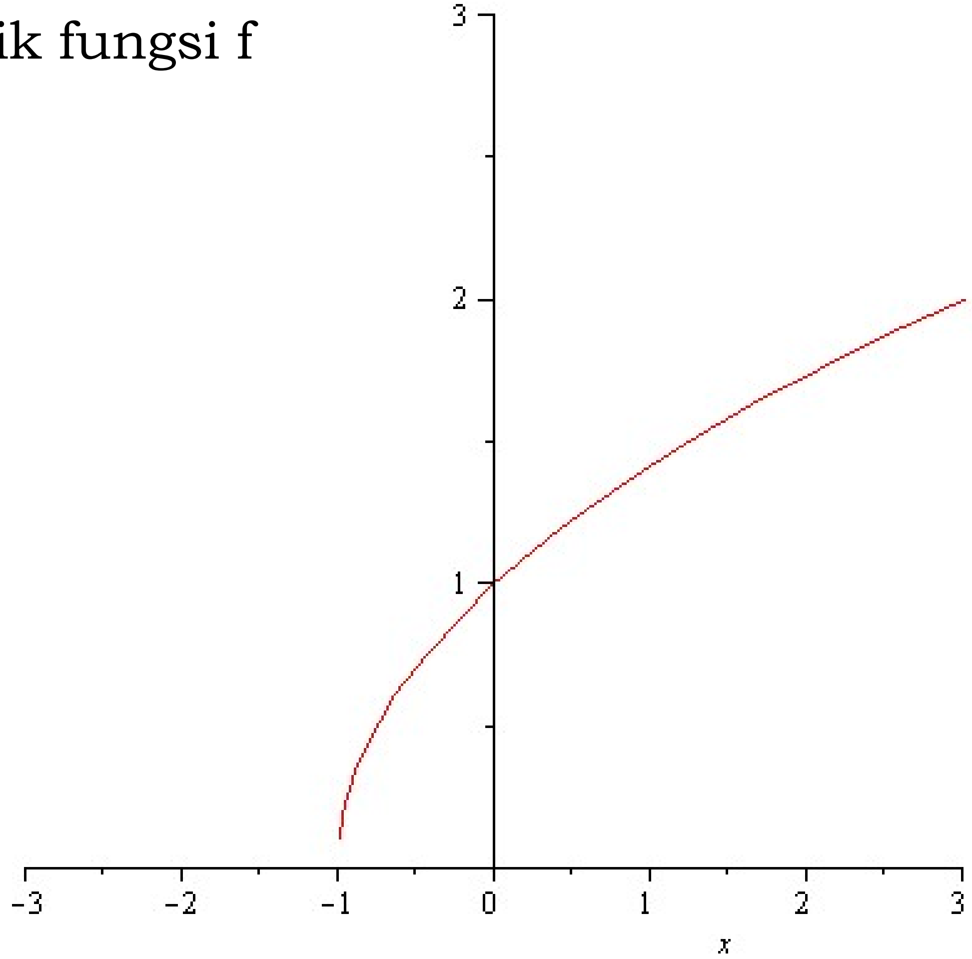
$$-\infty < -x^2 - 1 \leq -1$$

$$-\infty < g(x) \leq -1$$

$$R_g = (-\infty, -1]$$

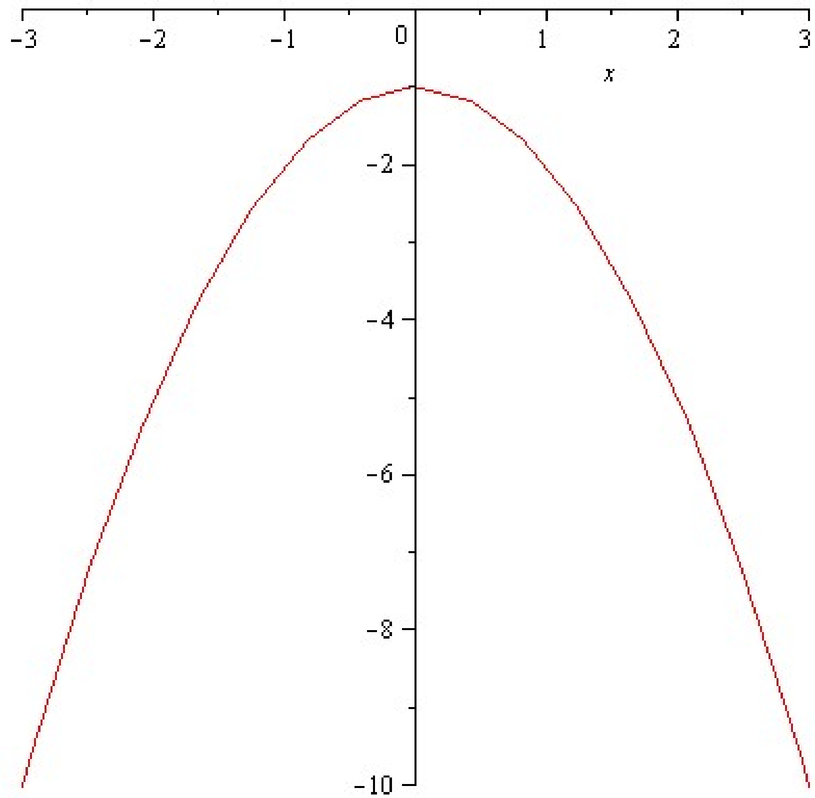
Hubungan Df dan Rf dengan Grafik Fungsi

Ilustrasi grafik fungsi f



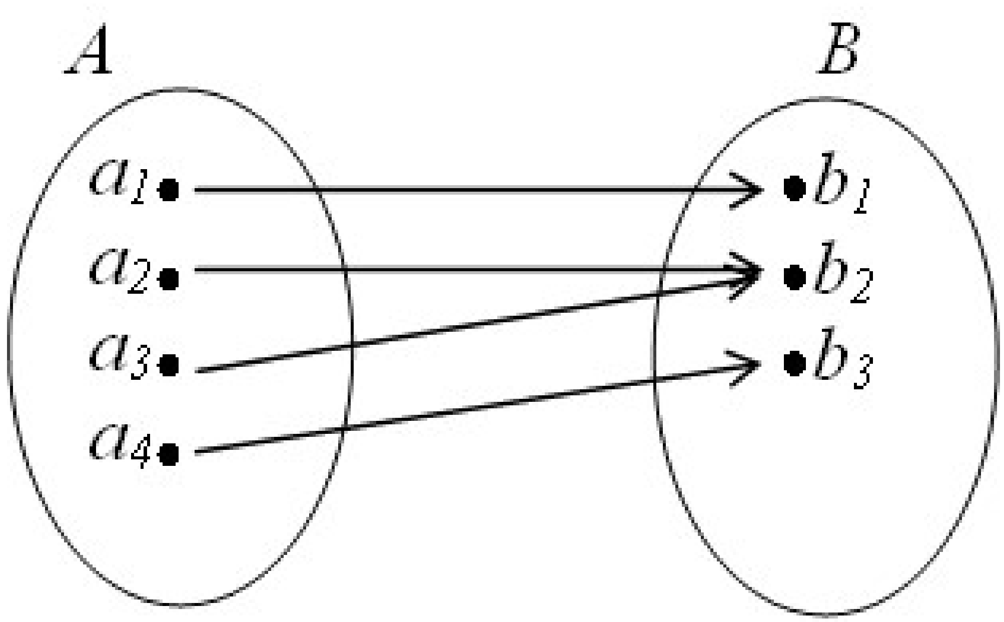
Hubungan Dg dan Rg dengan Grafik Fungsi

Ilustrasi grafik fungsi g



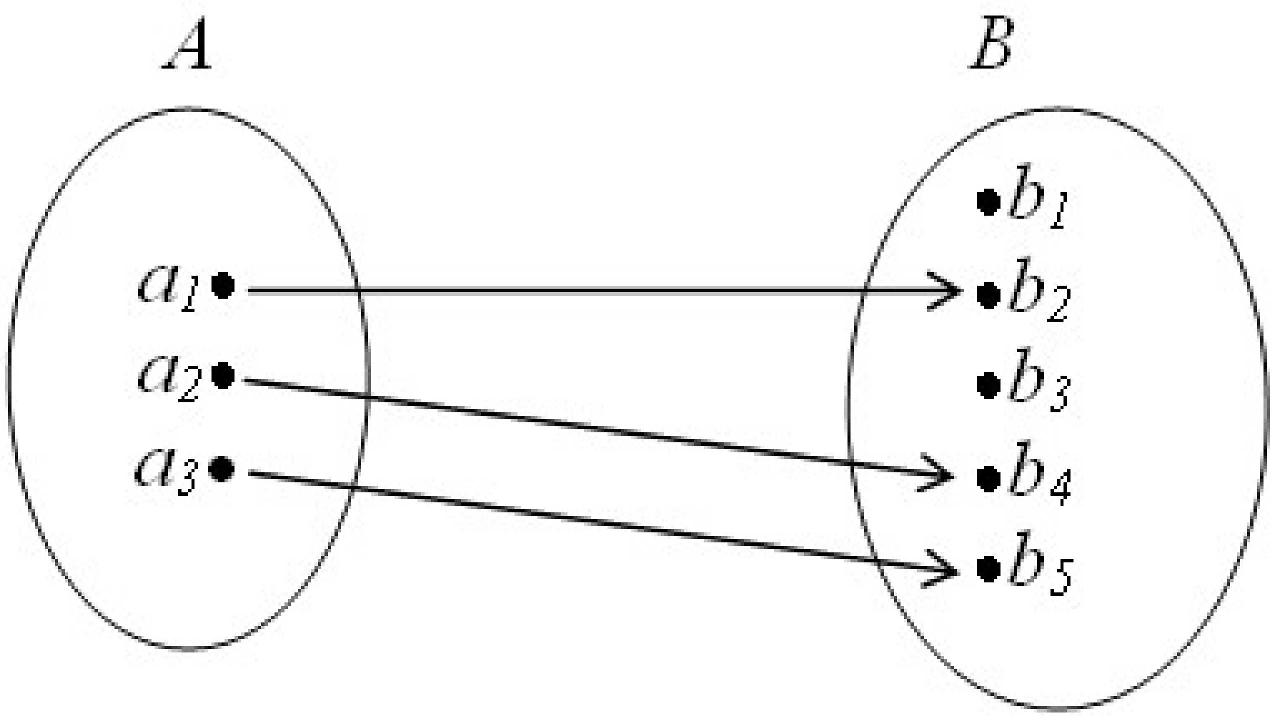
Fungsi Surjektif

Apabila setiap anggota himpunan *B* mempunyai kawan anggota himpunan *A*, maka *f* disebut ***fungsi surjektif***



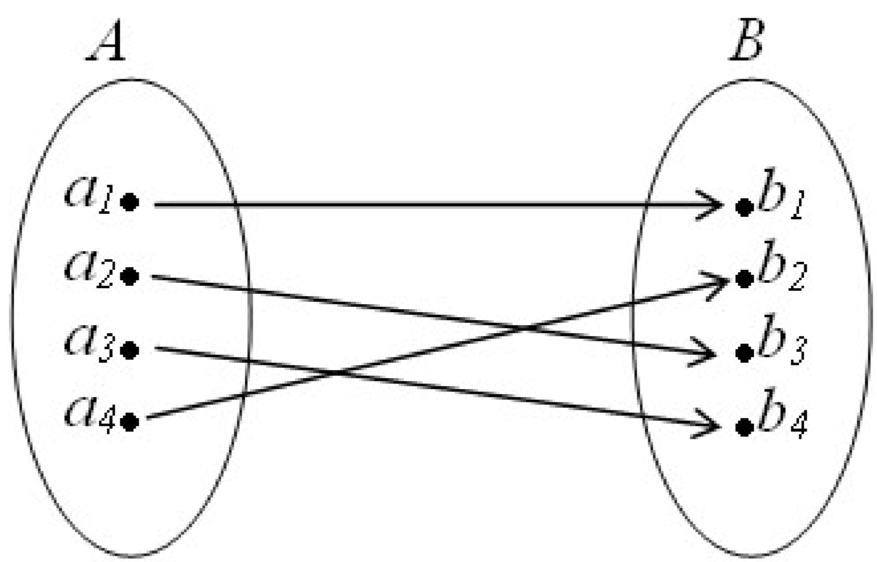
Fungsi Injektif

Apabila setiap anggota himpunan *B* mempunyai yang kawan di *A*, kawannya tunggal, maka *f* disebut ***fungsi injektif***



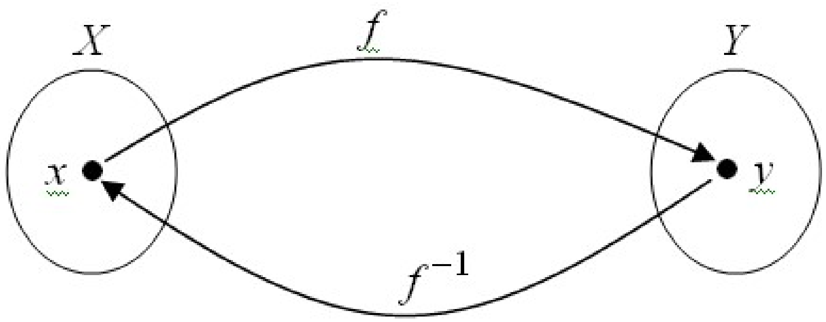
Fungsi Bijektif

- Jika setiap anggota himpunan *B* mempunyai tepat satu kawan di *A* maka *f* disebut ***fungsi bijektif*** **atau** ***korespodensi*** **1-1**.
- Mudah dipahami bahwa korespondensi 1-1 adalah fungsi surjektif sekaligus injektif.



Fungsi Invers

- Apabila merupakan korespondensi 1 – 1, maka mudah ditunjukkan bahwa invers *f* juga merupakan fungsi.
- Fungsi ini disebut *fungsi invers*, ditulis dengan notasi f^{-1} .



$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$$

dengan

$$D_{f^{-1}} = R_f \text{ dan } R_{f^{-1}} = D_f$$

Operasi Pada Fungsi

Diberikan skalar real α dan fungsi-fungsi *f* dan *g*. , maka :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

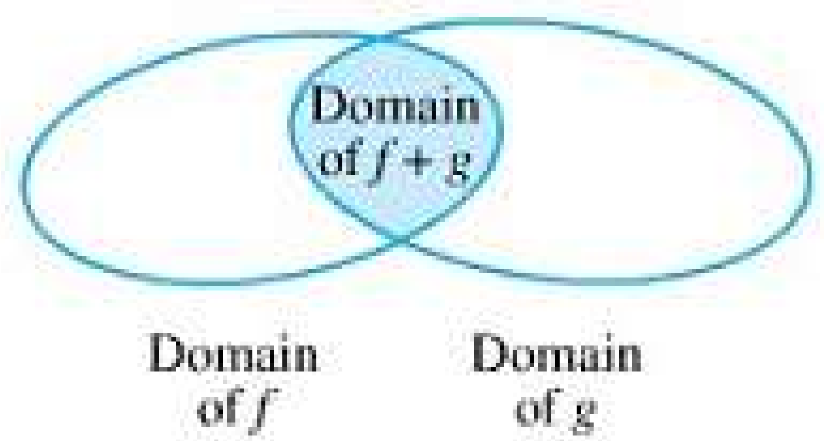
$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ asalkan } g(x) \neq 0$$

Operasi Pada Fungsi

Domain masing-masing fungsi di atas adalah irisan domain *f* dan domain *g*, kecuali untuk f/g

$$D_{f/g} = \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}$$

,



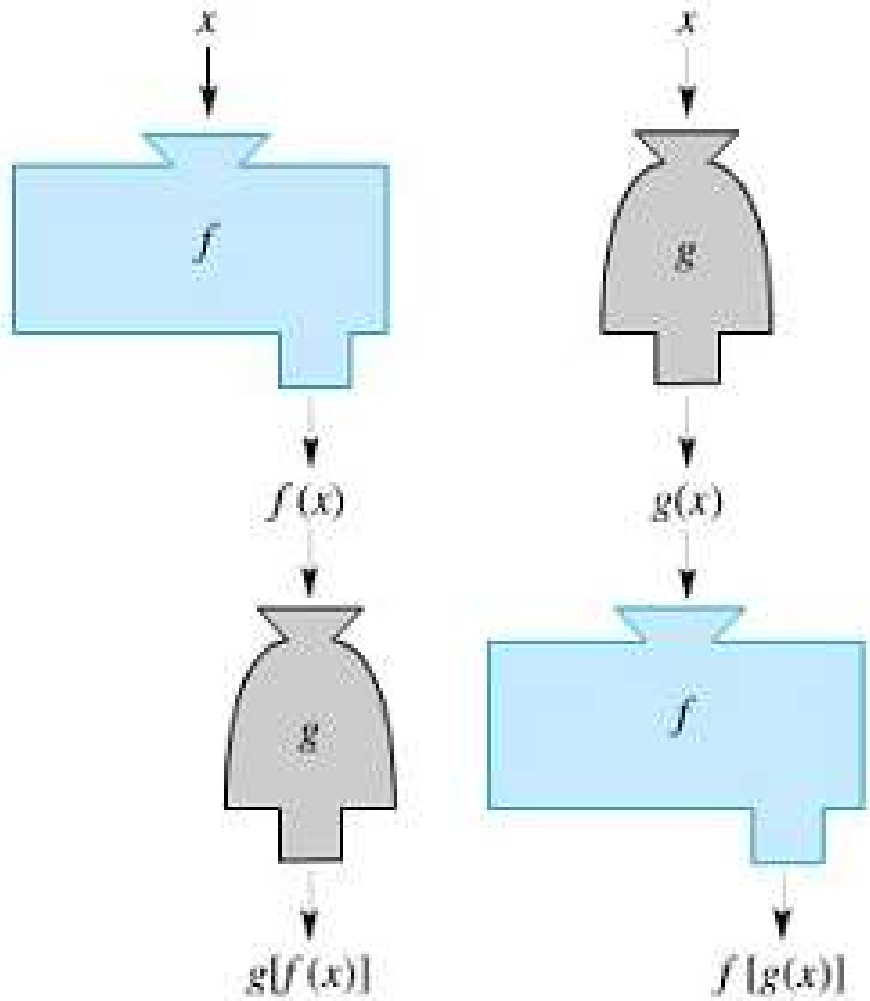
Operasi Pada Fungsi

Contoh 2 $\quad f(x) = \dfrac{x-3}{2}, \qquad g(x) = \sqrt{x}$

Formula	Domain
$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \dfrac{x-3}{2} + \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \dfrac{x-3}{2} - \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \dfrac{x-3}{2}\sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x-3}{2\sqrt{x}}$	$(0, \infty)$

Fungsi Komposisi

$g_o f$

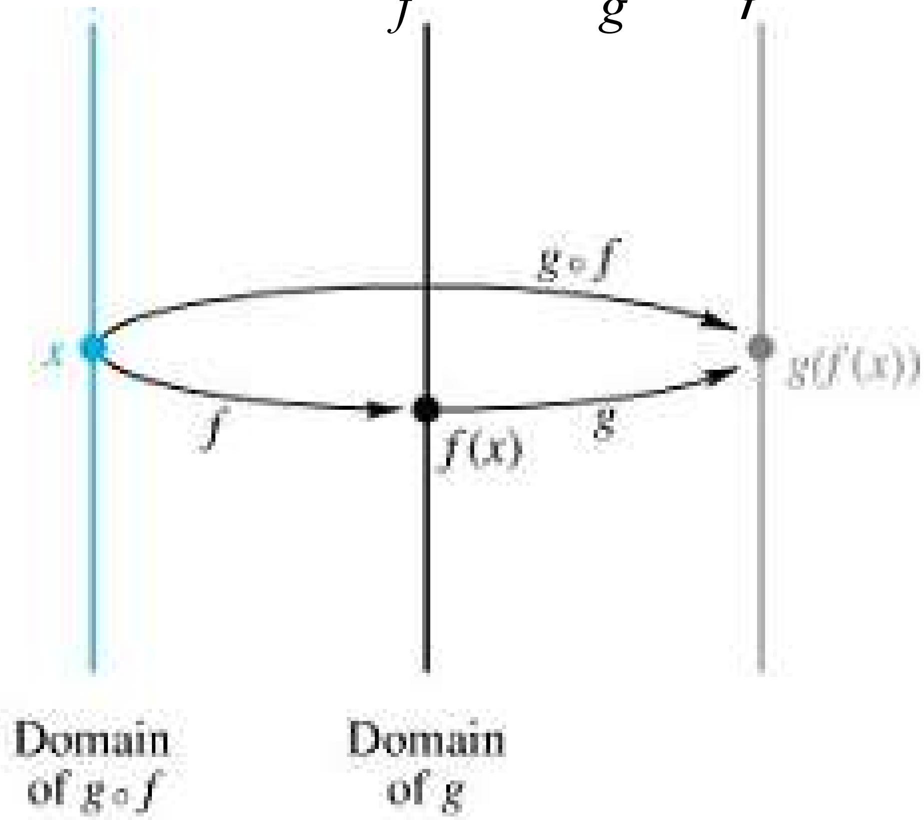


$f_o g$

Syarat Fungsi Komposisi

$g_o f$

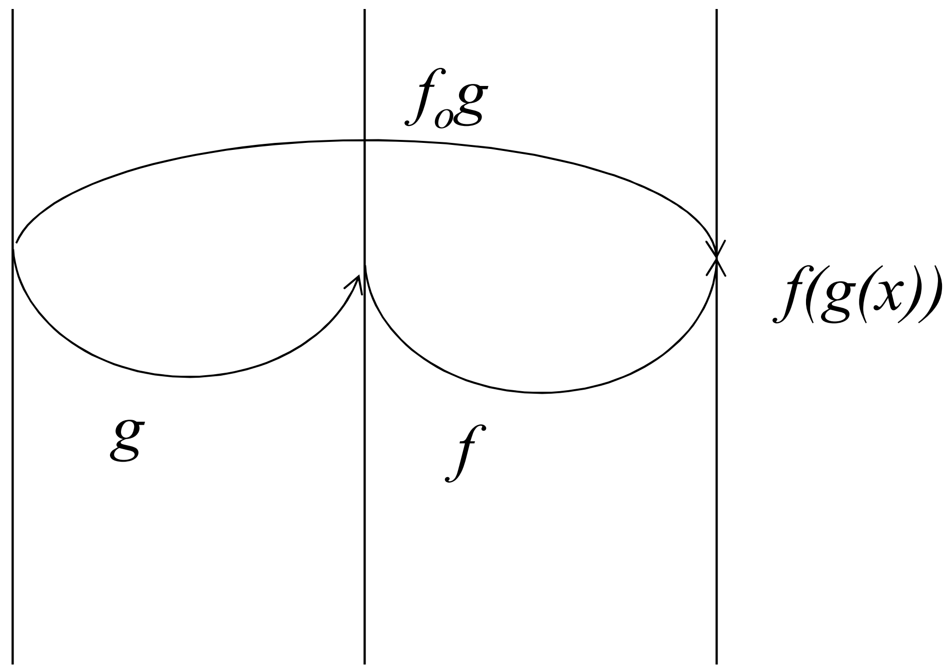
$$R_f \cap D_g \neq \phi$$



Syarat Fungsi Komposisi

$f_o g$

$$R_g \cap D_f \neq \phi$$



Daerah asal dan daerah nilai Fungsi Komposisi

$g_o f$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$$

$$R_{g \circ f} = \{y \in R_g : y = g(t), t \in R_f\}$$

$f_o g$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$

$$R_{f \circ g} = \{y \in R_f : y = f(t), t \in R_g\}$$

Mencari daerah asal dan daerah nilai fungsi komposisi

Contoh 3

Diberikan fungsi berikut

$$f(x) = \sqrt{1+x} \text{ dan } g(x) = -x^2 - 1$$

Tentukan

$$a.\ D_{f \circ g} \text{ dan } R_{f \circ g}$$

$$b.\ D_{g \circ f} \text{ dan } R_{g \circ f}$$

Mencari daerah asal dan daerah nilai fungsi komposisi

Contoh 3

$a.\ D_{f\circ g}$ dan $R_{f\circ g}$

Lihat Contoh 1 → *Df, Rf* , *Dg* dan *Rg*

$D_{f\circ g}$ dan $R_{f\circ g}$ ada atau tidak $\rightarrow$ cek $R_g \cap D_f = (-\infty,-1] \cap [-1,\infty) = \{-1\}$

Karena $R_g \cap D_f$ ada maka $D_{f\circ g}$ dan $R_{f\circ g}$ *ADA*

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in (-\infty,\infty) : -x^2 - 1 \in [-1,\infty)\}$$

$$-1 \le -x^2 - 1 < \infty$$

$$0 \le -x^2 < \infty$$

$$-\infty < x^2 \le 0$$

$$x = 0$$

$$D_{f\circ g} = (-\infty,\infty) \cap \{0\} = \{0\}$$

Mencari daerah asal dan daerah nilai fungsi komposisi

Contoh 3

$a.\ D_{f \circ g}$ dan $R_{f \circ g}$

$$
\begin{aligned}
R_{f \circ g} &= \{y \in R_f : y = f(t), t \in R_g\} \\
&= \{[0,\infty) : y = \sqrt{1+x}, t \in (-\infty,-1]\} \\
&= \{[0,\infty) : y = 0, t \in (-\infty,-1]\} \\
&= \{[0,\infty) \cap \{0\}\} = \{0\}
\end{aligned}
$$

Mencari daerah asal dan daerah nilai fungsi komposisi

Contoh 3

$b.\ D_{g\circ f}$ dan $R_{g\circ f}$

$D_{g\circ f}$ dan $R_{g\circ f}$ ada atau tidak $\rightarrow$ cek $R_f \cap D_g = [0,\infty) \cap (-\infty,\infty) = [0,\infty)$

Karena $R_g \cap D_f$ ada maka $D_{f\circ g}$ dan $R_{f\circ g}$ *ADA*

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$$
$$= \{x \in [-1,\infty) : \sqrt{1+x} \in (-\infty,\infty)\}$$
$$\downarrow$$
$$-\infty < \sqrt{1+x} < \infty$$
$$0 \le 1+x < \infty$$
$$-1 \le x < \infty$$

$$D_{g\circ f} = [-1,\infty) \cap [-1,\infty) = [-1,\infty)$$

Mencari daerah asal dan daerah nilai fungsi komposisi

Contoh 3

$b.\ D_{g\circ f}$ dan $R_{g\circ f}$

$$R_{g\circ f} = \{y \in R_g : y = g(t), t \in R_f\}$$
$$= \{(-\infty,-1] : y = -x^2 - 1, t \in [0,\infty)\}$$
$$= \{(-\infty,-1] \cap (-\infty,-1]\} = (-\infty,-1]$$

Grafik Fungsi Dalam Sistem Koordinat Kartesius

- Dalam sistem koordinat kartesius fungsi dapat dibagi menjadi:
  - Fungsi Aljabar
  - Fungsi Transenden
- Fungsi *f* disebut fungsi aljabar jika *f* dapat dinyatakan sebagai jumlahan, selisih, hasil kali, hasil bagi, pangkat, ataupun akar fungsi-fungsi suku banyak.

Grafik Fungsi
Dalam Sistem Koordinat Kartesius

- Contoh fungsi aljabar :

$$f(x)=\frac{3x-x^2(x+1)^{2/3}}{\sqrt{x^2+1}}$$

- Fungsi yang **bukan fungsi aljabar** disebut ***fungsi transenden*.**
- Beberapa contoh fungsi transenden adalah fungsi trigonometri, fungsi logaritma, dsb.

Grafik Fungsi
Dalam Sistem Koordinat Kartesius

- Fungsi Aljabar meliputi :
  - Fungsi rasional :
    - Fungsi bulat (fungsi suku banyak)
    - Fungsi pecah.
  - Fungsi irasional.

Grafik Fungsi
Dalam Sistem Koordinat Kartesius

- Fungsi suku banyak berderajat n mempunyai persamaan

$$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ . \ . \ . + a_n x_n$$

dengan n bilangan bulat tak negatif , a_1, . . . , a_n bilangan-bilangan real dan $a_n \neq 0$.

Grafik Fungsi Suku Banyak

a. Fungsi konstan $f(x) = c$

b. Fungsi linear: $f(x) = mx + n$

Grafik fungsi ini berupa garis lurus dengan gradien *m* dan melalui titik .

c. Fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

d. Fungsi kubik $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_3 \neq 0$

Grafik Fungsi Pecah

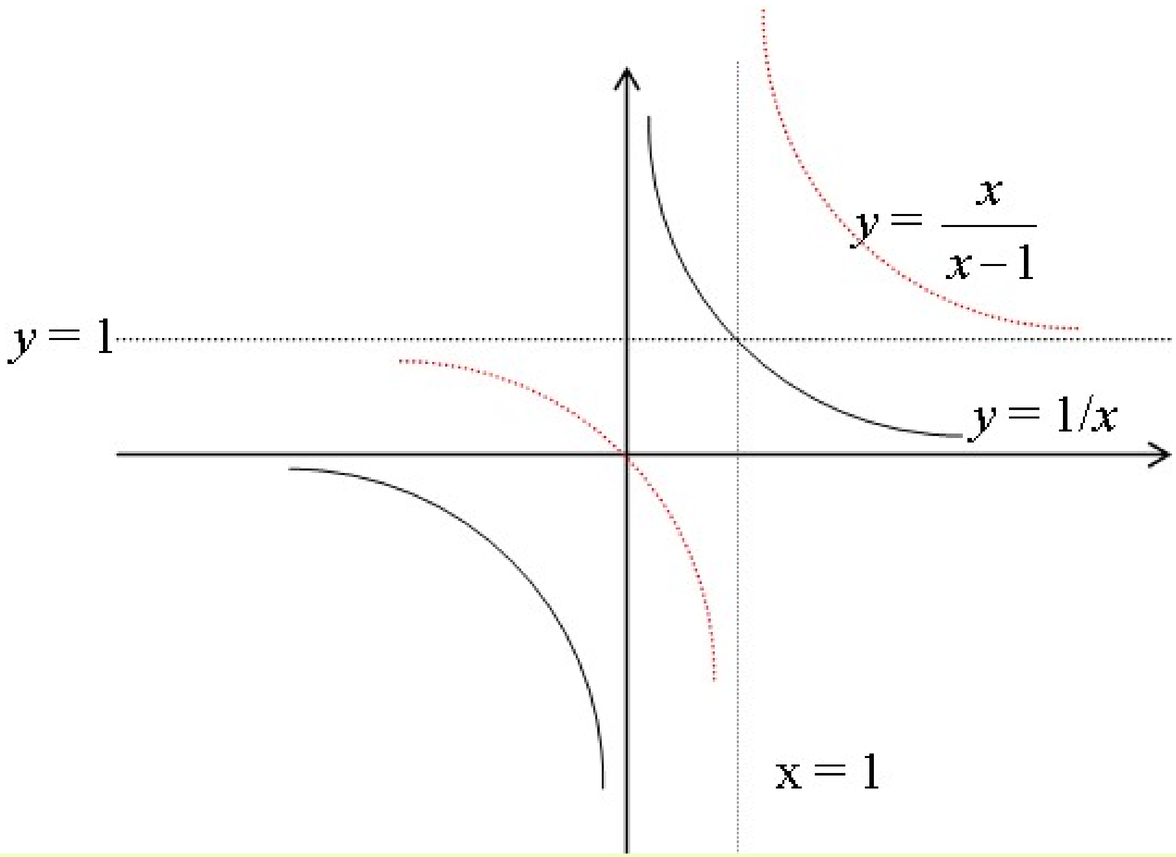
- Fungsi $f(x)$ yang dapat dinyatakan sebagai hasil bagi dua fungsi suku banyak

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$$

disebut *fungsi pecah*.

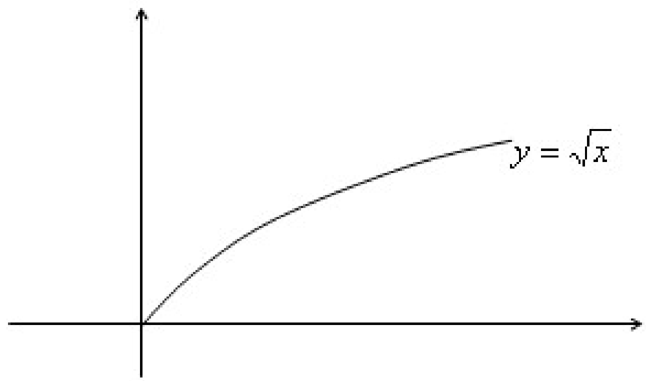
Grafik Fungsi Pecah

- Contoh grafik $f(x) = \dfrac{1}{x}$ dan $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

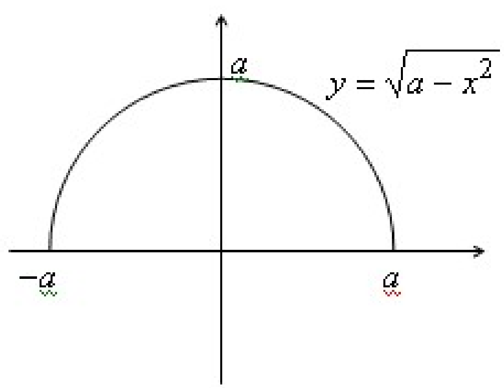


Grafik Fungsi Irasional

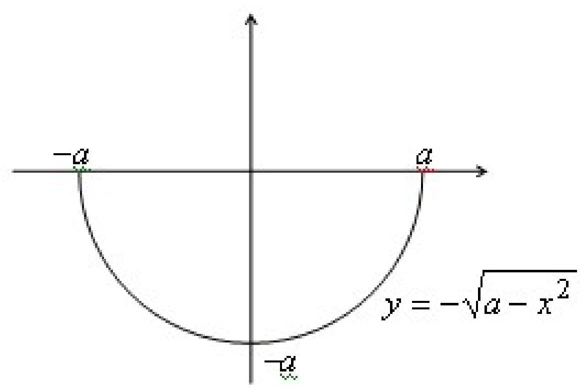
- Contoh



(a)



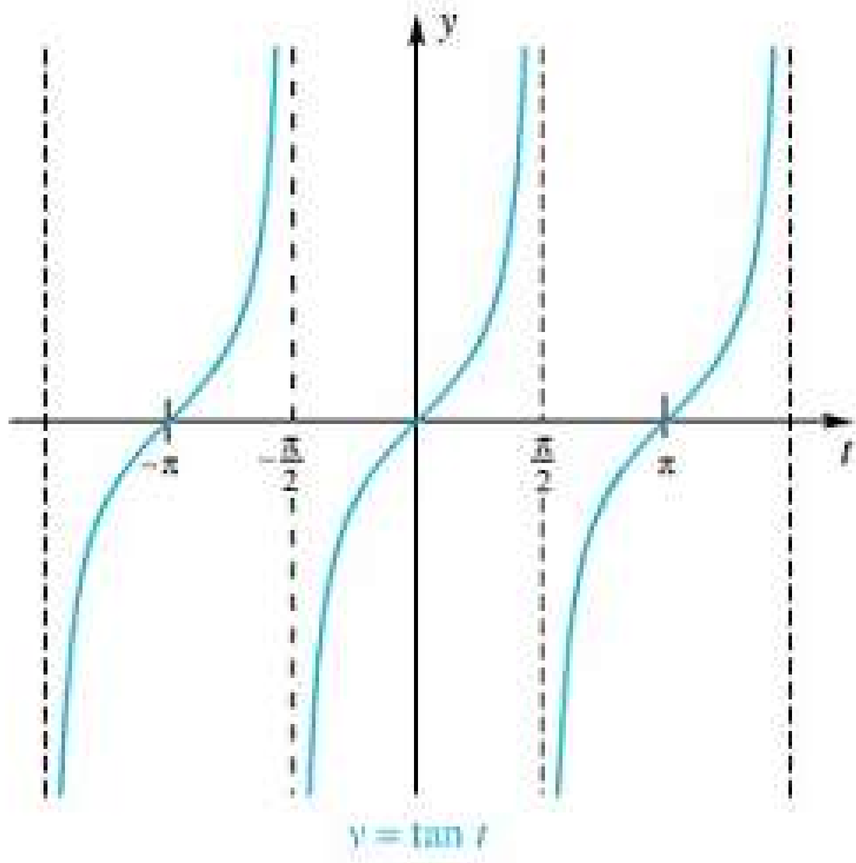
(b)



(c)

Grafik Transenden (Fungsi Trigonometri)

- Contoh



Grafik Transenden
(Fungsi Trigonometri)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\sin x \sin y = -\tfrac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

Pelajari hubungan fungsi trigonometri

Kata inspirasi pertemuan ini

Berfikir

Banyak orang yang berfikir. Tapi, sedikit yang bertindak. Ingat, tak seorangpun akan sukes hanya dengan berfikir, tanpa bertindak. Semua fikiran, harus diikuti oleh tindakan.