

Kalkulus I

Pertaksamaan

Dr. Eko Pujiyanto, S.Si., M.T.

ekopujiyanto@ft.uns.ac.id

081 2278 3991

eko.staff.uns.ac.id/kalkulus1

Isi Kuliah

- 1 Pertaksamaan
- 2 Nilai mutlak
- 3 Pertaksamaan dengan nilai mutlak

Pertaksamaan/Pertidaksamaan

- *Pertidaksamaan (inequality)* adalah pernyataan matematis yang memuat satu perubah atau lebih dan salah satu tanda ketidaksamaan ($<$, $>$, \leq , \geq).

Bentuk umum pertaksamaan aljabar satu peubah real adalah

$$\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{C(x)}{D(x)}, A, B, C, D \text{ suku banyak.}$$

Pertaksamaan/Pertidaksamaan

- Himpunan semua bilangan yang demikian ini disebut ***penyelesaian***.
- Sifat-sifat dan hukum dalam ***R*** (himpunan bilangan real) sangat membantu dalam mencari penyelesaian suatu pertidaksamaan.

Pertaksamaan/Pertidaksamaan

Prosedur baku menyelesaikan pertaksamaan ini adalah sebagai berikut.

- Dengan rumus aljabar elementer dan urutan, ubahlah bentuknya menjadi $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, dengan P dan Q suku banyak.
- Uraikan P dan Q atas faktor linear dan/atau kuadrat definit positif.
- Tentukan tanda pertaksamaan pada garis bilangan.
- Tentukan himpunan jawabnya dan tampilkan dalam bentuk selang.

Pertaksamaan/Pertidaksamaan

Menyelesaikan pertaksamaan, kita mungkin melakukan

1. Menambah angka yang sama pada kedua sisi
2. Mengalikan angka positif pada kedua sisi
3. Mengalikan angka negatif pada kedua sisi **tetapi tanda berubah**

Pertaksamaan/Pertidaksamaan

Contoh 1

Solve the inequality $2x - 7 < 4x - 2$
and show the graph of its solution set.

Solusi

$$2x - 7 < 4x - 2$$

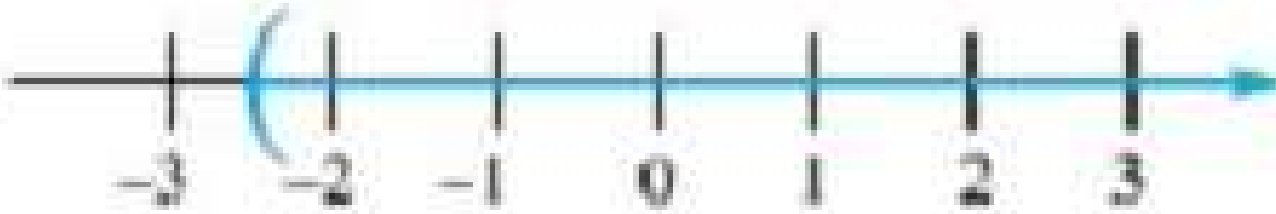
$$2x < 4x + 5 \quad (\text{adding } 7)$$

$$-2x < 5 \quad (\text{adding } -4x)$$

$$x > -\frac{5}{2} \quad (\text{multiplying by } -\frac{1}{2}) \quad \blacksquare$$

Pertaksamaan/Pertidaksamaan

The graph appears in Figure



$$\left(-\frac{5}{2}, \infty\right) = \left\{x : x > -\frac{5}{2}\right\}$$

Pertaksamaan/Pertidaksamaan

Contoh 2

Solve the quadratic inequality $x^2 - x < 6$.

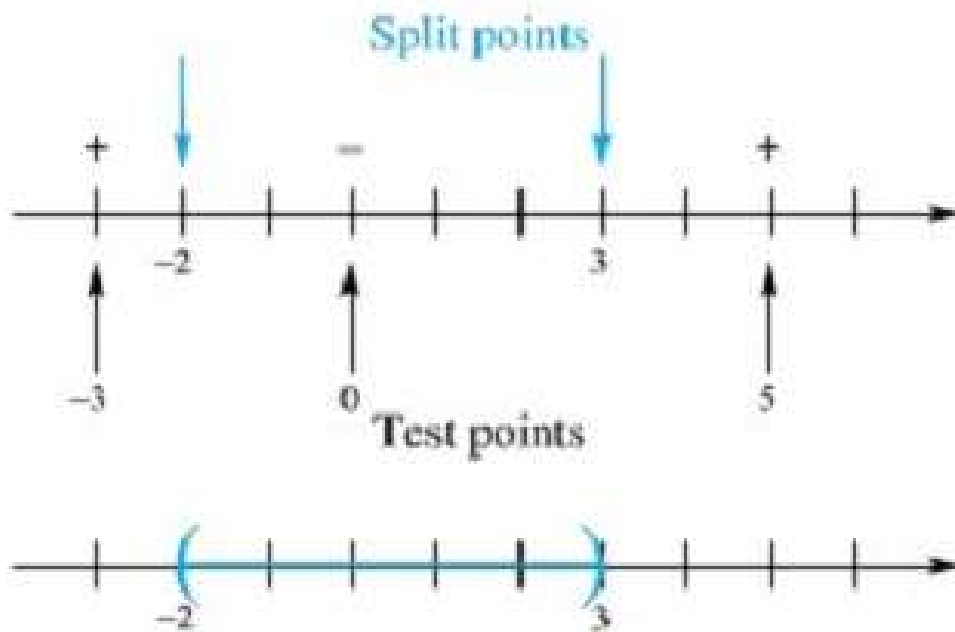
Solusi

$$x^2 - x < 6$$

$$x^2 - x - 6 < 0 \quad (\text{adding } -6)$$

$$(x - 3)(x + 2) < 0 \quad (\text{factoring})$$

Pertaksamaan/Pertidaksamaan



$(-2, 3)$

Test Point	Sign of $(x - 3)$	Sign of $(x + 2)$	Sign of $(x - 3)(x + 2)$
-3	-	-	+
0	-	+	-
5	+	+	+

Pertaksamaan/Pertidaksamaan

Contoh 3

Tentukan himpunan jawab pertaksamaan $x^4 - x^2 < 0$.

$$x^4 - x^2 < 0$$

$$x^2(x^2 - 1) < 0$$

$$x^2(x + 1)(x - 1) < 0$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} + & + & + & + & + & 0 & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & 0 & + & + & + & + & + \\ \hline & & & & & | & & & & & & | & & & & & | & & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & & 0 & & & & & 1 & & & & & & & \end{array}$$

$$\text{Himpunan Jawab} = (-1, 0) \cup (0, 1) = (-1, 1) - \{0\}.$$

Pertaksamaan/Pertidaksamaan

Contoh 4

Tentukan himpunan jawab pertaksamaan $\frac{2}{x} \geq x + 1$.

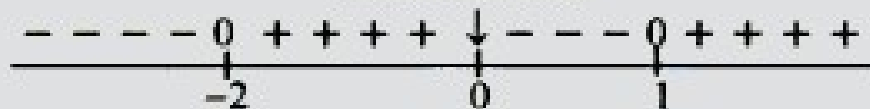
$$\frac{2}{x} \geq x + 1$$

$$x + 1 - \frac{2}{x} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + x - 2}{x} \leq 0$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x} \leq 0$$

tak terdefinisi



Himpunan Jawab = $(-\infty, -2] \cup (0, 1]$.

Pertaksamaan/Pertidaksamaan

Contoh 5

Tentukan himpunan jawab pertaksamaan $2 \leq x^2 - x < 6$.

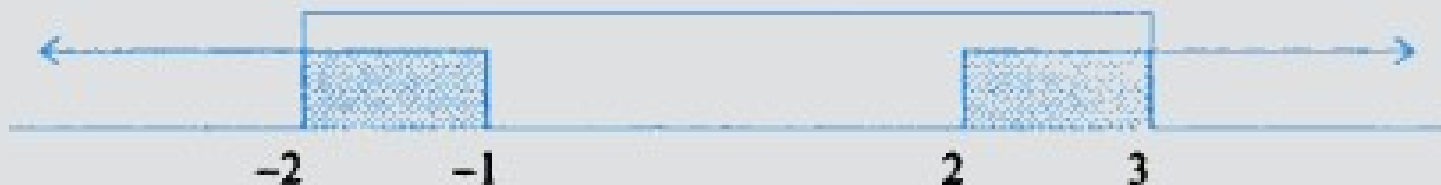
$$2 \leq x^2 - x < 6$$

$$2 \leq x^2 - x \quad \text{dan} \quad x^2 - x < 6$$

$$x^2 - x - 2 \geq 0 \quad \text{dan} \quad x^2 - x - 6 < 0$$

$$(x + 1)(x - 2) \geq 0 \quad \text{dan} \quad (x + 2)(x - 3) < 0$$

$$(x \leq -1 \text{ atau } x \geq 2) \quad \text{dan} \quad (-2 < x < 3)$$



Himpunan jawab : $((-\infty, -1] \cup [2, \infty)) \cap ((-2, 3)) = (-2, -1] \cup [2, 3)$.

Nilai Mutlak

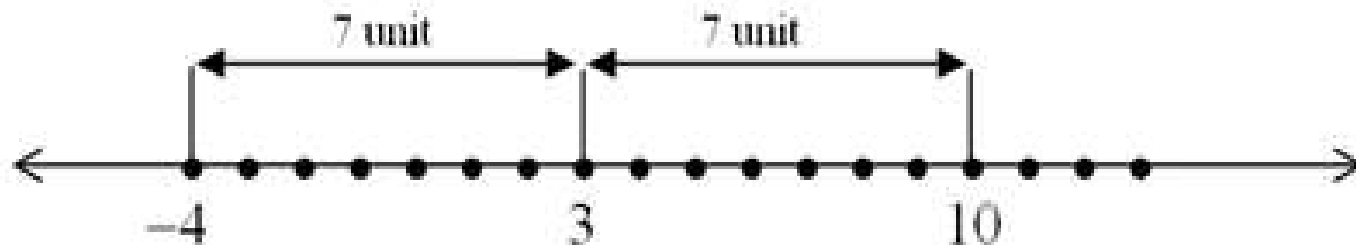
Definisi Nilai Mutlak

Nilai mutlak dari bilangan real x , ditulis $|x|$, didefinisikan

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

Nilai Mutlak

- Secara geometris, nilai mutlak $|x - a|$ dapat diartikan sebagai jarak dari a ke x .
- Sebagai contoh, jika $|x - 3| = 7$ maka artinya x berjarak 7 unit di sebelah kanan atau di sebelah kiri 3



Nilai Mutlak

Beberapa sifat nilai mutlak.

(Teorema)

Jika $a \geq 0$, maka: $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ atau $x = -a$.

(a). $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

(b). $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ atau $x \geq a$.

Nilai Mutlak

Teorema sebelumnya memberikan hasil penting

$$|x - c| < a \Leftrightarrow c - a < x < c + a \Leftrightarrow |x - c|^2 < a^2$$

$$|x - c| > a \Leftrightarrow x > c + a \text{ atau } x < c - a \Leftrightarrow |x - c|^2 > a^2$$

Selingan



Pertaksamaan Dengan Nilai Mutlak

- Proses penyelesaian pertaksamaan yang memuat nilai mutlak adalah **mengubah** bentuk pertaksamaan sehingga **tidak memuat** nilai mutlak
- Gunakan Teorema sebelumnya untuk menyelesaikan **mengubah** bentuk pertaksamaan sehingga **tidak memuat** nilai mutlak

Pertaksamaan Dengan Nilai Mutlak

Contoh 6

Tentukan himpunan jawab pertaksamaan $|3x - 2| > 1$.

$$|3x - 2| > 1$$

$$3x - 2 < -1 \quad \text{atau} \quad 3x - 2 > 1$$

$$3x < 1 \quad \text{atau} \quad 3x > 3$$

$$x < \frac{1}{3} \quad \text{atau} \quad x > 1$$

$$\text{Himpunan jawab} = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, \infty).$$

Pertaksamaan Dengan Nilai Mutlak

Contoh 7

Tentukan himpunan jawab pertaksamaan $|x^2 - x| \leq 2$.

$$|x^2 - x| \leq 2$$
$$-2 \leq x^2 - x \leq 2$$

$$x^2 - x + 2 \geq 0 \quad \text{dan} \quad x^2 - x - 2 \leq 0$$

$$\underbrace{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\frac{3}{4}}_{\text{definit positif}} \geq 0 \quad \text{dan} \quad \underbrace{(x + 1)(x - 2)}_{-1 \leq x \leq 2} \leq 0$$

$$\text{Himpunan jawab} = \mathbf{R} \cap [-1, 2] = [-1, 2].$$

Pertaksamaan Dengan Nilai Mutlak

Contoh 8

Tentukan semua nilai x sehingga $\left| \frac{2x}{x-2} \right| \leq 3$

Jawab : Menggunakan sifat-sifat diatas

$$\left| \frac{2x}{x-2} \right| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq \frac{2x}{x-2} \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x-2} \geq -3 \text{ dan } \frac{2x}{x-2} \leq 3$$

Pertaksamaan Dengan Nilai Mutlak

Contoh 8

$$\begin{aligned} \text{(i). } \frac{2x}{x-2} &\geq -3 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-2} + 3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{5x-6}{x-2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{6}{5} \text{ atau } x > 2 \end{aligned}$$

Pertaksamaan Dengan Nilai Mutlak

Contoh 8

$$(ii). \quad \frac{2x}{x-2} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-2} - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+6}{x-2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x < 2 \text{ atau } x \geq 6$$

maka, diperoleh: $x \leq \frac{6}{5}$ atau $x \geq 6$. ■

Pertaksamaan Dengan Nilai Mutlak

Contoh 9

Tentukan himpunan jawab pertaksamaan $|x^2 - 2| \geq x^2$.

$$|x^2 - 2| \geq x^2$$

$$(x^2 - 2)^2 \geq x^4$$

$$x^4 - 4x^2 + 4 \geq x^4$$

$$4x^2 - 4 \leq 0$$

$$x^2 - 1 \leq 0$$

$$(x - 1)(x + 1) \leq 0$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

Himpunan jawab = $[-1, 1]$.

Pertaksamaan Dengan Nilai Mutlak

Contoh 10

Tentukan himpunan jawab pertaksamaan $2|x| + |x - 1| \leq 2$.

Solusi 10

Tuliskan pertaksamaannya tanpa bentuk nilai mutlak dengan menggunakan sifat

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{bila } x \geq 0 \\ -x, & \text{bila } x < 0 \end{cases} \quad \text{dan} \quad |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{bila } x \geq 1 \\ 1 - x, & \text{bila } x < 1 \end{cases}$$

Pertaksamaan Dengan Nilai Mutlak

Solusi 10

Proses penyelesaiannya pada garis bilangan adalah sebagai berikut.

$x < 0$	$0 \leq x < 1$	$x \geq 1$
$ x = -x$ $ x - 1 = 1 - x$	$ x = x$ $ x - 1 = 1 - x$	$ x = x$ $ x - 1 = x - 1$
Gantikan ke pertaksamaannya	Gantikan ke pertaksamaannya	Gantikan ke pertaksamaannya
$-2x + 1 - x \leq 2$ $-3x + 1 \leq 2$ $3x \geq -1$ $x \geq -\frac{1}{3}$	$2x + 1 - x \leq 2$ $x + 1 \leq 2$ $x \leq 1$	$2x + x - 1 \leq 2$ $3x - 1 \leq 2$ $3x \leq 3$ $x \leq 1$
Himpunan jawab = $(-\infty, 0) \cap [-\frac{1}{3}, \infty) = [-\frac{1}{3}, 0)$	Himpunan jawab = $[0, 1) \cap (-\infty, 1) = [0, 1)$	Himpunan jawab = $[1, \infty) \cap [-\infty, 1] = \{1\}$

Pertaksamaan Dengan Nilai Mutlak

Solusi 10

Perhatikan cara mencari himpunan jawab di setiap selang bagiannya, hasil perhitungan pada penyelesaian pertaksamaan *harus selalu diiriskan* dengan tempat berlakunya pertaksamaan tersebut. Di sini himpunan jawab pertama harus diiriskan dengan selang $(-\infty, 0)$, himpunan jawab kedua dengan selang $[0, 1)$, dan himpunan jawab ketiga dengan selang $[1, \infty)$.

Karena proses penyelesaian pertaksamaan ini terbagi atas tiga kasus yang selang pemecahannya saling terasing, maka himpunan jawab pertaksamaannya adalah *gabungan* dari ketiga himpunan jawab di atas.

$$\text{Himpunan jawab} = \left[-\frac{1}{3}, 0\right) \cup [0, 1) \cup \{1\} = \left[-\frac{1}{3}, 1\right].$$

Catatan Proses penyelesaian soal ini terbagi atas tiga kasus, diagram di atas bermanfaat untuk melihat setiap kasus yang muncul secara keseluruhan.

Tugas (PR)

$$4. x^2 - 5x - 14 \geq 0$$

$$5. x^2 - 3x < 10$$

$$7. \frac{2x+1}{x-3} > 1$$

$$8. \frac{2}{x-2} < -5$$

$$10. \frac{x+4}{2x+1} \leq 3x$$

$$11. \frac{2x}{x-5} \geq -x$$

$$13. |x-3| \leq 4$$

$$14. |3x+2| > 5$$

$$16. \left| \frac{1}{x} \right| \leq 2$$

|

$$17. \left| \frac{2}{x} \right| > 3$$

$$19. \left| \frac{2x+1}{x-1} \right| \leq 2$$

$$20. |x-2| < x-3$$

Inspirasi Hari Ini

Setengah-setengah
Siapapun orangnya ,
betapapun pandainya,
kalau hidup setengah-setengah,
takkan sampai kemanapun,
kecuali sampai lokasi **GAGAL**