Polinomial

Definisi 1

Polinomial adalah fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang nilainya di titik *x* adalah:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

dengan $a_n \neq 0$ dan $a_i \in \mathbb{R}$ untuk setiap *i* dengan $i = 0, 1, 2, \cdots, n$.

Derajat polinomial *f* disimbolkan dengan $deg\ (f) = n$ adalah pangkat tertinggi dari polinomial *f*.

Jika pangkat tertinggi dari polinomial *f* adalah *n*, maka $deg\ (f) = n$.

Teorema 1

Jika *f* dan *g* masing-masing merupakan polinomial, maka terdapat dengan tunggal polinomial *q* dan *r* sehingga

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

dengan $deg(r) < deg(g)$ atau $r(x) = 0$.

Selanjutnya $q(x)$ disebut hasil bagi dan $r(x)$ sisa.

Jika derajat *f* adalah *n* dan derajat *g* adalah *m* dengan *m* < *n*, maka derajat *q* adalah *n* – *m*, dan sisanya yaitu *r* berderajat paling tinggi *m* – 1.

Jika $r(x) = 0$, maka dikatakan $g(x)$ membagi $f(x)$, dan ditulis $g(x)|f(x)$.

Contoh 1

Tentukan *a* dan *b* sehingga $(x-1)^2|(ax^4 + bx^3 + 1)$.

Pembahasan:

Misal $f(x) = ax^4 + bx^3 + 1$, selanjutnya diperoleh:

1	a	b	0	0	1
		a	$a+b$	$a+b$	$a+b$
	a	$a+b$	$a+b$	$a+b$	$a+b+1$

Karena 1 akar dari $f(x) = ax^4 + bx^3 + 1$, maka $a + b + 1 = 0 \Leftrightarrow a + b = -1$.

Juga diperoleh:

1	a	$a+b$	$a+b$	$a+b$
		a	$2a+b$	$3a+2b$
	a	$2a+b$	$3a+2b$	$4a+3b$

Karena 1 akar dari $g(x) = ax^3 + (a+b)x^2 + (a+b)x + (a+b)$, maka $4a + 3b = 0$.

Diperoleh sistem persamaan linear $\begin{cases} a+b=-1 \\ 4a+3b=0 \end{cases}$.

Dengan menyelesaikan SPL tersebut diperoleh $a=3$ dan $b=-1$.

Contoh 2

Diketahui fungsi kuadrat $f(x)=ax^2+bx+c$, dengan $a,b,c \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$, memenuhi sifat-sifat berikut:

1). Jika $x \in \mathbb{R}$, maka $f(x-4)=f(2-x)$ dan $f(x) \geq x$.

2). Jika $x \in (0,2)$, maka $f(x) \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$.

3). Nilai minimum $f(x)$ pada $\mathbb{R}$ adalah 0.

Tentukan fungsi polinomial *f* tersebut.

Pembahasan:

Berdasarkan (1), $f(x-4)=f(2-x)$ untuk $x \in \mathbb{R}$, oleh karena itu sumbu simetri fungsi kuadrat *f* adalah:

$x=\frac{(x-4)+(2-x)}{2}=-1$.

Berdasarkan (3), nilai minimum *f*(*x*) pada $\mathbb{R}$ adalah 0, hal ini berarti grafik fungsi *f* terbuka ke atas, akibatnya *a* > 0. Berdasarkan kedua kondisi tersebut diperoleh:

$$f(x)=a(x+1)^2$$

dengan *a* > 0.

Berdasarkan (1) diperoleh $f(1) \geq 1$ dan berdasarkan (2) diperoleh $f(1) \leq \left(\frac{1+1}{2}\right)^2=1$. Hal ini berarti $f(1)=1$. Akibatnya diperoleh $f(1)=a(1+1)^2=1$, yaitu $a=\frac{1}{4}$. Jadi fungsi polinomial tersebut adalah $f(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2$.

Jika *f* suatu polynomial berderajat *n* dan $g(x)=x-a$, maka diperoleh

$$f(x)=(x-a)q(x)+r$$

dengan $r \in \mathbb{R}$, dan $\deg(q)=n-1$.

Jika diambil *x* = *a*, diperoleh *f*(*a*) = *r*, akibatnya bentuk tersebut di atas berubah menjadi:

$$f(x)=(x-a)q(x)+f(a).$$

Jika *f*(*a*) = 0, maka *a* disebut akar atau nilai nol dari *f*.

Definisi 2

Polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

dengan $a_n \neq 0$ disebut berkebalikan (resiprokal) jika $a_i = a_{n-i}$ untuk $i = 0, 1, 2, \cdots, n$.

Contoh

1). $f(x) = x^5 + 3x^3 + 3x^2 + 1$

2). $f(x) = 5x^8 - 2x^6 + 4x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 5$

Teorema 2 (Teorema Binomial Newton)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Teorema 3

1). Polinomial *f* yang berderajat *n* dengan $a_n \neq 0$ adalah resiprokal jika dan hanya jika

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x).$$

2). Jika *f* adalah suatu polinomial resiprokal berderajat ganjil, maka *f* habis dibagi oleh $x + 1$ dan hasil baginya adalah polinomial resiprokal berderajat genap.

3). Jika a adalah akar dari persamaan resiprokal $f(x) = 0$, maka $\frac{1}{a}$ juga akar dari $f(x) = 0$.

Contoh 3

Polinomial $f(x) = x^5 + 3x^3 + 3x^2 + 1$ merupakan polinomial resiprokal.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^5} + \frac{3}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 1$$

$$x^5 f\left(\frac{1}{x}\right) = x^5\left(\frac{1}{x^5} + \frac{3}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 1\right)$$

$$x^5 f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + 3x^2 + 3x^3 + x^5$$

$$x^5 f\left(\frac{1}{x}\right) = x^5 + 3x^3 + 3x^2 + 1 = f(x)$$

Berdasarkan Teorema di atas, *f* merupakan polynomial resiprokal. Lebih lanjut perhatikan bahwa

$$(x^5 + 3x^3 + 3x^2 + 1) : (x + 1) = x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 1.$$

Hal ini berarti polinomial $f(x) = x^5 + 3x^3 + 3x^2 + 1$ habis dibagi oleh $x + 1$ dan hasil baginya adalah $q(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 1$, yaitu polinomial resiprokal berderajat genap.

Polinomial Simetrik dan Antisimetrik

Definisi 3

Polinomial $f(x, y)$ disebut simetrik jika $f(x, y) = f(y, x)$ untuk setiap *x* dan *y*.

Contoh

1). $f(x, y) = x + y$.

2). $f(x, y) = xy$.

3). $f(x, y) = x^5y^5(x^5 + y^5)$.

Definisi

Polinomial $f(x, y)$ disebut antisimetrik jika $f(x, y) = -f(y, x)$ untuk setiap *x* dan *y*.

Contoh 4

Polinomial-polinomial berikut merupakan polynomial antisimetrik

1). $f(x, y) = (x - y)(x + y)$.

2). $f(x, y) = (x - y)xy$.

3). $f(x, y) = (x - y)^5(x^5 + y^5)$

Teorema 4

Jika *f* suatu polinomial antisimetrik, maka *f* dapat ditulis dalam bentuk $f(x, y) = (x - y)g(x, y)$ dengan $g(x, y)$ suatu polynomial simetrik.

Contoh 5

Perhatikan bahwa $f(x, y) = (x - y)^5(x^5 + y^5)$ merupakan polynomial anti simetrik, sebab

$$f(x, y) = (x - y)^5(x^5 + y^5) = -(y - x)^5(y^5 + x^5) = -f(y, x).$$

dan

$$f(x, y) = (x - y)^5(x^5 + y^5) = (x - y)(x - y)^4(x^5 + y^5) = (x - y)g(x, y)$$

dengan $g(x, y) = (x - y)^4(x^5 + y^5)$ merupakan polynomial simetrik.

Perhatikan bahwa untuk semua bilangan bulat positif *n* berlaku:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} + y^{n-1}) - xy(x^{n-2} + y^{n-2}).$$

oleh karena itu **sistem persamaan simetrik non linear dalam dua variabel *x* dan *y***, pada umumnya dapat disederhanakan dengan menggunakan substitusi:

$$\sigma = x + y \text{ dan } t = xy.$$

Contoh 6

Selesaikan sistem persamaan non linear $\begin{cases} x^5 + y^5 = 33 \\ x + y = 3 \end{cases}$ .... (1)

Pembahasan:

Substitusikan secara berturut-turut persamaan berikut ke dalam persamaan (1)

$$\begin{aligned}
x^5 + y^5 &= (x+y)(x^4+y^4) - xy(x^3+y^3) \\
x^4 + y^4 &= (x+y)(x^3+y^3) - xy(x^2+y^2) \\
x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2+y^2) - xy(x+y) \\
x^2 + y^2 &= (x+y)(x+y) - 2xy
\end{aligned}$$

diperoleh:

$$\begin{aligned}
x^5 + y^5 &= (x+y)(x^4+y^4) - xy(x^3+y^3) \\
&= (x+y)\big((x+y)(x^3+y^3) - xy(x^2+y^2)\big) - xy(x^3+y^3) \\
&= (x+y)^2(x^3+y^3) - xy(x+y)(x^2+y^2) - xy(x^3+y^3) \\
&= (x+y)^2\big((x+y)(x^2+y^2) - xy(x+y)\big) - xy(x+y)(x^2+y^2) - xy\big((x+ \\
&\quad y)(x^2+y^2) - xy(x+y)\big) \\
&= (x+y)^3(x^2+y^2) - xy(x+y)^3 - xy(x+y)(x^2+y^2) - xy(x+y)(x^2+ \\
&\quad y^2) + (xy)^2(x+y) \\
&= (x+y)^3\big((x+y)(x+y) - 2xy\big) - xy(x+y)^3 - xy(x+y)\big((x+y)(x+y) - \\
&\quad 2xy\big) - xy(x+y)\big((x+y)(x+y) - 2xy\big) + (xy)^2(x+y) \\
&= (x+y)^5 - 2xy(x+y)^3 - xy(x+y)^3 - xy(x+y)^3 + 2(xy)^2(x+y) - \\
&\quad xy(x+y)^3 + 2(xy)^2(x+y) + (xy)^2(x+y) \\
&= (x+y)^5 - 5xy(x+y)^3 + 5(xy)^2(x+y)
\end{aligned}$$

Jadi

$$x^5 + y^5 = (x+y)^5 - 5(x+y)^3xy + 5(x+y)(xy)^2 \quad \text{.................. (3)}$$

Dengan mengammbil $\sigma = x + y$ dan $t = xy$, kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (3) diperoleh:

$$\sigma^5 - 5\sigma^3 t + 5\sigma t^2 = 33.$$

Jadi diperoleh sistem persamaan baru

$$\begin{cases} \sigma^5 - 5\sigma^3 t + 5\sigma t^2 = 33 & \text{....................................... (4)} \\ \sigma = 3 & \text{....................................... (5)} \end{cases}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (5) ke dalam persamaan (4) diperoleh:

$$3^5 - 5 \cdot 3^3 \cdot t + 5 \cdot 3 \cdot t^2 = 33$$

$$243 - 135t + 15t^2 = 33$$

$$t^2 - 9t + 14 = 0$$

$$(t-2)(t-7) = 0$$

dan diperoleh penyelesaian $t_1 = 2$ dan $t_2 = 7$. Akibatnya diperoleh 2 (dua) sistem persamaan:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \text{ dan } \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 7 \end{cases}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ diperoleh

$$x(3-x) = 2$$

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

Akibatnya diperoleh

$$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 3 - x_1 = 3 - 1 = 2$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 3 - x_2 = 3 - 2 = 1$$

Jadi diperoleh penyelesaian (1,2) dan (2,1).

Dengan menyelesaikan sistem persamaan $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 7 \end{cases}$ diperoleh

$$x(3-x) = 7$$

$$-x^2 + 3x - 7 = 0$$

$$x^2 - 3x + 7 = 0$$

Persamaan kuadrat tersebut tidak mempunyai penyelesaian real, sebab diskriminannya yaitu

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 9 - 28 = -19 < 0.$$

Hal ini berarti sistem persamaan $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 7 \end{cases}$ tidak mempunyai penyelesaian real.

Contoh 7

Tentukan penyelesaian dari persamaan $\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5$.

Pembahasan:

Misal $y = \sqrt[4]{x}$ dan $z = \sqrt[4]{97 - x}$, diperoleh

$$\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5$$

$$y^4 + z^4 = 97 - x + x = 97$$

Jadi diperoleh system persamaan:

$$\begin{cases} y^4 + z^4 = 97 & \text{.. (6)} \\ y + z = 5 & \text{.. (7)} \end{cases}$$

Substitusikan secara berturut-turut persamaan berikut ke dalam persamaan (6)

$$y^4 + z^4 = (y+z)(y^3+z^3) - yz(y^2+z^2)$$

$$y^3 + z^3 = (y+z)(y^2+z^2) - yz(y+z)$$

$$y^2 + z^2 = (y+z)(y+z) - 2yz$$

diperoleh

$$\begin{aligned} y^4 + z^4 &= (y+z)\big((y+z)(y^2+z^2) - yz(y+z)\big) - yz(y^2+z^2) \\ &= (y+z)^2(y^2+z^2) - yz(y+z)^2 - yz(y^2+z^2) \\ &= (y+z)^2\big((y+z)(y+z) - 2yz\big) - yz(y+z)^2 - yz\big((y+z)(y+z) - 2yz\big) \\ &= (y+z)^4 - 2yz(y+z)^2 - yz(y+z)^2 - yz(y+z)^2 + 2(yz)^2 \\ &= (y+z)^4 - 4yz(y+z)^2 + 2(yz)^2 \end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh

$$y^4 + z^4 = (y+z)^4 - 4yz(y+z)^2 + 2(yz)^2$$

Dengan mengammbil $\sigma = y + z$ dan $t = yz$, kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (6) diperoleh:

$$97 = y^4 + z^4 = (y+z)^4 - 4yz(y+z)^2 + 2(yz)^2 = \sigma^4 - 4\sigma^2 t + 2t^2$$

$$\sigma^4 - 4\sigma^2 t + 2t^2 = 97$$

Jadi diperoleh sistem persamaan baru

$$\begin{cases} \sigma^4 - 4\sigma^2 t + 2t^2 = 97 & \text{.. (8)} \\ \sigma = 5 & \text{.. (9)} \end{cases}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (9) ke dalam persamaan (8) diperoleh:

$$\sigma^4 - 4\sigma^2 t + 2t^2 = 97$$

$$5^4 - 4.5^2 t + 2t^2 = 97$$

$$625 - 100t + 2t^2 = 97$$

$$2t^2 - 100t + 625 - 97 = 0$$

$$2t^2 - 100t + 528 = 0$$

$$t^2 - 50t + 264 = 0$$

$$(t-6)(t-44) = 0$$

dan diperoleh penyelesaian $t_1 = 6$ dan $t_2 = 44$. Akibatnya diperoleh 2 (dua) sistem persamaan:

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ yz = 6 \end{cases} \text{ dan } \begin{cases} y + z = 5 \\ yz = 44 \end{cases}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan $\begin{cases} y + z = 5 \\ yz = 6 \end{cases}$ diperoleh

$$y(5 - y) = 6$$

$$5y - y^2 = 6$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

$$(y - 2)(y - 3) = 0$$

diperoleh

$$y_1 = 2 \Longrightarrow z_1 = 5 - z_1 = 5 - 2 = 3$$

$$y_2 = 3 \Longrightarrow z_2 = 5 - z_2 = 5 - 3 = 2$$

Jadi diperoleh penyelesaian (2,3) dan (3,2). Lebih lanjut diperoleh:

$$y_1 = 2 \Longrightarrow 2 = y_1 = \sqrt[4]{x_1} \Longrightarrow x_1 = 16$$

$$y_2 = 3 \Longrightarrow 3 = y_2 = \sqrt[4]{x_2} \Longrightarrow x_2 = 81$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan $\begin{cases} y + z = 5 \\ yz = 44 \end{cases}$ diperoleh

$$y(5 - y) = 44$$

$$5y - y^2 = 44$$

$$-y^2 + 5y - 44 = 0$$

$$y^2 - 5y + 44 = 0$$

Persamaan kuadrat tersebut tidak mempunyai penyelesaian real, sebab diskriminannya yaitu

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 44 = 25 - 176 = -151 < 0.$$

Hal ini berarti sistem persamaan $\begin{cases} y + z = 5 \\ yz = 44 \end{cases}$ tidak mempunyai penyelesaian real.

Jadi penyelesaian dari persamaan $\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5$ adalah $x_1 = 16$ atau $x_2 = 81$.

Contoh 8

Buktikan bahwa jika x_1 dan x_2 akar-akar dari persamaan $x^2 - 6x + 1 = 0$, maka $x_1^n + x_2^n$ adalah bilangan bulat untuk setiap bilangan bulat positif *n*.

Pembahasan:

Jika x_1 dan x_2 akar-akar dari persamaan $x^2 - 6x + 1 = 0$, maka diperoleh:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 6$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 1$$

Perhatikan bahwa untuk semua bilangan bulat positif n berlaku:

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} + y^{n-1}) - xy(x^{n-2} + y^{n-2})$$

dengan mengambil $x = x_1$ dan $y = x_2$, maka diperoleh:

$$x_1^n + x_2^n = (x_1 + x_2)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - x_1 x_2 (x_1^{n-2} + x_2^{n-2})$$

$$x_1^n + x_2^n = 6(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - (x_1^{n-2} + x_2^{n-2})$$

Misal $s_n = x_1^n + x_2^n$, maka diperoleh persamaan rekursif

$$s_n = 6s_{n-1} - s_{n-2},$$

dengan

$$s_0 = x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2$$

$$s_1 = x_1 + x_2 = 6$$

Persamaan karakteristik dari persamaan rekursif $s_n = 6s_{n-1} - s_{n-2}$, adalah

$$x^2 - 6x + 1 = 0$$

dan penyelesaiannya adalah:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(1)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{8}}{2}$$

$x_1 = 3 + \sqrt{8}$ atau $x_2 = 3 - \sqrt{8}$.

Adapun penyelesaian umumnya adalah:

$$x_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n,$$

$$s_n = a\left(3 + \sqrt{8}\right)^n + b\left(3 - \sqrt{8}\right)^n.$$

Untuk $s_0 = 2$, diperoleh $2 = a.\left(3 + \sqrt{8}\right)^0 + b.\left(3 - \sqrt{8}\right)^0$ atau $a + b = 2$.

Untuk $s_1 = 6$, diperoleh $6 = a.\left(3 + \sqrt{8}\right) + b \cdot \left(3 - \sqrt{8}\right)$.

$$
\begin{array}{l|l|l}
(3+\sqrt{8})a + (3-\sqrt{8})b = 6 & \cdot 1 & (3+\sqrt{8})a + (3-\sqrt{8})b = 6 \\
a + b = 2 & \cdot (3+\sqrt{8}) & (3+\sqrt{8})a + (3+\sqrt{8})b = 2(3+\sqrt{8}) \quad - \\
\hline
 & & -2\sqrt{8}\,b = 6 - 6 - 2\sqrt{8} \\
 & & 2\sqrt{8}\,b = 2\sqrt{8} \\
 & & b = 1
\end{array}
$$

$b = 1 \Rightarrow a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1.$

Jadi diperoleh $a = 1$ dan $b = 1$, sehingga diperoleh penyelesaian umum:

$$s_n = \left(3 + \sqrt{8}\right)^n + \left(3 - \sqrt{8}\right)^n.$$

Akibatnya diperoleh

$$x_1^n + x_2^n = \left(3 + \sqrt{8}\right)^n + \left(3 - \sqrt{8}\right)^n.$$

Untuk membuktikan bahwa $x_1^n + x_2^n$ merupakan bilangan bulat untuk setiap bilangan bulat positif *n* dilakukan dengan Prinsip Induksi Matematika sebagai berikut:

1). Untuk $n = 1$, diperoleh $x_1 + x_2 = 6$ merupakan bilangan bulat. Jadi benar untuk $n = 1$.

2). Untuk $n = 2$, diperoleh

$$x_1^2 + x_2^2 = s_2 = 6s_1 - s_0 = 6 \cdot 6 - 2 = 34,$$

merupakan bilangan bulat. Jadi benar untuk $n = 2$.

3). Diasumsikan benar untuk $n = k - 1$ dan $n = k$, yaitu

$$x_1^{k-1} + x_2^{k-1} = \left(3 + \sqrt{8}\right)^{k-1} + \left(3 - \sqrt{8}\right)^{k-1} \text{ dan}$$

$$x_1^k + x_2^k = \left(3 + \sqrt{8}\right)^k + \left(3 - \sqrt{8}\right)^k$$

masing-masing merupakan bilangan bulat.

Akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$ sebagai berikut:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} + y^{n-1}) - xy(x^{n-2} + y^{n-2}).$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{k+1} + x_2^{k+1} &= (x_1 + x_2)\left(x_1^k + x_2^k\right) - x_1 x_2\left(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}\right) \\
&= 6\left(\left(3 + \sqrt{8}\right)^k + \left(3 - \sqrt{8}\right)^k\right) - \left(\left(3 + \sqrt{8}\right)^{k-1} + \left(3 - \sqrt{8}\right)^{k-1}\right)
\end{aligned}
$$

Perhatikan bahwa $\left(3 + \sqrt{8}\right)^k + \left(3 - \sqrt{8}\right)^k$ dan $\left(3 + \sqrt{8}\right)^{k-1} + \left(3 - \sqrt{8}\right)^{k-1}$ masing-masing merupakan bilangan bulat, akibatnya $x_1^{k+1} + x_2^{k+1}$ juga merupakan bilangan bulat. Jadi benar untuk $n = k + 1$.

Oleh karena itu berdasarkan Prinsip Induksi Matematika Kuat disimpulkan bahwa $x_1^n + x_2^n$ merupakan bilangan bulat untuk setiap bilangan bulat positif n.

Contoh 9

Jika z bilangan real, selesaikan persamaan $z^8 + 4z^6 - 10z^4 + 4z^2 + 1 = 0$.

Pembahasan:

Kedua ruas persamaan $z^8 + 4z^6 - 10z^4 + 4z^2 + 1 = 0$ dibagi dengan z^4 diperoleh:

$$z^4 + 4z^2 - 10 + \frac{4}{z^2} + \frac{1}{z^4} = 0$$

$$z^4 + \frac{1}{z^4} + 4z^2 + \frac{4}{z^2} - 10 = 0$$

$$z^4 + \frac{1}{z^4} + 4\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 10 = 0$$

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^4 - 4z^2 - 6 - \frac{4}{z^2} + 4\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 10 = 0$$

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^4 - 4\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + +4\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 16 = 0$$

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^4 = 16$$

Misal $u = z + \frac{1}{z}$, maka

$$u^4 = 16,$$

diperoleh penyelesaian $u = -2$ atau $u = 2$.

Untuk kasus $u = 2$, maka:

$$z + \frac{1}{z} = 2$$

$$z^2 - 2z + 1 = 0$$

$$(z - 1)^2 = 0$$

diperoleh $z_1 = 1$.

Untuk kasus $u = -2$, maka:

$$z + \frac{1}{z} = -2$$

$$z^2 + 2z + 1 = 0$$

$$(z + 1)^2 = 0$$

diperoleh $z_2 = -1$.

Jadi diperoleh penyelesaian $z_1 = 1$ atau $z_2 = 1$.

Contoh 10

Polinomial $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{19} + x^{20}$ diubah menjadi polynomial $g(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_{19} y^{19} + a_{20} y^{20}$ dengan mengambil $y = x - 4$. Nilai dari $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{19} + a_{20} = \cdots$.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa suku-suku dalam polinomial $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{19} + x^{20}$ membentuk deret geometri dengan suku pertama 1 ($a = 1$), rasio $r = -x$ dan banyaknya suku $n = 21$. Oleh karena itu diperoleh:

$$f(x) = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{1 \cdot ((-x)^{21} - 1)}{(-x) - 1} = \frac{-x^{21} - 1}{-x - 1} = \frac{x^{21} + 1}{x + 1}.$$

Misal $y = x - 4$, maka $x = y + 4$, akibatnya diperoleh

$$g(y) = f(y + 4) = \frac{(y + 4)^{21} + 1}{(y + 4) + 1} = \frac{(y + 4)^{21} + 1}{y + 5}.$$

Di lain pihak $g(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_{19} y^{19} + a_{20} y^{20}$, akibatnya diperoleh:

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_{19} y^{19} + a_{20} y^{20} = \frac{(y + 4)^{21} + 1}{y + 5}.$$

Dengan mengambil $y = 1$, diperoleh:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{19} + a_{20} = \frac{(1 + 4)^{21} + 1}{1 + 5} = \frac{5^{21} + 1}{6}.$$

Contoh 11

Misal $f(x) = ax^2 + bx + c$ dan misal $f(x) = x$ tidak mempunyai akar-akar real. Tunjukan bahwa $f\big(f(x)\big) = x$ tidak mempunyai akar-akar real.

Pembahasan:

Berdasarkan yang diketahui $f(x) = x$ tidak mempunyai akar real, hal ini berarti tidak ada bilangan real x yang memenuhi $f(x) = x$. Akibatnya $f(x) \neq x$ untuk semua bilangan real x, yaitu $f(x) > x$ atau $f(x) < x$ untuk semua bilangan real x.

Jika $f(x) > x$ untuk semua bilangan real x, maka

$$f\big(f(x)\big) > f(x) > x \Rightarrow f\big(f(x)\big) > x,$$

untuk semua bilangan real x.

Jika $f(x) < x$ untuk semua bilangan real x, maka

$$f\big(f(x)\big) < f(x) < x \Rightarrow f\big(f(x)\big) < x,$$

untuk semua bilangan real x.

Hal ini berarti tidak ada bilangan real x yang memenuhi $f\big(f(x)\big) = x$. Dengan kata lain $f\big(f(x)\big) = x$ tidak mempunyai akar real.

Latihan

1. Jika x_1 dan x_2 akar-akar dari persamaan $x^2 + ax + bc = 0$, x_2 dan x_3 akar-akar dari persamaan $x^2 + bx + ac = 0$ dengan $ac \neq bc$. Tunjukkan bahwa x_1 dan x_3 akar-akar dari persamaan $x^2 + cx + ab = 0$.
2. Tentukan semua penyelesaian real (x, y) dari persamaan:
   $y^4 + 4y^2x - 11y^2 + 4xy - 8y + 8x^2 - 40x + 52 = 0.$
3. Buktikan bahwa jika $f(x, y)$ suatu polinomial simetrik dan $(x - y)|f(x, y)$, maka $(x - y)^2|f(x, y)$.