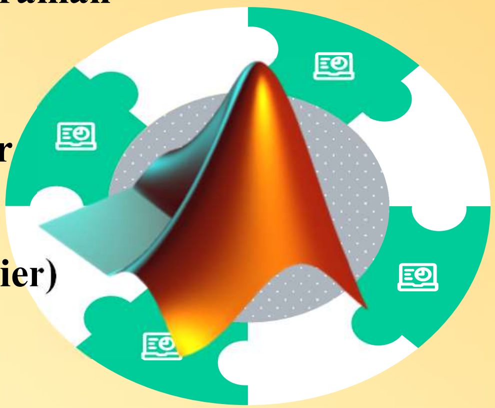
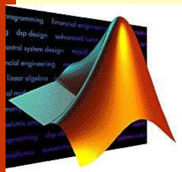
08 Ordinary Differensial Equation

- **1 & 2** Dasar – dasar dan Pemograman dengan MATLAB
- **3** Persamaan Aljabar Linier
- **4** Akar Persamaan (non linier)
- **5** Regresi dan Interpolasi



- **6** Integral Numeris
- **7** Optimasi
- **8** Persamaan Differensial Ordiner
- **9** Persamaan Differensial Parsial



Persamaan Differensial Ordiner

pengertian

Persamaan differensial merupakan gabungan suatu fungsi yang tidak diketahui disertai turunannya.

Variabel yang didifferensialkan disebut ***variabel tak bebas*** dan variabel tempat variabel tak bebas didifferensialkan disebut ***variabel bebas*** *(independen)*.

lanjutan ....

Jika fungsi tersebut mencakup satu variabel bebas, maka disebut ***persamaan differensial ordiner***.

Fungsi dengan lebih dari satu variabel bebas disebut ***persamaan differensial parsial***.

lanjutan

Jika suatu fungsi turunan tertingginya adalah turunan pertama, maka persamaan tersebut disebut ***persamaan differensial orde satu***.

Suatu ***persamaan orde dua*** akan mempunyai turunan kedua sebagai turunan tertinggi.

Penyelesaian persamaan differensial **orde ke-n** membutuhkan **n kondisi** yang diketahui.

Ada 2 problem dlm PD

1. *masalah harga awal* (*initial value problem*) yaitu jika kondisi yang telah dispesifikasikan pada variabel bebas tertentu (umumnya pada kondisi awal t = 0)

Selesaikan

$$dy/dt = y - 20$$

dengan $y(0) = 100$

Ada 2 problem dlm PD

2. *masalah harga batas* (*boundary value problem*) yaitu jika PD dispesifikasikan dengan 2 titik yang berbeda

PD berikut

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3xy + 7y = \cos(2x)$$

dengan y(0) = 1 dan y(π) = 0

Ada dua kategori utama metode numerik dalam penyelesaian persamaan differensial ordiner, yaitu

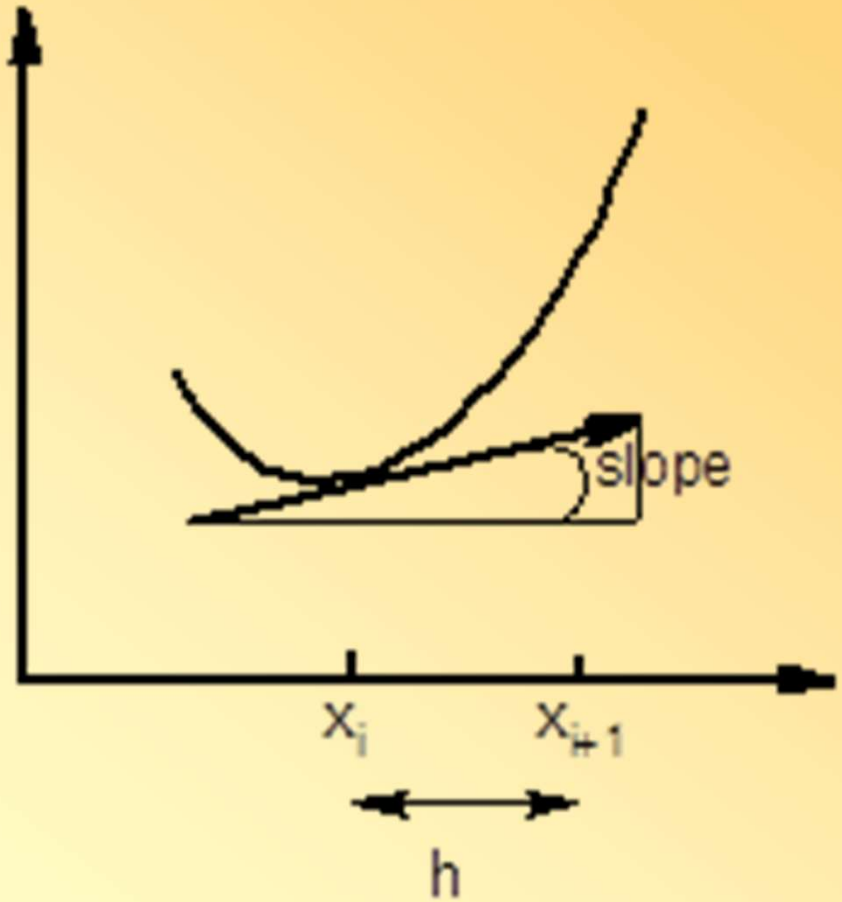
1. metode satu langkah, yaitu penyelesaian hanya dengan 1 langkah saja. Yang akan dibahas disini adalah metode Euler
2. metode multi langkah, yaitu penyelesaian dengan beberapa langkah. Yang akan dibahas adalah metode Runge-Kutta dan metode predictor-korektor.

Metode Euler

Metode Euler adalah salah satu metode satu langkah yang paling mendasar.

Semua metode satu langkah menggunakan suatu slope ϕ untuk mengekstrapolasikan suatu harga lama variabel tak bebas terhadap suatu harga baru variabel tak bebas tersebut.

Perbedaanya adalah pada cara memperkirakan besarnya slope tersebut


slope
x_i
x_{i+1}
h

Bentuk umum $y_{n+1} = y_n + \phi\, h$

Untuk metode Euler turunan pertama memberikan perkiraan langsung slope pada y_n.

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)\, h$$

Selesaikan dengan Metode Euler

$$dy/dt = y - 20 \qquad \text{dengan } y(0) = 100$$

Tentukan nilai y pada berbagai nilai t dari 0 sampai 5

h ambil 1 dan 0.5

$dy/dt = y - 20$

Pada $t = 0$, $y = 100$

$f_0 = dy/dt = y - 20 = 80$

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)\, h$$

$h = 1$

$t_1 = t_0 + h \qquad = 0 + 1 = 1$

$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)\, h \qquad = 100 + 80 \times 1 = 180$

$f_1 = dy/dt = y - 20 \qquad = 180 - 20 = 160$

$t_2 = t_1 + h \qquad = 1 + 1 = 2$

$y_2 = y_1 + f(t_1,y_1)\,h \qquad = 180 + 160 \text{ x } 1 = 340$

$f_2 = dy/dt = y - 20 \qquad = 340 - 20 = 320$

$t_3 = t_2 + h \qquad = 2 + 1 = 3$

$y_3 = y_2 + f(t_2,y_2)\,h \qquad = 340 + 320 \text{ x } 1 = 660$

$f_3 = dy/dt = y - 20 \qquad = 660 - 20 = 640$

Kerjakan utk $h = 0.5$

METODE RUNGE-KUTTA

Bentuk umum $y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n, h)$

$f(t_n, y_n, h)$ disebut *fungsi inkremen* yang dapat diinterpretasikan sebagai sebuah slope rata-rata sepanjang interval.

Fungsi inkremen dapat ditulis sebagai

$$f(t_n, y_n, h) = a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_nk_n$$

Ada beberapa jenis metode Runge-Kutta yang dapat digunakan tergantung dari pengembangan jumlah suku-suku yang berbeda pada fungsi inkremen. Metode Runge-Kutta yang paling popular adalah Metode Runge-Kutta klasikal yang menggunakan orde 4 ($n = 4$).

$$y_{n+1} = y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

dengan

$$k_1 = h*f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = h*f(t_n + h/2, y_n + k_1/2)$$

$$k_3 = h*f(t_n + h/2, y_n + k_2/2)$$

$$k_4 = h*f(t_n + h, y_n + k_3)$$

Selesaikan dengan Metode Runge-Kutta

$$dy/dt = y - 20 \qquad \text{dengan } y(0) = 100$$

Tentukan nilai y pada berbagai nilai t dari 0 sampai 5

$h = 1$

$dy/dt = f = y - 20$

Pada $t = 0$, $y = 100$, $f_0 = dy/dt = y - 20 = 80$

$$y_{n+1} = y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

$h = 1$

$t_1 = t_0 + h \qquad = 0 + 1 = 1$

$k_1 = h*f(t_0, y_0) \qquad = 80$

$k_2 = h*f(t_0 + h/2, y_0 + k_1/2) \qquad = 120$

$k_3 = h*f(t_0 + h/2, y_0 + k_2/2) \qquad = 140$

$k_4 = h*f(t_0 + h, y_0 + k_3) \qquad = 220$

$y_1 = y_0 + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 = 236{,}7$

$t_2 = t_1 + h \quad = 1 + 1 = 2$

$k_1 = h*f(t_0, y_0) \quad = 236{,}7$

$k_2 = h*f(t_0 + h/2, y_0 + k_1/2) \quad = 216{,}7$

$k_3 = h*f(t_0 + h/2, y_0 + k_2/2) \quad = 379{,}2$

$k_4 = h*f(t_0 + h, y_0 + k_3) \quad = 595{,}8$

$y_2 = y_1 + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \quad = 606{,}8$

dst

Kerjakan utk h = 0.5

Tugas

Selesaikan $dy/dt = 2yt$

dengan $y = 2$ untuk $t = 0$

Selesaikan dg metode Euler dan Runge-Kutta sampai $t = 5$ dg $h = 1$ dan $h = 0,5$

Gunakan $h = 0.1$ dan 0.05 (dengan excel)

Bandingkan dengan penyelesaian secara analitis $y = 2\exp(t^2)$

Buat grafik sebagai perbandingan error masing-masing perhitungan.

FUNGSI `ode`

- Matlab menyediakan fungsi-fungsi `ode` untuk penyelesaian persamaan differensial ordiner.
- Fungsi `ode45` adalah fungsi `ode` pertama yang dapat dicoba pada masalah yang baru.

- Untuk melakukan hal tersebut perlu ditulis sebuah fungsi M-File yang menghasilkan derivatif untuk nilai variabel tak bebas

Soal 1

Selesaikan $dy/dt = 2yt$ dengan $y = 2$ untuk $t = 0$

- Penyelesaian secara analitis $y = 2\exp(t^2)$

jawaban

```
yo = 2;
to = 0;
tn = 2;
n = 11;
datat = linspace(to,tn,n);
[t,y] = ode45('soal1',datat,yo)
yhit = 2.*exp(datat.^2)
plot(t,y,'o',datat,yhit,'-')
```

```
function dy_dt = soal1(t,y)
dy_dt=2*y*t;
```

Soal 2

Sebagai contoh penyelesaian PDO,

$$\frac{dC}{dt} = 1 - C - xk * C$$

$$\frac{dT}{dt} = 1 - T - \alpha * xk * C$$

$$xk = \beta * T^2$$

α = -5; β = 2;

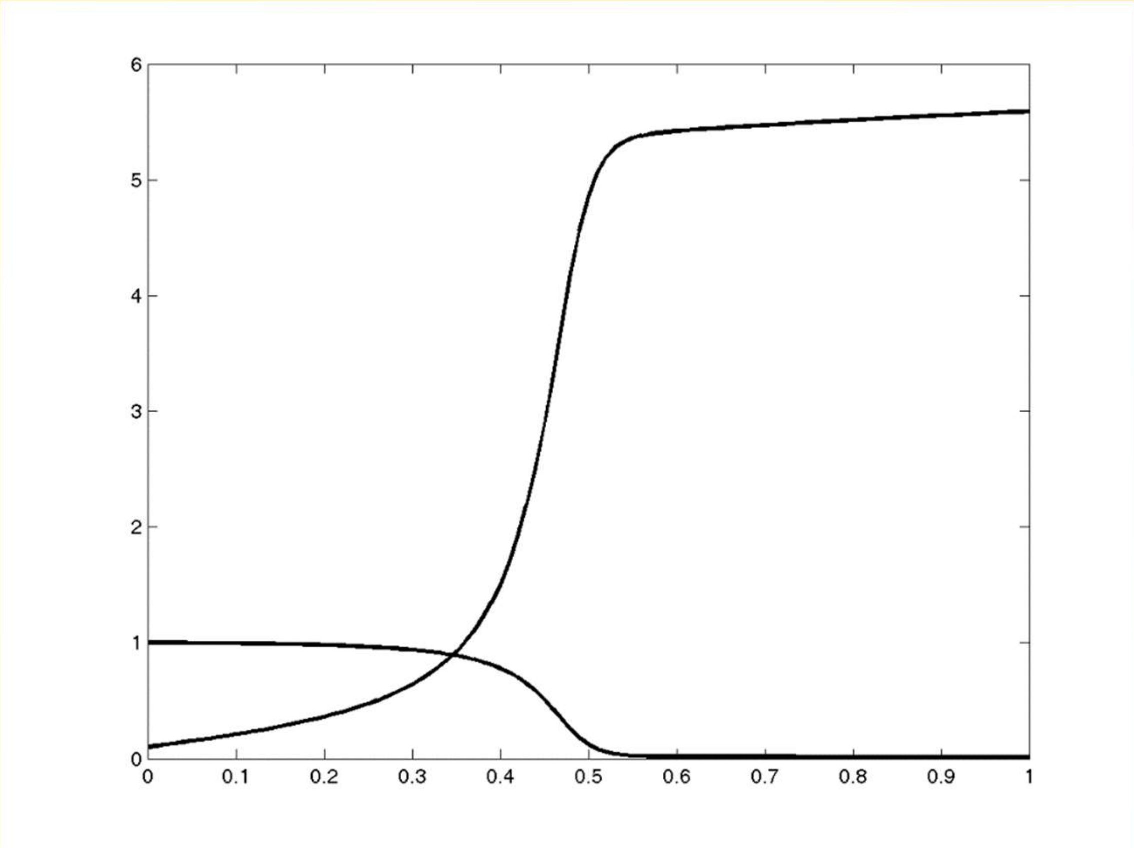
Nilai awal Co = 1; To = 0.1;

to = 0; tf = 1;

```
clear all
global Alpha Beta
 Alpha = -5.; Beta  =  2.;
 y0(1) = 1. ; y0(2) = 0.1;
 t0 = 0.; tf = 1.;
[t y] = ode45('F73', [t0:0.01:tf], y0);
temp = [t y]; save ode.dat temp -ascii
plot(t, y, 'k-','linewidth',2)
```

```
function dydt = F73(time, y)
global Alpha Beta
c = y(1);
T = y(2);
xk = Beta*T*T;
dydt(1) = 1 - c - xk*c       ;
dydt(2) = 1 - T - Alpha*xk*c ;
 dydt = dydt';
```

08 Ordinary Differensial Equation

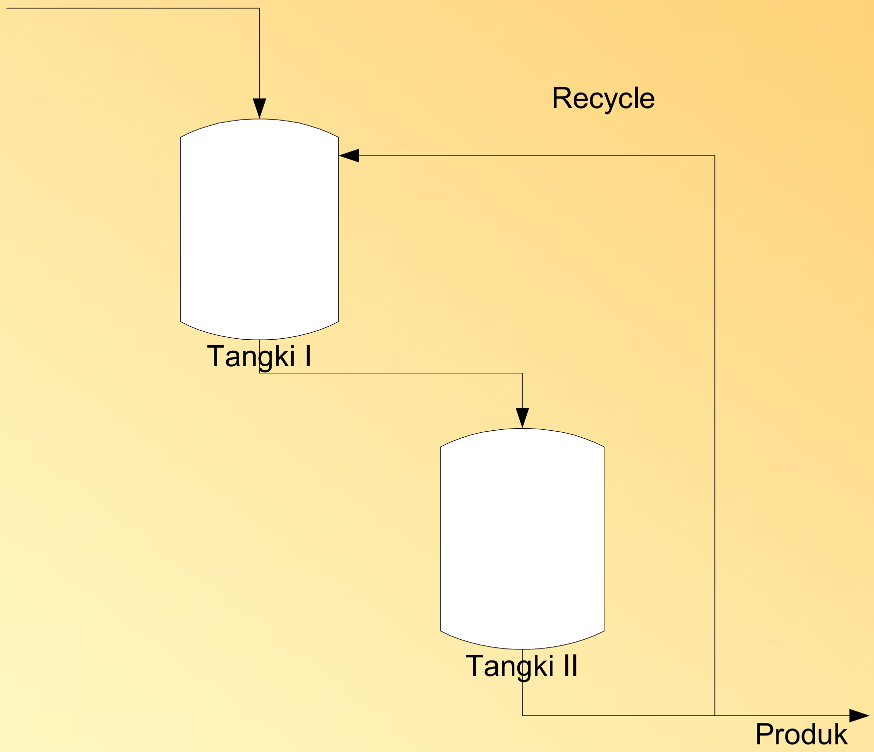


Soal 3

Dua buah tangki dengan kapasitas 100 L diisi penuh dengan larutan garam dengan konsentrasi 20 g/L. Ke dalam tangki I dimasukkan air 5 L/menit, dan pada saat yang sama dari tangki I dialirkan 8 L/menit larutan ke tangki II. Dari tangki II dialirkan 8 L/menit tapi dipecah menjadi 2 aliran yaitu 3 L/menit dikembalikan (di-*recycle*) ke tangki I dan 5 L/menit diambil sebagai hasil.

Tentukan konsentrasi garam pada kedua tangki setelah 30 menit.

lanjutan

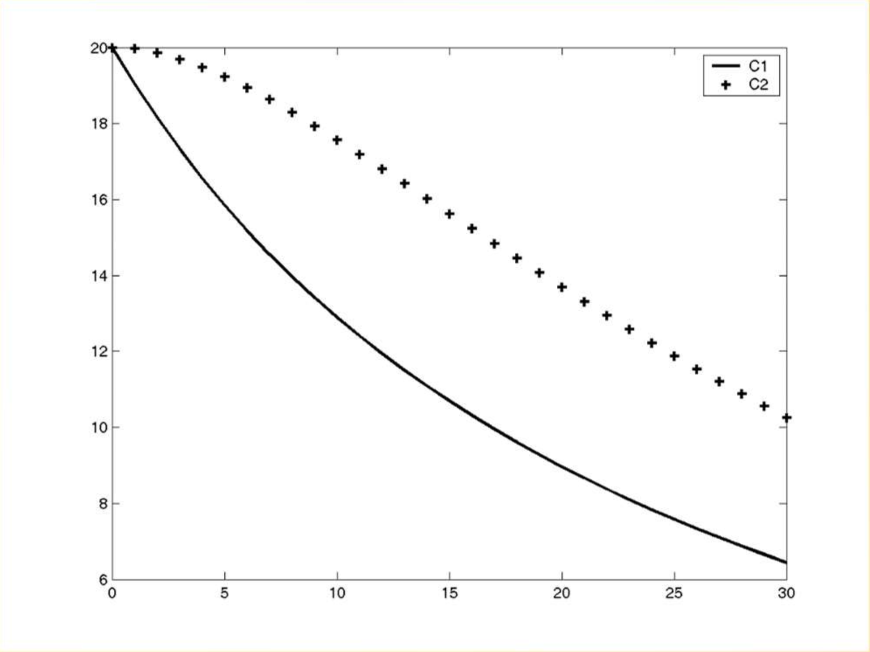


Neraca massa tangki I

dC1/dt = (q0*C0 + qR*C2 - q1*C1)/V1

Neraca massa tangki II

dC2/dt = (q1*C1 - q2*C2)/V2


C1
C2
20
18
16
14
12
10
8
6
0
5
10
15
20
25
30

```
C1o = 20; C2o = 20; Co = [C1o C2o];
to = 0; tn = 30; n = 31; datat = linspace(to,tn,n);
[t,C]= ode45('F74',datat,Co);
 plot(t,C(:,1),'k-',t,C(:,2),'k+','LineWidth',2);
legend('C1','C2')
t = t(n)
C1 = C(n,1)
C2 = C(n,2)
```

Program terkait

```
function dCdt = F74(t,C)
V1 = 100; V2 = 100; q0 = 5; q1 = 8; q2 = 8; qR = 3; qproduk = 5; C0 = 0;
dCdt1 = (q0*C0 + qR*C(2) - q1*C(1))/V1;
dCdt2 = (q1*C(1) - q2*C(2))/V2;
dCdt = [dCdt1
   dCdt2];
```

Soal 4

Dalam sistem yang tertutup, tiga komponen bereaksi dengan langkah sebagai berikut

$$A \xrightarrow{k_1} B$$

$$B + C \xrightarrow{k_2} A + C$$

$$2B \xrightarrow{k_3} C + B$$

mengikuti persamaan differensial berikut :

$$\frac{dC_A}{dt} = -k_1 C_A + k_2 C_B C_C$$

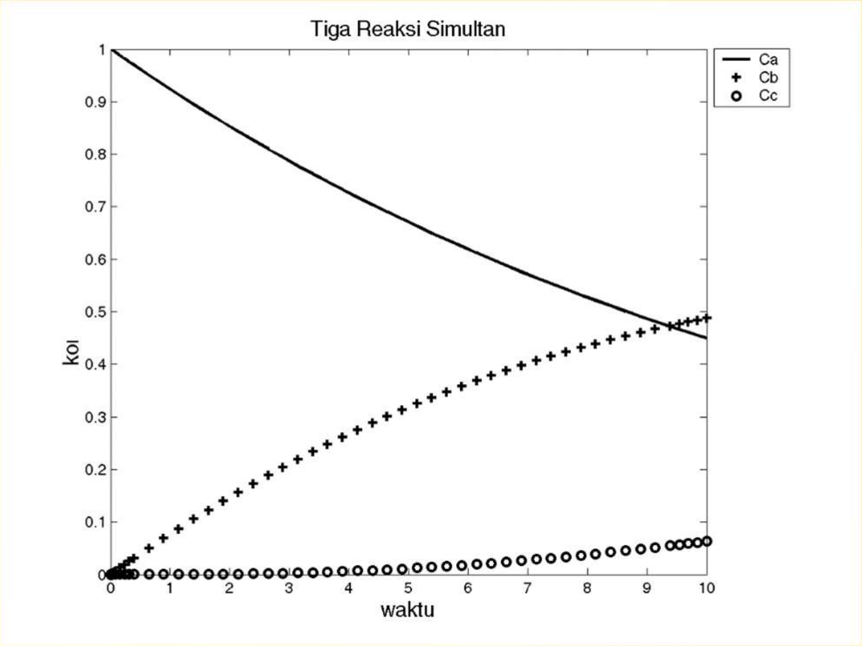
$$\frac{dC_B}{dt} = k_1 C_A - k_2 C_B C_C - k_3 C_B^2$$

$$\frac{dC_C}{dt} = k_3 C_B^2$$

$C_A(0) = 1$, $C_B(0) = C_C(0) = 0$.

Tentukan $C_A(10)$, $C_B(10)$, dan $C_C(10)$, jika $k_1 = 0{,}08$, $k_2 = 2x10^{-4}$, $k_3 = 6x10^{-2}$

08 Ordinary Differensial Equation

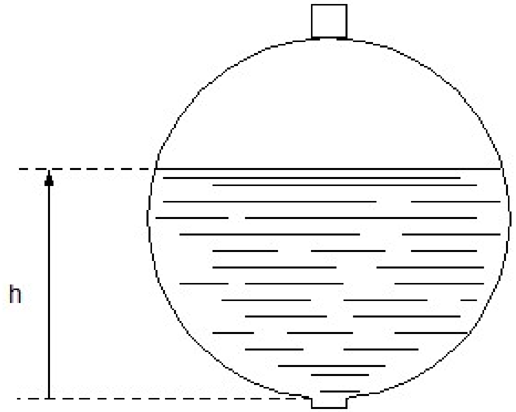


```
clear all
clc
global k1 k2 k3
k1 = 8e-2; k2 = 2e-4; k3 = 6e-2;
Cao = 1.0; Cbo = 0; Cco = 0;
Co = [Cao Cbo Cco];
to = 0; tn = 10; tspan = [to tn];
[t C] = ode45('F76',tspan,Co);
plot(t,C(:,1),'k-',t,C(:,2),'k+',t,C(:,3),'ko','LineWidth',2)
title('Tiga Reaksi Simultan','FontSize',14)
xlabel('waktu','FontSize',14)
ylabel('konsentrasi','FontSize',14)
legend('Ca','Cb','Cc',14)
```

Program terkait

```
function dC_dt=F76(t,C)
global k1 k2 k3
Ca = C(1); Cb = C(2); Cc = C(3);
 dC_dt(1) = -k1*Ca + k2*Cb*Cc;
dC_dt(2) = k1*Ca - k2*Cb*Cc - k3*Cb^2;
dC_dt(3) = k3*Cb^2;
dC_dt=dC_dt';
```

Tangki berisi air berbentuk bola diisi dari suatu lubang pada bagian puncak dan dikeluarkan melalui lubang yang lain pada bagian dasar kolom. Jika jari-jari tangki adalah r, maka volume air dalam tangki dapat dinyatakan sebagai fungsi h (tinggi cairan) sebagai berikut



$$V(h) = \pi r h^2 - \tfrac{1}{3}\pi h^3$$

Laju alir volum melalui lubang (q) merupakan fungsi tinggi cairan (h) dan dinyatakan dengan :

$$q = C_d A \sqrt{2gh}$$

dengan

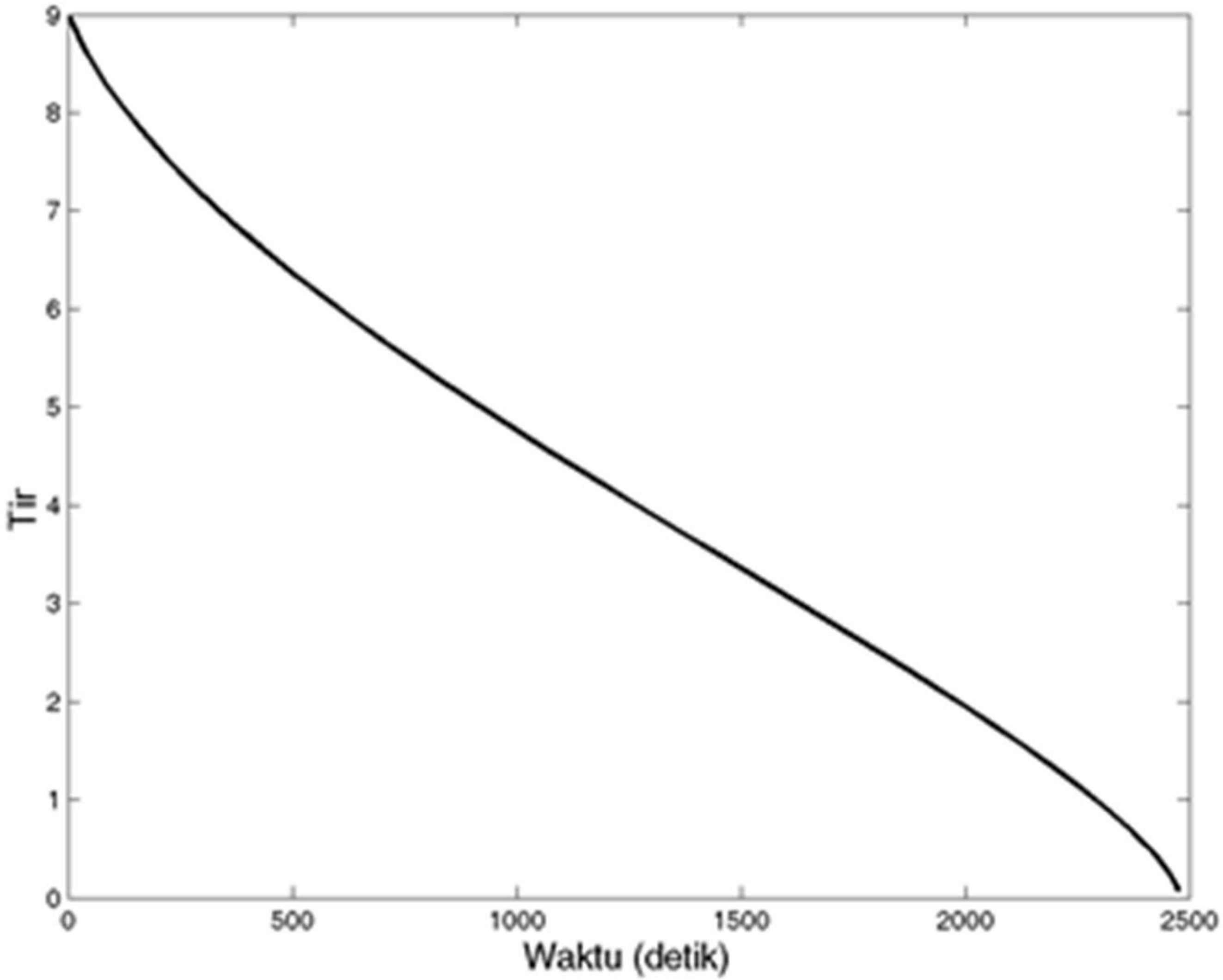
A	=	luas lubang
C_d	=	Konstanta, untuk air 0,6
g	=	gravitasi

Tentukan waktu tangki menjadi kosong jika tinggi cairan mula-mula 9 ft. Tangki mempunyai jari-jari r = 5 ft dan lubang mempunyai diameter 1 in di dasar tangki. Gunakan g = 32,2 ft/second^2.

$$\frac{dV}{dt} = -q$$

$$2\pi r h \frac{dh}{dt} - \pi h^2 \frac{dh}{dt} = - C_d A \sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{C_d A \sqrt{2gh}}{\pi(2rh - h^2)}$$



Tir
Waktu (detik)
0
500
1000
1500
2000
2500
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

```
clear all
ho = 9;             % ft
to = 0;             % menit
tn = 2475;          % menit
tspan = [to tn];
[t,h]=ode45('F79',tspan,ho);
% Plot hasil
plot(t,h,'k-','LineWidth',2)
xlabel('Waktu (detik)','FontSize',14)
ylabel('Tinggi (ft)','FontSize',14)
```

```
function hdot = F79(t,h)
Cd = 0.6;
r = 5;
dhole = 1/12;
A = pi*(dhole)^2;
g = 32.2;
 hdot = -Cd*A*(2*g*h)^0.5/(pi*(2*r*h-h^2));
```

Reaksi dehidrogenasi phase uap benzena dalam reaktor alir tubular

$$2C_6H_6 \rightarrow C_{12}H_{10} + H_2$$

$$C_6H_6 + C_{12}H_{10} \rightarrow C_{18}H_{14} + H_2$$

Kecepatan reaksi

$$r_1 = \frac{dx_1}{d(V/F)} = 14{,}96.10^6 e^{-15200/T}\left(p_B^2 - \frac{p_D p_H}{K_1}\right) \text{lbmol benzena bereaksi/(jam ft}^3\text{)}$$

$$r_2 = \frac{dx_2}{d(V/F)} = 8{,}67.10^6 e^{-15200/T}\left(p_B p_D - \frac{p_T p_H}{K_2}\right) \text{lbmol triphenil terbentuk//(jam ft}^3\text{)}$$

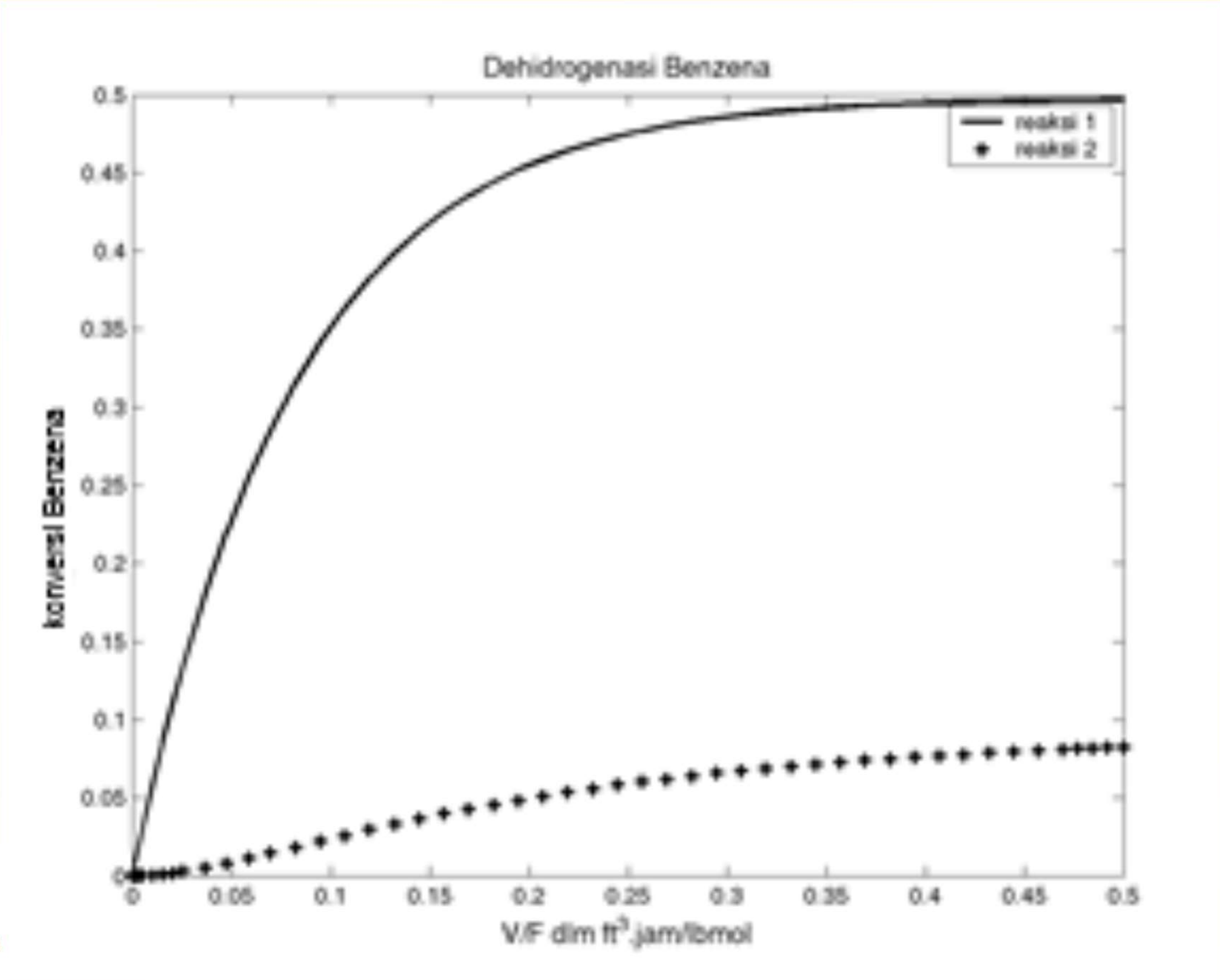
p_B = tekanan parsial benzena, atm
p_D = tekanan parsial diphenil, atm
p_T = tekanan parsial triphenil, atm
p_H = tekanan parsial hidrogen, atm
x_1 = konversi pada reaksi 1
x_2 = konversi pada reaksi 2
T = temperatur, 1033 K
V = volume reaktor, ft^3
F = laju alir bahan, lbmol/jam
P = tekanan total, 1 atm
$K_1 = 0{,}312$
$K_2 = 0{,}480$

Jika umpan terdiri dari benzena murni 1 lbmol/ft^3 buktikan bahwa

$$\frac{dx_1}{d(V/F)} = 6{,}089\left[(1 - x_1 - x_2)^2 - \frac{\left(\frac{1}{2}x_1 - x_2\right)\left(\frac{1}{2}x_1 + x_2\right)}{0{,}312}\right]$$

$$\frac{dx_2}{d(V/F)} = 3{,}529\left[(1 - x_1 - x_2)\left(\frac{1}{2}x_1 - x_2\right) - \frac{x_2\left(\frac{1}{2}x_1 + x_2\right)}{0{,}480}\right]$$

Tentukan x_1 dan x_2 pada (V/F) = 0,5 ft^3jam/lbmol !


Dehidrogenasi Benzena
reaksi 1
reaksi 2
konversi Benzena
V/F dlm ft3.jam/lbmol
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0

```
global T K1 K2
T = 1033;
K1 = 0.312; K2 = 0.480;
x1o = 0; x2o = 0;
xo = [x1o x2o];
V_Fo = 0; V_Ff = 0.5;
V_Fspan = [V_Fo V_Ff];
[V_F,x]=ode45('F711',V_Fspan,xo);
plot(V_F,x(:,1),'k-',V_F,x(:,2),'k+','Linewidth',2)
title('Dehidrogenasi Benzena','FontSize',12)
xlabel('V/F dlm ft^3.jam/lbmol','FontSize',12)
ylabel('konversi Benzena','FontSize',12)
legend('reaksi 1', 'reaksi 2')
disp(['Pada V/F ',num2str(V_F(end))])
konversi = x(end,:)
```

```
function dx_dVF = F711(V_F,x)
global T K1 K2
dx_dVF(1) = 14.96*10^6*exp(-15200/T)*((1-x(1)-x(2))^2-...
   (0.5*x(1)-x(2))*(0.5*x(1)+x(2))/K1);
dx_dVF(2) = 8.67*10^6*exp(-15200/T)*((1-x(1)-x(2))*...
   (0.5*x(1)-x(2))-x(2)*(0.5*x(1)+x(2))/K2);
dx_dVF=dx_dVF';
```

Example 5.2: Solution of a Chemical Reaction System. Develop a general MATLAB function to solve the set of linear differential equations. Apply this function to determine the concentration profiles of all components of the following chemical reaction system:

$$A \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} B \underset{k_4}{\overset{k_3}{\rightleftharpoons}} C$$

Assume that all steps are first-order reactions and write the set of linear ordinary differential equations that describe the kinetics of these reactions. Solve the problem numerically for the following values of the kinetic rate constants:

$$k_1 = 1 \text{ min}^{-1} \qquad k_2 = 0 \text{ min}^{-1} \qquad k_3 = 2 \text{ min}^{-1} \qquad k_4 = 3 \text{ min}^{-1}$$

The value of $k_2 = 0$ reveals that the first reaction is irreversible in this special case. The initial concentrations of the three components are

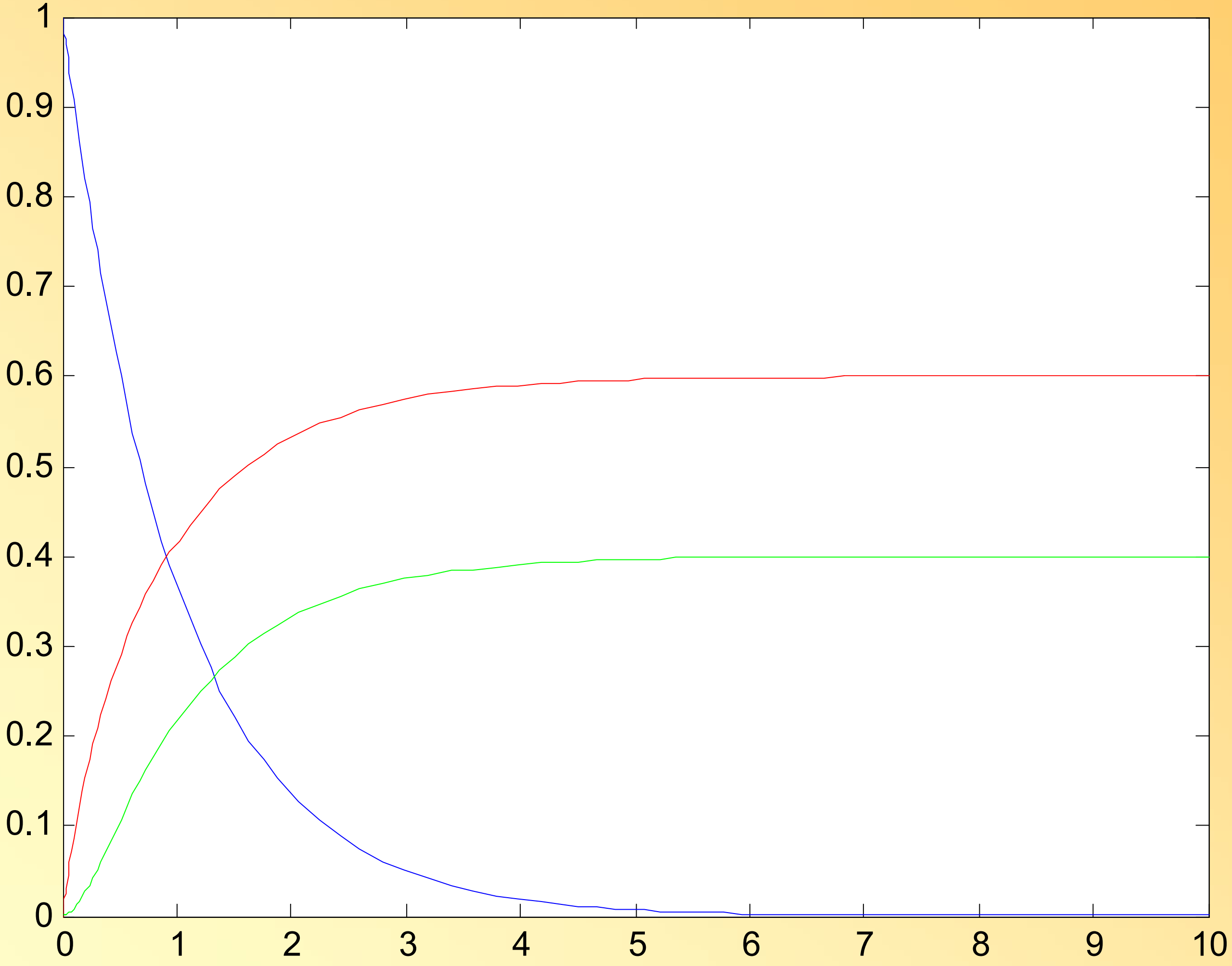
$$C_{A_0} = 1 \qquad C_{B_0} = 0 \qquad C_{C_0} = 0$$

Plot the graph of concentrations versus time.

$$\frac{dC_A}{dt} = -k_1 C_A + k_2 C_B$$

$$\frac{dC_B}{dt} = k_1 C_A - k_2 C_B - k_3 C_B + k_4 C_C$$

$$\frac{dC_C}{dt} = k_3 C_B - k_4 C_C$$


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

22.18 The reaction $A \rightarrow B$ takes place in two reactors in series. The reactors are well mixed but are not at steady state. The unsteady-state mass balance for each stirred tank reactor is shown below:

$$\frac{dCA_1}{dt} = \frac{1}{\tau}(CA_0 - CA_1) - kCA_1$$

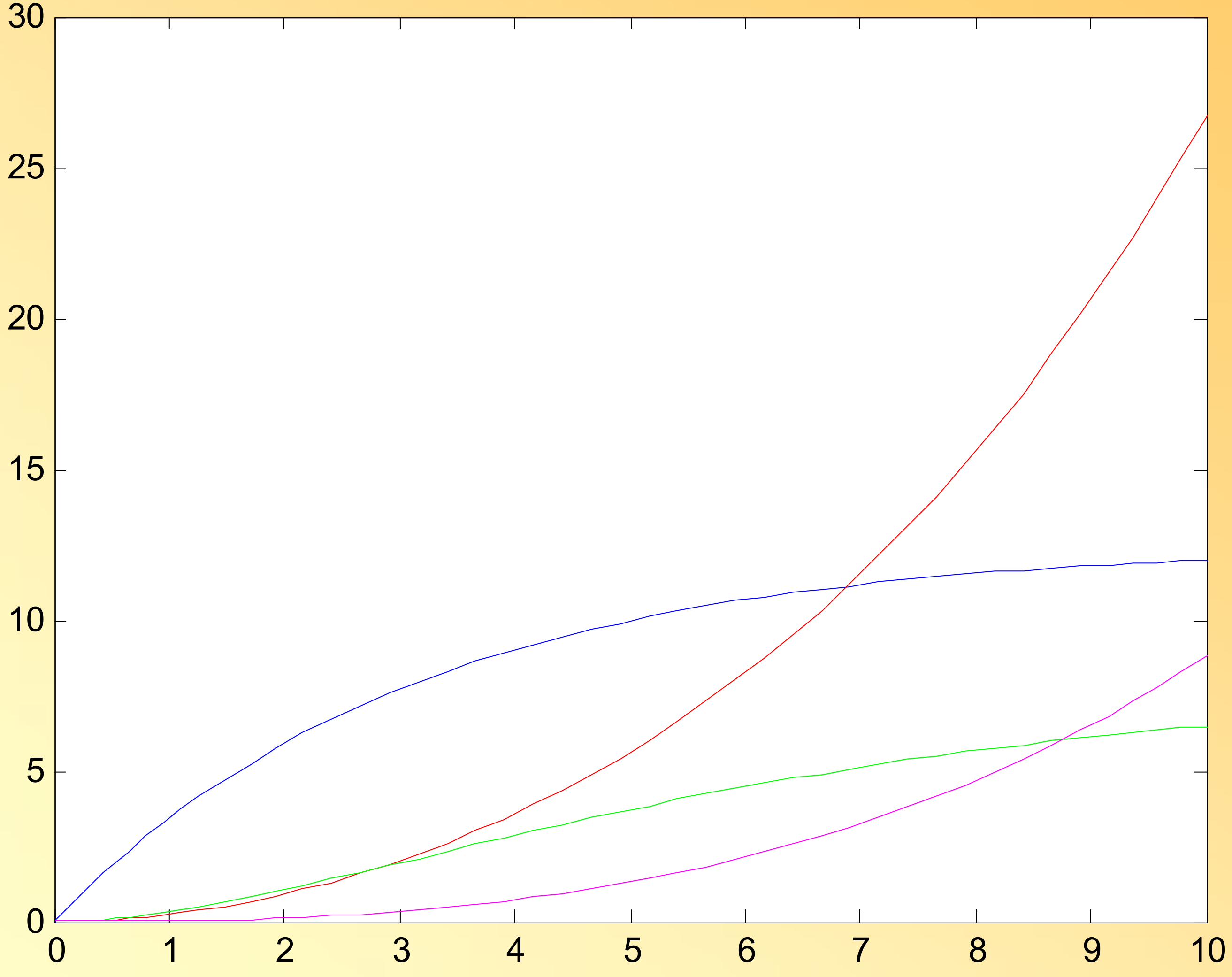
$$\frac{dCB_1}{dt} = \frac{1}{\tau}CB_1 + kCA_1$$

$$\frac{dCA_2}{dt} = \frac{1}{\tau}(CA_1 - CA_2) - kCA_2$$

$$\frac{dCB_2}{dt} = \frac{1}{\tau}(CB_1 - CB_2) - kCB_2$$

where CA_0 = concentration of A at the inlet of the first reactor, CA_1 = concentration of A at the outlet of the first reactor (and inlet of the second), CA_2 = concentration of A at the outlet of the second reactor, CB_1 = concentration of B at the outlet of the first reactor (and inlet of the second), CB_2 = concentration of B in the second reactor, τ = residence time for each reactor, and k = the rate constant for reaction of A to produce B. If CA_0 is equal to 20, find the concentrations of A and B in both reactors during their first 10 minutes of operation. Use $k = 0.12$/min and $\tau = 5$ min and assume that the initial conditions of all the dependent variables are zero.

08 Ordinary Differensial Equation



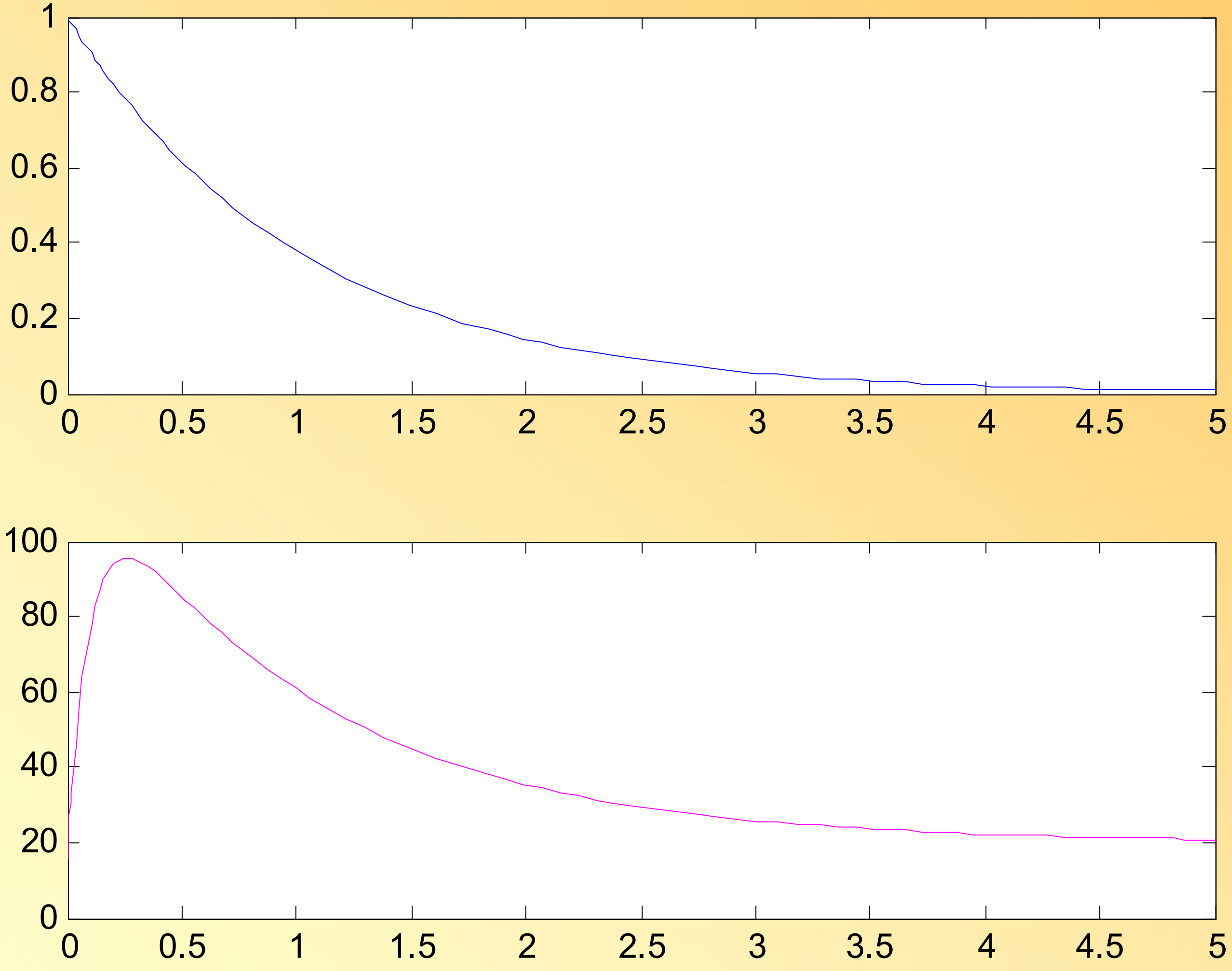
22.19 A nonisothermal batch reactor can be described by the following equations:

$$\frac{dC}{dt} = -e^{(-10/(T+273))}C$$

$$\frac{dT}{dt} = 1000e^{(-10/(T+273))}C - 10(T - 20)$$

where C is the concentration of the reactant and T is the temperature of the reactor. Initially, the reactor is at 16 °C and has a concentration of reactant C of 1.0 gmol/L. Find the concentration and temperature of the reactor as a function of time.

08 Ordinary Differensial Equation



The irreversible chemical reaction in which two molecules of solid potassium dichromate ($K_2Cr_2O_7$), two molecules of water (H_2O), and three atoms of solid sulfur (S) combine to yield three molecules of the gas sulfur dioxide (SO_2), four molecules of solid potassium hydroxide (KOH), and two molecules of solid chromic oxide (Cr_2O_3) can be represented symbolically by the *stoichiometric equation*:

$$2K_2Cr_2O_7 + 2H_2O + 3S \longrightarrow 4KOH + 2Cr_2O_3 + 3SO_2.$$

If n_1 molecules of $K_2Cr_2O_7$, n_2 molecules of H_2O, and n_3 molecules of S are originally available, the following differential equation describes the amount $x(t)$ of KOH after time t:

$$\frac{dx}{dt} = k\left(n_1 - \frac{x}{2}\right)^2 \left(n_2 - \frac{x}{2}\right)^2 \left(n_3 - \frac{3x}{4}\right)^3,$$

where k is the velocity constant of the reaction. If $k = 6.22 \times 10^{-19}$, $n_1 = n_2 = 2 \times 10^3$, and $n_3 = 3 \times 10^3$, determine how many units of potassium hydroxide will have been formed after 0.2 s?

MASALAH NILAI BATAS (BOUNDARY VALUE PROBLEM)

- Dalam persamaan differensial orde lebih dari satu, dibutuhkan nilai-nilai yang sudah diketahui untuk dapat mengevaluasi konstanta-konstanta dalam fungsi partikular. Beberapa nilai dispesifikasikan pada nilai variabel bebas yang sama yang biasanya merupakan nilai awal.
- Tetapi beberapa persoalan kadang nilai variabel bebas yang diketahui tidak pada nilai yang sama, karena nilai-nilai variabel bebas yang diketahui biasanya pada kondisi batas (*boundary condition*). Persoalan seperti ini disebut masalah nilai batas.

METODE *SHOOTING*

Metode *shooting* dapat diilustrasikan seperti sebuah meriam yang menembakkan pelurunya.

Meriam tersebut harus mempunyai sudut tertentu agar peluru bisa mengenai sasarannya.

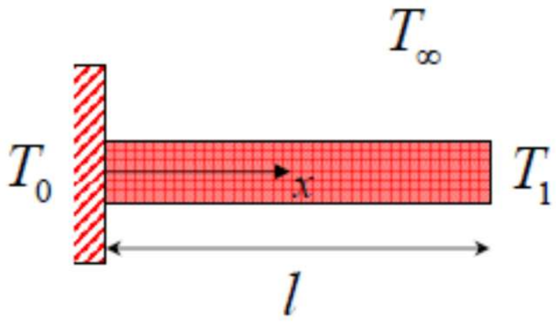
Dalam penyelesaian persamaan differensial, sebuah nilai yang kritikal (biasanya *slope*) ditentukan nilainya.

Nilai awal yang telah diketahui dan nilai *slope* yang ditebak menyebabkan kita dapat menghitung titik-titik selanjutnya dengan metode-metode yang telah diberikan sebelumnya (metode Euler, Runge-Kutta, dan lain-lain).

Pada akhir perhitungan akan dibandingkan dengan nilai yang sudah diketahui. Jika ternyata nilai akhir hasil perhitungan tersebut telah sama dengan nilai yang diketahui maka nilai *slope* tebakan telah tepat. Tetapi jika nilai akhir hasil perhitungan berbeda dengan nilai yang diketahui maka harus ditentukan nilai *slope* yang baru.

contoh

Shooting Method – Basic Method - Cooling fin Example



$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA}\left(T - T_\infty\right) = 0$$

$$T\left(x = 0\right) = T_0$$

$$T\left(x = L\right) = T_1$$

1. Rewrite as two first order ODEs

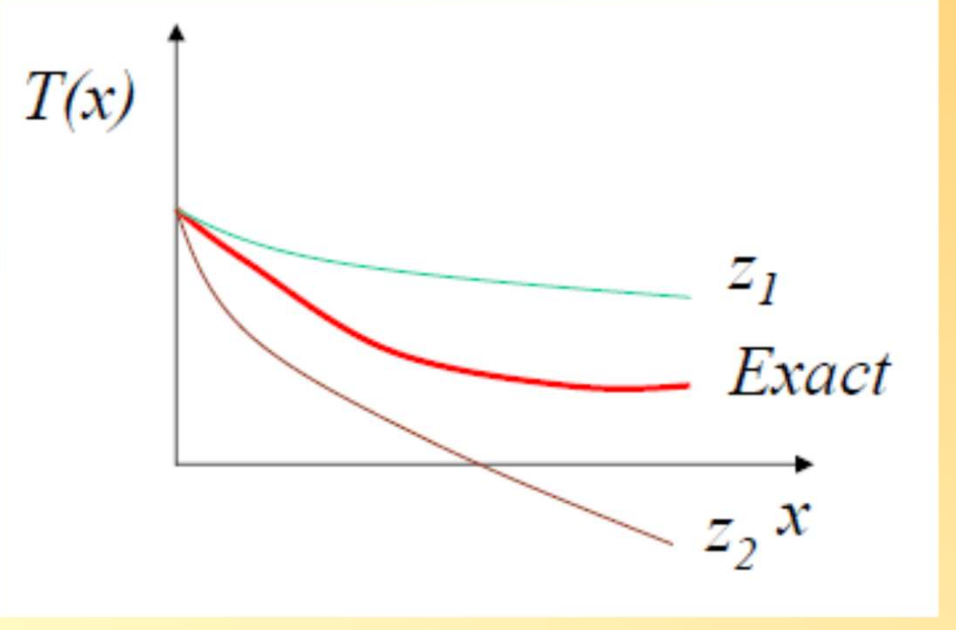
$$\frac{dT}{dx} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{hP}{kA}\left(T - T_{\infty}\right)$$

2. We need an initial value for z, Guess:

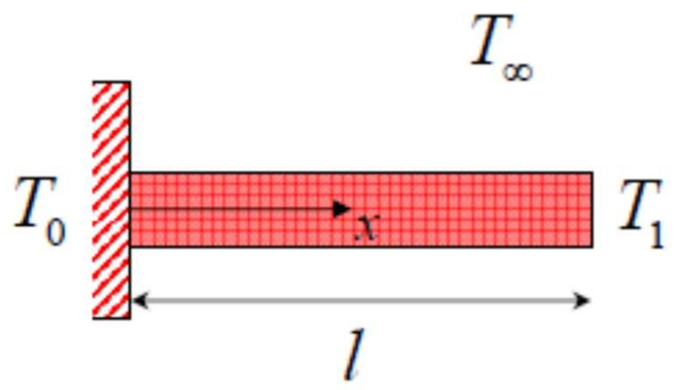
$$T(x = 0) = T_0$$

$$z(x = 0) = z_1$$



T(x)
z1
Exact
z2
x

1 =2.5



$$T_\infty = 0$$

$$T_0 = 200$$

$$T_1 = 100$$

$$m^2 = \frac{hP}{kA} = 0.1$$

Recast the problem:

$$T = y_1$$

$$\frac{dT}{dx} = y_2$$

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2$$

$$\frac{dy_2}{dx} = m^2 \left(y_1 - T_\infty \right)$$

$$y_1 (x = 0) = T_0 = 200$$

$$y_2 (x = 0) = G_1$$

METODE FINITE DIFFERENCE

Metode beda hingga (finite difference) sebenarnya adalah mengubah persamaan differensial ordiner menjadi sekumpulan persamaan aljabar, dengan suatu persamaan neraca untuk tiap titik atau volum terbatas dalam suatu sistem.

Teknik umum yang digunakan adalah dengan menempatkan derivatif dalam persamaan differensial ordiner dengan pendekatan beda hingga dalam suatu jaringan titik.

Pendekatan beda hingga

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \qquad \text{(forward)}$$

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \qquad \text{(backward)}$$

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} \qquad \text{(central)}$$

secara teoritis metode *central* lebih baik.

Untuk turunan kedua dengan metode *central*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \approx \frac{\dfrac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} - \dfrac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Tugas

Suatu batang silinder menghubungkan 2 dinding yang suhunya 400 ^{O}C dan 100 ^{O}C. Panjang silinder L = 10 cm dan diameter D = 1,2 cm. Sifat-sifat fisis batang silinder asumsikan konstan yaitu k = 0,2 kal/(det.cm ^{O}C) dan h = 0,00155 kal/(det cm^2 ^{O}C).

Suhu udara luar, Tu = 30 ^{O}C. Asumsikan aliran hanya pada arah aksial saja.Buktikan bahwa

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{4h}{kD}\left(T - T_U\right) = 0$$

Tentukan distribusi suhu di dalam batang silinder dengan Δx = 2,5 cm.

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} + h'(T_\infty - T_i) = 0$$

$$-T_{i-1} + (2 + h'\Delta x^2)T_i - T_{i+1} = h'\Delta x^2 T_\infty$$

Fluida masuk pada koil pendingin sepanjang 10 m pada suhu 200 ^{0}C dan diinginkan keluar pada suhu 40 ^{0}C. Sebagai media pendingin digunakan air pada suhu 20 ^{0}C. Neraca panas proses adalah :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0{,}01(T - T_{pendingin})$$

Tentukan distribusi suhu fluida, pada jarak 2,5 m, 5 m, dan 7,5 m !

Tentukan distribusi temperatur fluida pada 1 m, 2 m, 3 m, smp 9 m, dan 10 m

Fluida masuk pada koil pendingin sepanjang 10 m pada suhu 200 ^{0}C dan diinginkan keluar pada suhu 40 ^{0}C. Sebagai media pendingin digunakan air pada suhu 20 ^{0}C. Neraca panas proses adalah :

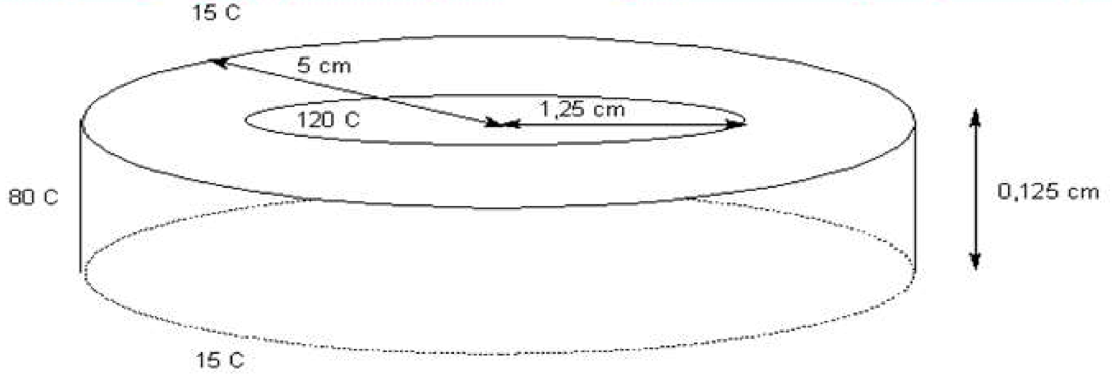
$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0{,}01(T - T_{pendingin})$$

Dua silinder berdiameter 2,5 cm dan 10 cm mempunyai ketebalan 0,125 cm. Didalamnya terdapat bahan dengan suhu 120 ^{O}C. Jika konduktivitas logam adalah k=40 W/m ^{O}C dan pada permukaan luas sisi tutup dan dasar panas hilang ke lingkungan dengan suhu 15 ^{O}C, serta koefisien transfer panas h=12 W/m^2 ^{O}C.

Buktikan :

$$kr\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + k\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{hr(T - T_u)}{L} = 0$$

Tentukan distribusi suhu di pipa sepanjang arah radial, jika permukaan luas silinder mempunyai suhu 80 ^{O}C.



Sebuah fin berbentuk lingkaran tipis digunakan untuk memindahkan panas.