BARISAN

A. Barisan Rekursif

Barisan adalah fungsi *f* yang didefinisikan untuk setiap bilangan bulat nonnegatif *n*, dan dinotasikan dengan (a_n). Barisan rekursif (berulang) adalah barisan (a_n) yang suku berikutnya dinyatakan sebagai fungsi dari satu atau lebih suku-suku sebelumnya dari barisan tersebut. Untuk menyelesaikan barisan rekursif (berulang), salah satu caranya dapat ditempuh dengan menentukan terlebih dahulu persamaan karakteristik, yang diuraikan sebagai berikut.

Pada umumnya barisan dinotasikan dengan $x_n = f(n)$, tetapi sering juga barisan dituliskan dalam bentuk persamaan:

$$x_n = F(x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, \cdots).$$

Persamaan di atas sering disebut dengan persamaan fungsional. Persamaan fungsional yang berbentuk

$$x_n = px_{n-1} + qx_{n-2} \quad (q \neq 0), \tag{1}$$

disebut persamaan selisih linear orde 2.

Untuk mencari penyelesaian umum dari persamaan (1), pertama dimisalkan $x_n = \lambda^n$ untuk suatu bilangan λ. Selanjutnya untuk mencari nilai λ, substitusikan $x_n = \lambda^n$ ke dalam persamaan (1) dan diperoleh:

$$\begin{aligned} \lambda^n &= p\lambda^{n-1} + q\lambda^{n-2} \\ \lambda^2 &= p\lambda + q \\ \lambda^2 - p\lambda - q &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Persamaan (2) disebut persamaan karakteristik untuk persamaan (1). Untuk akar-akar yang berbeda λ_1 dan λ_2 diperoleh penyelesaian umum:

$$x_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n,$$

dengan a dan b dapat dicari dari nilai-nilai awal x_0 dan x_1. Jika $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, penyelesaian umum persamaan (1) adalah

$$x_n = (a + b)\lambda^n.$$

Contoh 1

Barisan x_n diberikan oleh $x_0 = 2$, $x_1 = 7$ dan $x_{n+1} = 7x_n - 12x_{n-1}$. Tentukan ekspresi untuk x_n.

Pembahasan:

Misalkan $x_n = \lambda^n$ untuk suatu bilangan λ. Selanjutnya untuk mencari nilai λ, substitusikan $x_n = \lambda^n$ ke dalam persamaan $x_{n+1} = 7x_n - 12x_{n-1}$ dan diperoleh:

$$\lambda^{n+1} = 7\lambda^n - 12\lambda^{n-1}$$

$$\lambda^2 = 7\lambda - 12\lambda$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12\lambda = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0$$

diperoleh penyelesaian $\lambda_1 = 3$, dan $\lambda_2 = 4$. Penyelesaian umum barisan di atas yaitu:

$$x_n = a.3^n + b.4^n.$$

Untuk $x_0 = 2$, diperoleh $2 = a.3^0 + b.4^0$ atau $a + b = 2$.

Untuk $x_1 = 7$, diperoleh $7 = a.3^1 + b.4^1$ atau $3a + 4b = 7$.

Selanjutnya diperoleh:

$$\begin{array}{r|c|r} 3a + 4b = 7 & \times 1 & 3a + 4b = 7 \\ a + b = 2 & \times 3 & 3a + 3b = 6 \\ \hline & & b = 1 \end{array}$$

Akibatnya diperoleh $a = 1$.

Jadi diperoleh ekspresi untuk x_n yaitu $x_n = 3^n + 4^n$.

Contoh 2

Barisan (a_n) didefinisikan dengan $a_0 = a$, $a_1 = b$, dan $a_{n+2} = (a_{n+1} + a_n)/2$. Tunjukkan bahwa barisan (a_n) konvergen dan tentukan limit barisan (a_n).

Pembahasan:

Misalkan $a_n = \lambda^n$ untuk suatu bilangan λ. Selanjutnya untuk mencari nilai λ, substitusikan $a_n = \lambda^n$ ke dalam persamaan $a_{n+2} = (a_{n+1} + a_n)/2$ dan diperoleh:

$$\lambda^{n+2} = \frac{\lambda^{n+1} + \lambda^n}{2}$$

$$2\lambda^2 = \lambda + 1$$

$$2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$
$$(2\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$$

diperoleh penyelesaian $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, dan $\lambda_2 = 1$. Penyelesaian umum barisan di atas yaitu:

$$a_n = p.\left(-\frac{1}{2}\right)^n + q.$$

Untuk $a_0 = a$, diperoleh $a = p + q$ atau $p + q = a$.

Untuk $a_1 = b$, diperoleh $b = -\frac{p}{2} + q$ atau $-p + 2q = 2b$.

Selanjutnya diperoleh:

$$\begin{array}{r} p + q = a \\ -p + 2q = 2b \\ \hline 3q = a + 2b \end{array} +$$

Akibatnya diperoleh $q = \frac{a+2b}{3}$ dan

$$p + \frac{a + 2b}{3} = a$$
$$p + \frac{a + 2b}{3} = \frac{3a}{3}$$
$$p = \frac{3a}{3} - \frac{a + 2b}{3}$$
$$p = \frac{3a - a - 2b}{3}$$
$$p = \frac{2a - 2b}{3} = \frac{2}{3}(a - b)$$

Jadi diperoleh ekspresi untuk a_n yaitu

$$a_n = p\lambda_1^n + q\lambda_2^n$$
$$a_n = \frac{2}{3}(a - b)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{a + 2b}{3}$$

Akibatnya diperoleh:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}(a - b)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{a + 2b}{3}\right) = \frac{a + 2b}{3}.$$

B. Barisan Monoton

Definisi 1

a). Barisan (a_n) dikatakan naik (tidak turun) jika berlaku $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$.

b). Barisan (a_n) dikatakan turun (tidak naik) jika berlaku $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$.

Barisan (a_n) dikatakan monoton jika (a_n) naik atau turun.

Teorema 1

Jika barisan (a_n) naik dan terbatas di atas, maka barisan (a_n) konvergen.

Teorema 2

Jika barisan (a_n) turun dan terbatas di bawah, maka barisan (a_n) konvergen.

Contoh 3

Barisan (a_n) didefinisikan dengan $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$. Tunjukkan bahwa barisan (a_n), a). naik monoton, b). terbatas di atas oleh 3, dan c). tentukan limit barisan (a_n).

Pembahasan:

a). Dibuktikan dengan Prinsip Induksi Matematika (PIM) sebagai berikut:

1). Untuk $n = 0$ diperoleh

$$a_0 = 0 < \sqrt{6} = \sqrt{6+0} = \sqrt{6 + a_0} = a_1.$$

Hal ini berarti benar untuk $n = 0$.

2). Diasumsikan benar untuk $n = k$, yaitu berlaku $a_{k+1} < a_{k+2}$.

Akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$, sebagai berikut:

$$a_{k+1} < a_{k+2}$$

$$a_{k+1} + 6 < a_{k+2} + 6$$

$$a_{(k+1)+1} = \sqrt{a_{k+1} + 6} < \sqrt{a_{k+2} + 6} = a_{(k+2)+1}$$

Hal ini berarti benar untuk $n = k + 1$.

Berdasarkan PIM disimpulkan barisan (a_n) naik monoton.

b). Dibuktikan dengan Prinsip Induksi Matematika (PIM) sebagai berikut:

1). Untuk $n = 0$ diperoleh

$$a_0 = 0 < 3.$$

Hal ini berarti benar untuk $n = 0$.

2). Diasumsikan benar untuk $n = k$, yaitu berlaku $a_{k+1} < 3$.

Akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$, sebagai berikut:

$$a_{k+1} < 3$$

$$a_{k+1} + 6 < 3 + 6$$

$$a_{(k+1)+1} = \sqrt{a_{k+1} + 6} < \sqrt{9} = 3.$$

Hal ini berarti benar untuk $n = k + 1$.

Berdasarkan PIM disimpulkan barisan (a_n) terbatas di atas oleh 3.

c). Berdasarkan a) dan b) diperoleh bahwa barisan barisan (a_n) naik monoton dan terbatas di atas oleh 3, oleh karena itu berdasarkan Teorema Barisan Monoton disimpulkan bahwa barisan (a_n) konvergen, dan misal $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Lebih lanjut diperoleh:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6 + a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{6 + \lim_{n\to\infty} a_n}$$

$$a = \sqrt{6 + a}$$

$$a^2 - a - 6 = 0$$

$$(a - 3)(a + 2) = 0$$

Diperoleh $a = 3$ atau $a = -2$, tetapi $a = -2$ tidak memenuhi sebaab barisan $a_n \geq 0$ untuk semua *n*. Dengan demikian disimpulkan $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$.

Contoh 4

Barisan (a_n) didefinisikan dengan $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{4 + 3a_n}$. Tunjukkan bahwa barisan (a_n), a). naik monoton, b). terbatas di atas oleh 4, dan c). tentukan limit barisan (a_n).

Pembahasan:

a). Dibuktikan dengan Prinsip Induksi Matematika (PIM) sebagai berikut:

1). Untuk $n = 0$ diperoleh

$$a_0 = 0 < \sqrt{4} = \sqrt{4 + 0} = \sqrt{4 + 3a_0} = a_1.$$

Hal ini berarti benar untuk $n = 0$.

2). Diasumsikan benar untuk $n = k$, yaitu berlaku $a_{k+1} < a_{k+2}$.

Akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$, sebagai berikut:

$$a_{k+1} < a_{k+2}$$

$$4 + 3a_{k+1} < 4 + 3a_{k+2}$$

$$a_{(k+1)+1} = \sqrt{4 + 3a_{k+1}} < \sqrt{4 + 3a_{k+2}} = a_{(k+2)+1}$$

Hal ini berarti benar untuk $n = k + 1$.

Berdasarkan PIM disimpulkan barisan (a_n) naik monoton.

b). Dibuktikan dengan Prinsip Induksi Matematika (PIM) sebagai berikut:

1). Untuk $n = 0$ diperoleh

$$a_0 = 0 < 4.$$

Hal ini berarti benar untuk $n = 0$.

2). Diasumsikan benar untuk $n = k$, yaitu berlaku $a_{k+1} < 4$.

Akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$, sebagai berikut:

$$a_{k+1} < 4$$

$$4 + 3a_{k+1} < 4 + 3 \cdot 4$$

$$a_{(k+1)+1} = \sqrt{4 + 3a_{k+1}} < \sqrt{16} = 4.$$

Hal ini berarti benar untuk $n = k + 1$.

Berdasarkan PIM disimpulkan barisan (a_n) terbatas di atas oleh 4.

c). Berdasarkan a) dan b) diperoleh bahwa barisan barisan (a_n) naik monoton dan terbatas di atas oleh 4, oleh karena itu berdasarkan Teorema Barisan Monoton disimpulkan bahwa barisan (a_n) konvergen, dan misal $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Lebih lanjut diperoleh:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{4 + 3a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{4 + \lim_{n\to\infty} 3a_n}$$

$$a = \sqrt{4 + 3a}$$

$$a^2 - 3a - 4 = 0$$

$$(a - 4)(a + 1) = 0$$

Diperoleh $a = 4$ atau $a = -1$, tetapi $a = -1$ tidak memenuhi sebaab barisan $a_n \geq 0$ untuk semua n. Dengan demikian disimpulkan $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$.

Latihan 1

1. Tentukan penyelesaian dari barisan rekursif berikut:
   a. $a_n = 5a_{n-1} + 3$
   b. $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$
2. Diketahui barisan bilangan positif dengan $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ dengan
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$
   dengan $n > 1$. Jika $a_7 = 120$, carilah a_8.
3. Diketahui barisan $a_1 = 6$, $a_2 = 9$ dan $a_n = 3a_{n-1} + 18a_{n-2}$.
   a. Carilah a_n, dinyatakan dalam *n*.
   b. Jika $b_n = a_n + 3a_{n-1}$, tunjukkan bahwa $b_n = 6b_{n-1}$.
   c. Carilah b_n, dinyatakan dalam *n*.
4. Diketahui fungsi $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dengan sifat
   a. $f(1) = 1$.
   b. $f(1) + 2f(2) + 3f(3) + \cdots + nf(n) = n(n+1)f(n)$

   Carilah $f(2003)$.

C. Barisan dan Deret Umum

Perlu diperhatikan bahwa pada umumnya barisan dan deret bilangan yang tidak berbentuk barisan/deret aritmatika maupun barisan/deret geometri. Untuk menyelesaikan barisan/deret tersebut diperlukan strategi khusus yang melibatkan operasi dan manipulasi aljabar yang khusus pula.

Contoh 5

Tentukan nilai dari
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

Pembahasan:

Deret bilangan tersebut tidak berbentuk deret aritmatika maupun deret geometri. Untuk menyelesaikan deret tersebut diperlukan strategi khusus sebagi berikut. Perlu diperhatikan bahwa

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \sqrt{2}-1.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

dan seterusnya, sehingga diperoleh:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

$$= \sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{100}-\sqrt{99}$$

$$= \sqrt{100}-1 = 10-1 = 9.$$

Contoh 6

Tentukan nilai x yang memenuhi:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots+\frac{1}{2450}=\frac{x}{100}.$$

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots+\frac{1}{2450}=\frac{x}{100}.$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{49\cdot 50}=\frac{x}{100}.$$

Kemudian gunakan aturan

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

diperoleh

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\quad \frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\quad \frac{1}{4\cdot 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\cdots,\quad \frac{1}{49\cdot 50}=\frac{1}{49}-\frac{1}{50}.$$

Akibatnya diperoleh

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{49\cdot 50}=\frac{x}{100}.$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{49}-\frac{1}{50}=\frac{x}{100}.$$

$$1-\frac{1}{50}=\frac{x}{100}.$$

$$\frac{49}{50} = \frac{x}{100}.$$
$$x = 98.$$

Jadi diperoleh $x = 98$.

Latihan Soal Barisan/Deret.

1. Sebuah fungsi f didefinisikan pada bilangan bulat yang memenuhi $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$ dan $f(1) = 1996$ untuk semua $n > 1$. Hitunglah nilai $f(1996)$.
2. Tentukan nilai dari
$$\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 12 + \cdots + n \cdot 2n \cdot 4n}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \cdots + n \cdot 3n \cdot 9n}\right)^{1/3}$$
3. Misalkan $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$. Tentukan jumlah
$$f\left(\frac{1}{1996}\right) + f\left(\frac{2}{1996}\right) + f\left(\frac{3}{1996}\right) + \cdots f\left(\frac{1995}{1996}\right).$$
4. Buktikan bahwa $\frac{1}{1999} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}$.
5. Jika $a_n = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \frac{4^3 - 1}{4^3 + 1} \cdots \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$, tentukan $\lim_{n \to \infty} a_n$.