Jawab :

di $x = 0$:

1. $f(0) = 2$
2. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x+2) = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(2ax+b) = b$

Agar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ada, haruslah :

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

$b = 2$

di $x = 1$:

1. $f(1) = -1$
2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2ax+b)$

$= 2a+2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1$

Agar $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ada, haruslah :

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$2a+2 = -1$

$a = -\frac{3}{2}$

Hasil Bagi Differensi

Hasil bagi differensi dari $y = f(x)$ kalau x berubah dari x_1 ke x_2 adalah

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Contoh

Jika $y = f(x) = 3x^2 - 4x + 6$ dan kita ingin menghitung besarnya perubahan rata-rata harga y kalau x berubah dari 3 menjadi 5, maka kita hitung dulu :

$y_1 = f(3) = 27 - 12 + 6 = 21$ dan

$y_2 = f(5) = 75 - 20 + 6 = 61$,

sehingga besarnya perubahan rata-rata :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{61-21}{5-3} = 20$$

Ini berarti mulai dari 3 sampai dengan 5, harga y naik rata-rata sebesar 20 unit.

Definisi Turunan

Turunan fungsi f adalah fungsi yang diperoleh melalui proses limit berikut :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Hasil ini disebut turunan pertama $y = f(x)$ (jika limitnya ada)

Notasi yang sering digunakan:

$f'(x)$ atau y', $\frac{df}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx}$, $D_x(f)$

Rumus-rumus Turunan

Fungsi	Turunannya
$y = c$	$y' = 0$
$y = ax + b$	$y' = a$
$y = x^n$	$y' = n\,x^{n-1}$
$y = U + V$	$y' = U' + V'$
$y = UV$	$y' = U'V + UV'$
$y = U/V$	$y' = (U'V - UV')/V^2$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^u$	$y' = e^u\,u'$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \ln x$	$y' = 1/x$
$y = \ln U$	$y' = U'/U$
$y = {}^a\log x$	$y' = 1/(x \ln a)$

Turunan fungsi bentuk Parameter & Fungsi Implisit

Fungsi bentuk Parameter : $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

maka $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy\ /\ dt}{dx\ /\ dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$

Fungsi Implisit : $F(x, y) = c$

maka $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$

Dimana F_x adalah turunan parsial $F(x,y)$ ke x dan F_y adalah turunan parsial $F(x,y)$ ke y

Turunan kedua dan seterusnya

Jika turunan pertama $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$

maka turunan kedua $y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$

dan seterusnya untuk turunan ketiga, keempat,…

Contoh : $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 10$, maka

$y' = 3x^2 - 12x + 5$

$y'' = 6x - 12$

$y^{(3)} = 6$

$y^{(4)} = 0$

Matematika Ekonomi

Aplikasi Turunan Fungsi

2

Aplikasi Turunan pertama fungsi

1. Menghitung gradien garis singgung
2. Menentukan titik Stationer
3. Menentukan arah grafik yang monoton naik atau monoton turun
4. Menghitung fungsi Marginal pada fungsi Revenue dan Biaya.

3

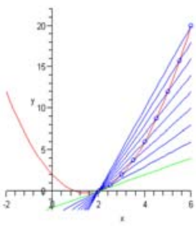
1. Gradien Garis Singgung

Langkah menentukan persamaan garis singgung fungsi $y = f(x)$ di titik P dengan absis $x = a$:

- hitung $y = f(a) = b$
- hitung gradien $m = f'(a)$
- buat persamaan garis singgung : $y = m(x - a) + b$

Contoh

Tentukan persamaan singgung kurva $f(x) = x^2 - 3x + 2$ di titik P(2,0)



Persamaan kurva: $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Turunan pertama : $f'(x) = 2x - 3$

Gradien di titik P(2,0) adalah:

$$f'(2) = 2(2) - 3 = 1$$

Garis singgung kurva di P

$$y - 0 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 2$$

2. Titik Stationer $y' = 0$ (ada akar real)

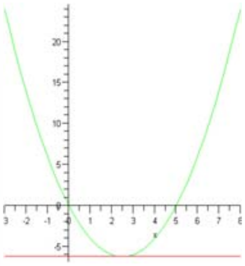
Langkah menentukan titik stationer fungsi $y = f(x)$

1. hitung x dari $f'(x) = 0$, apakah ada akar real ? Jika ada $x = c$
2. hitung $y = f(c) = d$
3. Titik Stationer A(c,d)

Catatan: Jika $f'(x) = 0$ **tidak ada akar real** maka $y = f(x)$ tidak mempunyai titik stationer

Contoh

Tentukan titik stationer fungsi $f(x) = x^2 - 5x$



Turunan pertama : $f'(x) = 2x - 5$

Akar turunan pertama:
$2x - 5 = 0$
$x = 2,5$

$y = f(2,5) = 2,5^2 - 5(2,5) = -6,25$

Jadi titik stationer kurva adalah A(2,5; -6,25)

7

3. Grafik monoton

- Grafik fungsi $f(x)$ akan monoton NAIK pada interval x jika $f'(x) > 0$
- Grafik fungsi $f(x)$ akan monoton TURUN pada interval x jika $f'(x) < 0$

8

Contoh

Diketahui fungsi: $y = x^2 - 5x$. Tentukan pada interval mana grafik fungsi tersebut monoton naik dan turun !

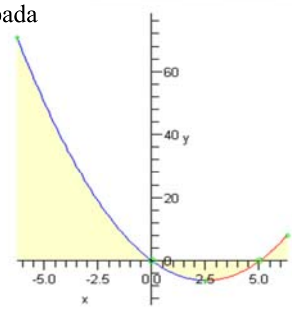
Jawab :

$y' = 2x - 5$

Grafik monoton naik pada
saat $y' > 0$
$2x - 5 > 0$
$x > 2,5$

9

Grafik monoton turun pada
saat $y' < 0$
$2x - 5 < 0$
$x < 2,5$



10

4. Fungsi marginal

Pada fungsi biaya atau Revenue :
Marginal = turunan fungsi biaya atau revenue

Contoh :
Jika diketahui $TC(x) = x^2 + 40x + 5000$,
maka marginal cost : $MC(x) = TC'(x) = 2x + 40$

11

Aplikasi Turunan Kedua fungsi

1. Menentukan bagian grafik yang terbuka ke atas atau ke bawah (kecekungan grafik fungsi)
2. Menghitung titik ekstrim Maksimum dan Minimum
3. Menghitung titik Belok

12

1. Kecekungan

- Bagian grafik yang terbuka ke atas (cekung ke atas) : syaratnya : $y'' > 0 \rightarrow$ hitung interval x (kalau ada);

  Bagian grafik yang terbuka ke bawah (cekung ke ke bawah) : syaratnya : $y'' < 0 \rightarrow$ hitung interval x (kalau ada);

13

2. Menghitung Titik Ekstrim: Maksimum dan Minimum

Langkah-langkah :

1. Tentukan nilai x yang memenuhi $y' = f'(x) = 0$, misalkan $x = a$;
2. Hitung $y''(a) = f''(a)$, jika :
   - $f''(a) > 0$ maka $(a, f(a))$ adalah titik Minimum
   - $f''(a) < 0$ maka $(a, f(a))$ adalah titik Maksimum
   - $f''(a) = 0$ maka tidak ada titik ekstrim, hanya TITIK SADEL.

14

3. Titik Belok

- Titik Belok $\rightarrow$ $y'' = f''(x) = 0 \rightarrow$ Hitung x (kalau ada); misalkan $x = c$; syarat $y' = f(c) \neq 0$

15

Signs of f' and f''	Properties of the Graph of f	General Shape of the Graph of f
$f'(x) > 0$ $f''(x) > 0$	f increasing f concave upward	
$f'(x) > 0$ $f''(x) < 0$	f increasing f concave downward	
$f'(x) < 0$ $f''(x) > 0$	f decreasing f concave upward	
$f'(x) < 0$ $f''(x) < 0$	f decreasing f concave downward	

Contoh

Diketahui fungsi: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 22$
Tentukan pada interval mana grafik fungsi tersebut cekung keatas dan cekung kebawah.

Jawab :

Turunan pertama :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

Turunan kedua :

$$f''(x) = 6x - 6$$

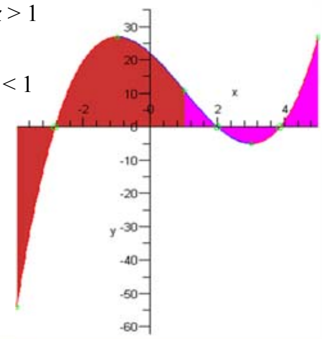
17

Cekung ke atas saat:

$y'' > 0 \rightarrow 6x - 6 > 0 \rightarrow x > 1$

Cekung ke bawah saat:

$y'' < 0 \rightarrow 6x - 6 < 0 \rightarrow x < 1$



18

Contoh

Diketahui $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 22$. Tentukan nilai ekstrim fungsi tersebut

Jawab

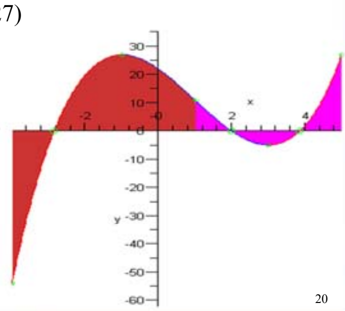
Akar turunan pertama:
$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0$ ialah
$x_1 = -1$ dan $x_2 = 3$

Sedangkan turunan kedua adalah
$y'' = 6x - 6$

19

untuk $x = -1$
$y'' = -12 < 0 \rightarrow y_{max} = -1-3+9+22 = 27$
Titik maksimum P(-1,27)

untuk $x = 3$
$y'' = 12 > 0 \rightarrow y_{min} = -5$
Titik minimum Q(3,-5)



20

Menghitung titik Belok

Cara menentukan titik belok:

- $y'' = f''(x) = 0$
- Hitung x (kalau ada); misalkan $x = c$;
- Titik $(c, f(c))$ adalah titik belok jika $y' = f'(c) \neq 0$

21

Contoh

Diketahui fungsi : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 22$
Tentukan koordinat titik belok fungsi tersebut !

Jawab:

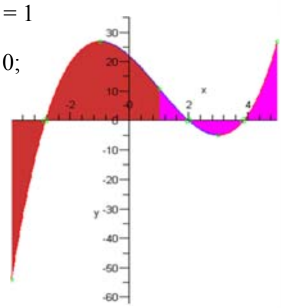
Syarat Titik Belok :

- $f'(x) \neq 0$
- $f''(x) = 0$

22

$f'(x) = y' = 3x^2 - 6x - 9$
$f''(x) = y'' = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$

untuk $x = 1$; $y = 11$ dan $y' \neq 0$;
sehingga titik belok R(1,11)



23

Latihan

Tentukan titik ekstrim, titik sadel dan titik belok (jika ada)

dari : $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$

24

Latihan

Diketahui $G(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$

Tentukan (jika ada)

a. titik ekstrim

b. titik sadel dan titik belok

c. Interval grafik monoton naik dan turun

d. Interval grafik fungsi cekung atas dan cekung bawah

25

Menggambar grafik

Hal-hal yang perlu diperhatikan dalam menggambar grafik fungsi:

- Batas-batas interval
- Titik potong sumbu *x* atau *y*
- Kemonotonan
- Kecekungan
- Titik Ekstrim
- Titik belok atau sadel
- Garis asimtot

26

Aplikasi diferensial

1. Perhitungan laju
2. Nilai ekstrim
3. Elastisitas

Jika $y = f(x)$, maka elastisitas fungsi dari y ke x adalah

$$E_{y\to x} = \frac{f'(x)}{f(x)/x} = \frac{xf'(x)}{f(x)}$$

Jika $x = f(p)$ adalah fungsi permintaan atau penawaran, maka

$$E_{x\to p} = \frac{f'(p)}{x/p} = \frac{pf'(p)}{x} = \frac{pf'(p)}{f(p)}$$

27

Aplikasi diferensial-lanjutan

4. Tingkat pertumbuhan

Jika $y = f(t)$, maka tingkat pertumbuhan adalah

$$r_y = \frac{dy/dt}{y} = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

Dalam bentuk persentase

$$r_y = \left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)100\%$$

28