Ketaksamaan

A. Ketaksamaan Cauchy-Schwarz

Teorema 1

Jika $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ dan $b_1, b_2, \cdots, b_n$ barisan bilangan real, maka

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

ditulis dengan notasi sigma diperoleh

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Lebih lanjut, jika tidak semua $b_i = 0$, maka kesamaan memenuhi (1.3) jika dan hanya jika terdapat bilangan $s \in \mathbb{R}$ sehingga $a_i = sb_i$ untuk semua $i = 1,2,3, \cdots, n$.

Bukti:

Didefinisikan fungsi $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan aturan:

$$F(t) = (a_1 - tb_1)^2 + (a_2 - tb_2)^2 + \cdots + (a_n - tb_n)^2 \text{ untuk } t \in \mathbb{R}.$$

Diperoleh $F(t) \geq 0$ untuk semua $t \in \mathbb{R}$. Selanjutnya F diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F(t) &= a_1^2 - 2a_1b_1t + b_1^2t^2 + a_2^2 - 2a_2b_2t + b_2^2t^2 + \cdots + a_n^2 - 2a_nb_nt + b_n^2t^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)t + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)t^2 \end{aligned}$$

Misal

$$A = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2, \qquad B = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_2b_2, \qquad C = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$$

maka

$$F(t) = A - 2Bt + Ct^2.$$

Perhatikan bahwa fungsi kuadrat selalu bernilai non negatif, yaitu $F(t) \geq 0$ untuk semua $t \in \mathbb{R}$, oleh karena itu persamaan kuadrat

$$Ct^2 - 2Bt + A = 0$$

tidak mungkin mempunyai dua akar real yang berbeda. Hal ini berarti diskriminan

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4B^2 - 4AC = 4(B^2 - AC)$$

harus memenuhi $\Delta \leq 0$, yaitu

$$B^2 - AC \leq 0$$

$$B^2 \leq AC$$

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Jika $b_i = 0$ untuk semua $i = 1,2,3,\cdots,n$, maka kesamaan (1.3) dipenuhi untuk sebarang pemilihan dari $a_i = 0$. Selanjutnya diasumsikan tidak semua $b_i = 0$ $(i = 1,2,3,\cdots,n)$. Jika $a_i = sb_i$ untuk suatu $s \in \mathbb{R}$ dan semua $i = 1,2,3,\cdots,n$, maka kedua ruas (1.3) sama dengan $s^2(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)^2$. Sebaliknya, jika kesamaan berlaku dalam (1.3), maka haruslah $\Delta = 0$. Jadi persamaan kuadrat $Ct^2 - 2Bt + A = 0$ mempunyai akar tunggal s. Akibatnya diperoleh:

$$a_1 - sb_1 = 0, a_2 - sb_2 = 0, \cdots, a_n - sb_n = 0.$$

atau

$$a_i = sb_i \text{ untuk semua } i = 1,2,3,\cdots,n.$$

Akibat 2

Jika $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ dan $b_1, b_2, \cdots, b_n$ barisan bilangan real positif, maka

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}\right).$$

Bukti:

Misal $x_i = \sqrt{a_i b_i}$ dan $y_i = \sqrt{\frac{a_i}{b_i}}$ untuk semua $i = 1,2,3,\cdots,n$.

Berdasarkan Ketaksamaan Cauchy-Schwarz

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)$$

diperoleh:

$$\left(\sqrt{a_1^2} + \sqrt{a_2^2} + \cdots + \sqrt{a_n^2}\right)^2 \leq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}\right)$$

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}\right)$$

ditulis dengan notasi sigma diperoleh:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}\right).$$

Contoh 1

Misalkan $c_k > 0$ untuk $k = 1,2,3,\cdots,n$. Buktikan bawa

$$n^2 \leq (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n}\right).$$

Pembahasan:

Diambil barisan $a_k = \sqrt{c_k}$ dan $b_k = \frac{1}{\sqrt{c_k}}$ untuk semua $k = 1,2,3,\cdots,n$. Berdasarkan Ketaksamaan Cauchy-Schwarz

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

diperoleh:

$$(1 + 1 + \cdots + 1)^2 \leq (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n}\right)$$

$$n^2 \leq (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n}\right).$$

Contoh 2

Misalkan $c_k > 0$ untuk $k = 1,2,3,\cdots,n$. Buktikan bawa

$$\frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{\sqrt{n}} \leq (c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2)^{1/2} \leq (c_1 + c_2 + \cdots + c_n).$$

Pembahasan:

Diambil barisan $a_k = c_k$ dan $b_k = 1$ untuk semua $k = 1,2,3,\cdots,n$. Berdasarkan Ketaksamaan Cauchy-Schwarz

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

diperoleh:

$$(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)^2 \leq (c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2)(1 + 1 + \cdots + 1)$$

$$(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)^2 \leq n(c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2)$$

$$\frac{(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)^2}{n} \leq (c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2)$$

$$\frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{\sqrt{n}} \leq (c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2)^{1/2}$$

Selanjutnya perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)^2 &= c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2 + 2c_1c_2 + 2c_1c_3 + \cdots + 2c_{n-1}c_n \\ &\geq c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2\end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh

$$\left(c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2\right)^{1/2} \le (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)$$

Berdasarkan kedua ketaksamaan di atas diperoleh

$$\frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{\sqrt{n}} \le \left(c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2\right)^{1/2} \le (c_1 + c_2 + \cdots + c_n).$$

Contoh 3

Misal a, b, c dan d bilangan-bilangan real positif. Buktikan bawa

$$\frac{a}{b + 2c + 3d} + \frac{b}{c + 2d + 3a} + \frac{c}{d + 2a + 3b} + \frac{d}{a + 2b + 3c} \ge \frac{2}{3}.$$

Pembahasan:

Ambil barisan

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a, b, c, d)$$

dan

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (b + 2c + 3d, c + 2d + 3a, d + 2a + 3b, a + 2b + 3c)$$

Berdasarkan Akibat Ketaksamaan Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{4} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4} \frac{x_i}{y_i}\right) \ge \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2.$$

diperoleh

$$\big(a(b + 2c + 3d) + b(c + 2d + 3a) + c(d + 2a + 3b) + d(a + 2b + 3c)\big)\left(\frac{a}{b + 2c + 3d} + \frac{b}{c + 2d + 3a} + \frac{c}{d + 2a + 3b} + \frac{d}{a + 2b + 3c}\right) \ge (a + b + c + d)^2$$

$$(ab + 2ac + 3ad + bc + 2bd + 3ab + cd + 2ac + 3bc + ad + 2bd + 3cd)\left(\frac{a}{b + 2c + 3d} + \frac{b}{c + 2d + 3a} + \frac{c}{d + 2a + 3b} + \frac{d}{a + 2b + 3c}\right) \ge (a + b + c + d)^2$$

Diperoleh:

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c}$$

$$\ge \frac{(a+b+c+d)^2}{ab+2ac+3ad+bc+2bd+3ab+cd+2ac+3bc+ad+2bd+3cd}$$

$$\geq \frac{(a+b+c+d)^2}{4ab+4ac+4ad+4bc+4bd+4cd}$$

$$\geq \frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}$$

Selanjutnya perhatikan bahwa

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2 \geq 0$$

$$a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+a^2-2ad+d^2+b^2-2bc+c^2+b^2-2bd+d^2+c^2-2cd+d^2 \geq 0$$

$$3a^2+3b^2+3c^2+3d^2 \geq 2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq \frac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd \geq \frac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

$$(a+b+c+d)^2 \geq \frac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+\frac{6ab+6ac+6ad+6bc+6bd+6cd}{3}$$

Diperoleh:

$$(a+b+c+d)^2 \geq \frac{8}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

Berdasarkan kedua persamaan di atas diperoleh:

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}$$

$$\geq \frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}$$

$$\geq \frac{1}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}\left(\frac{8}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\right)$$

$$\geq \frac{2}{3}$$

Terbukti bahwa

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

B. Ketaksamaan Chebyshev

Teorema 3 (Ketaksamaan Chebyshev)

Jika $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dan $y_1, y_2, \cdots, y_n$ adalah bilangan-bilangan real tak negatif dengan $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ dan $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ (keduanya barisan monoton naik) atau $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ dan $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ (keduanya barisan monoton turun), maka

$$\frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1}{n} \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)\left(\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}\right)$$
$$\leq \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n}{n}$$

atau dalam notasi sigma menjadi

$$n\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}y_{n-i} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \leq n\sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

dan kesamaan terjadi jika barisan $(x_i)_{i=1}^{n}$ atau $(y_i)_{i=1}^{n}$ konstan.

Contoh 4

Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan asli *n* berlaku

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} \leq n\sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

Pembahasan:

Ambil barisan (x_i) dan (y_i) dengan $x_i = y_i = \sqrt{i}$ untuk $i = 1, 2, 3, \cdots, n$. *i*= 1, 2, ⋯.

Berdasarkan ketaksamaan Chebyshev diperoleh:

$$\frac{(\sqrt{1}\sqrt{1} + \sqrt{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}\sqrt{n})}{n} \geq \left(\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n}\right)^2$$

$$n(1 + 2 + 3 + \cdots + n) \geq \left(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}\right)^2$$

$$n\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right) \geq \left(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}\right)^2$$

$$n^2\left(\frac{1}{2}(n+1)\right) \geq \left(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}\right)^2$$

$$n\sqrt{\frac{n+1}{2}} \geq \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}$$

Contoh 5

Tunjukkan bahwa jika a, b, c dan d bilangan-bilangan real positif, maka

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geq 16$$

Pembahasan:

Dengan menggunakan ketaksamaan Chebyshev untuk barisan bilangan (a,b,c,d) dan $\left(\frac{1}{d},\frac{1}{c},\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right)$ diperoleh:

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}{4}\right) \geq \frac{\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}+\frac{d}{d}}{4} \geq \frac{4}{4} = 1$$

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geq 16.$$

C. Ketaksamaan Nesbitt

Lemma 4

Jika x dan y bilangan real positif, maka $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$.

Bukti

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 \geq 0$$

$$\frac{x}{y}-2\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)+\frac{y}{x} \geq 0$$

$$\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x} \geq 0$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$$

Teorema 5 (Ketaksamaan Nesbitt)

Jika a, b, dan c bilangan-bilangan real positif, maka

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Bukti:

$$
\begin{aligned}
f(a,b,c) &= \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\\
&= \frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1-3\\
&= \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b}-3\\
&= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)-3\\
&= \frac{1}{2}(2a+2b+2c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)-3\\
&= \frac{1}{2}\big((a+b)+(b+c)+(a+c)\big)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)-3\\
&= \frac{1}{2}\big((b+c)+(a+c)+(a+b)\big)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)-3\\
&= \frac{1}{2}\left[\big((b+c)+(a+c)+(a+b)\big)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)-6\right]
\end{aligned}
$$

Hal ini berakibat:

$$2f(a,b,c)=\big((b+c)+(a+c)+(a+b)\big)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)-6$$

Misal $x=a+b$, $y=b+c$ dan $z=c+a$, maka diperoleh:

$$
\begin{aligned}
2f(a,b,c) &= (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-6\\
&= \frac{x}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{z}{z}-6\\
&= \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+3-6\\
&\geq 2+2+2+3-6=3.
\end{aligned}
$$

Hal ini ekuivalen dengan

$$f(a,b,c)\geq\frac{3}{2} \iff \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Cara II

Ambil barisan

$$(x_1,x_2,x_3)=(a,b,c)$$

dan

$$(y_1,y_2,y_3)=(b+c,c+a,a+b)$$

Berdasarkan Akibat Ketaksamaan Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{3} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{y_i}\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2.$$

diperoleh

$$\big(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\big)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geq (a+b+c)^2$$

$$(ab+ac+bc+ab+ac+bc)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geq (a+b+c)^2$$

$$(2ab+2ac+2bc)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geq (a+b+c)^2$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2ab+2ac+2bc}$$

Selanjutnya perhatikan bahwa

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geq 0$$

$$a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2 \geq 0$$

$$2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2ab+2bc$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+ab+bc$$

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \geq ab+ac+bc+2ab+2ac+2bc$$

$$(a+b+c)^2 \geq 3ab+3ac+3bc$$

Berdasarkan kedua persamaan tersebut diperoleh:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2ab+2ac+2bc} \geq \frac{3ab+3ac+3bc}{2ab+2ac+2bc} = \frac{3}{2}.$$

Terbukti bahwa

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Contoh 6

Jika a, b dan c bilangan-bilangan real positif sedemikian hingga $abc = 1$, tunjukkan bahwa

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Pembahasan:

Misal $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, dan $z = \frac{1}{c}$, maka $xyz = \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{abc} = 1$. Juga diperoleh $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, dan $c = \frac{1}{z}$. Akibatnya diperoleh:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{1}{\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}+\frac{1}{\frac{1}{y^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)}+\frac{1}{\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$$

$$= \frac{x^3yz}{y+z}+\frac{y^3xz}{x+z}+\frac{z^3xy}{x+y}$$

$$= (xyz)\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\right)$$

$$= \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}.$$

Contoh 7

Diketahui segitiga ABC dengan panjang sisi-sisinya a, b dan c, tunjukkan bahwa

$$\frac{3}{2}\le\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$$

Pembahasan:

Ketaksamaan $\frac{3}{2}\le\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ telah ditunjukkan dalam ketaksamaan Nesbitt di atas, dalam hal ini tinggal ditunjukkan bahwa $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$ sebagai berikut.

Perhatikan bahwa dalam suatu segitiga berlaku sifat jumlah panjang sebarang dua sisi segitiga lebih besar dari panjang sisi ketiga. Oleh karena itu diperoleh ketaksamaan sebagai berikut:

1). $a + b > c$.

2). $a + c > b$.

3). $b + c > a$.

Perhatikan bahwa untuk $a + b > c$ diperoleh:

$$ac+bc>c^2$$

$$\Leftrightarrow\quad ac+bc+ac+bc>c^2+ac+bc$$

$$\Leftrightarrow\quad 2(ac+bc)>c(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow\quad 2c(a+b)>c(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{2c}{a+b+c}>\frac{c}{a+b}$$

Dengan cara yang sama diperoleh $\frac{2b}{a+b+c}>\frac{b}{a+c}$ dan $\frac{2a}{a+b+c}>\frac{a}{b+c}$. Berdasarkan hasil tersebut diperoleh:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<\frac{2a}{a+b+c}+\frac{2b}{a+b+c}+\frac{2c}{a+b+c}=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2.$$

Jadi diperoleh: $\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$

Contoh 8

Misal *a*, *b* dan *c* menyatakan panjang sisi-sisi segitiga. Buktikan bahwa

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Pembahasan:

Misal $x = b + c - a$, $y = c + a - b$ dan $z = a + b - c$. Jelas bahwa $x > 0$, $y > 0$ dan $z > 0$.

$$\begin{array}{r} x = b + c - a \\ y = c + a - b \\ \hline x + y = 2c \end{array} + \qquad \begin{array}{r} x = b + c - a \\ z = a + b - c \\ \hline x + z = 2b \end{array} + \qquad \begin{array}{r} y = c + a - b \\ z = a + b - c \\ \hline y + z = 2a \end{array} +$$

diperoleh

$$a = \frac{y+z}{2}, \qquad b = \frac{x+z}{2}, \qquad c = \frac{x+y}{2}$$

Selanjutnya diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} &= \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}(2 + 2 + 2) = 3. \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$