BERBAGAI JENIS KETAKSAMAAN

Sifat urutan dalam sistem bilangan real $\mathbb{R}$ akan memberikan dasar dalam membahas pengertian dan sifat-sifat ketaksamaan di dalam sistem bilangan real.

Aksioma 2.1 (Sifat–Sifat Urutan dari $\mathbb{R}$)

Jika a dan b sebarang bilangan real, maka sifat-sifat berikut berlaku:

a). Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $a + b > 0$.

b). Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $ab > 0$.

c). Jika $a \in R$ maka tepat satu dari di bawah ini dipenuhi:

$$a > 0,\ a = 0 \text{ atau } a < 0.$$

Sifat (c) ini disebut **Sifat Trichotomy**.

Berikutnya akan dijelaskan mengenai "**Aturan Ketaksamaan**" yang nantinya sering digunakan pada bagian berikutnya.

Teorema 2.2

a). Jika $a \in R$., maka $a^2 \geq 0$, dan kesamaan berlaku jika $a = 0$.

b). Jika $a_1, a_2, \cdots, a_n \in R$., maka $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$, dan kesamaan berlaku jika $a_i = 0$ untuk setiap i dengan $i = 1, 2, \cdots, n$.

Teorema 2.3

Misalkan $a, b, c \in R$.

a). Jika $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c$.

b). Dipenuhi tepat satu dari: $a > b$, $a = b$, atau $a < b$.

c). Jika $a \geq b$ dan $a \leq b$ maka $a = b$.

Berikut ini adalah hubungan antara sifat-sifat urutan dengan operasi penjumlahan dan perkalian, khususnya pada ketaksamaan.

Teorema 2.4

Misalkan $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

a). Jika $a > b$, maka $a + c > b + c$.

b). Jika $a > b$ dan $c > d$, maka $a + c > b + d$.

c). Jika $a > b$ dan $c > 0$, maka $ca > cb$.

d). Jika $a > b$ dan $c < 0$, maka $ca < cb$.

e). Jika $a > 0$, maka $1/a > 0$.

(f) Jika $a < 0$, maka $1/a < 0$.

Teorema 2.5

Jika $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a < b,$ maka $a < \frac{1}{2}(a+b) < b.$

Bukti:

Jika $a < b$, maka, $2a = a + a < a + b$ dan $a + b < b + b = 2b.$ Jadi, $2a < a + b < 2b.$ Sehingga diperoleh $a = \frac{1}{2}(2a) < \frac{1}{2}(a+b) < \frac{1}{2}(2b) = b.$ Jadi $a < \frac{1}{2}(a+b) < b.$

Teorema 2.6

Jika a dan b bilangan real dengan $a \geq 0$ dan $b \geq 0$, asalkan keduanya tidak 0 secara bersamaan, maka

$$\min \quad \{a, b\} \leq \frac{2ab}{a+b}.$$

Bukti:

Jika salah satu dari a atau b sama dengan 0, tetapi yang lain tidak 0, maka kedua ruas nilainya sama dengan 0, sehingga kesamaan dipenuhi. Selanjutnya diasumsikan $a > 0$ dan $b > 0$.

Jika $a = b$, maka min $\{a, b\} = a = \frac{2aa}{2a} = \frac{2ab}{a+b}$.

Jika $a \neq b$, maka $a < b$ atau $b < a$. Misal $a < b$, maka $\min\{a, b\} = a$, dan diperoleh:

$$a(a+b) = a^2 + ab \leq ab + ab = 2ab$$

$$a \leq \frac{2ab}{a+b}$$

Jadi jika $a < b$, maka $\min\{a, b\} = a \leq \frac{2ab}{a+b}$.

Misal $b < a$, maka $\min\{a, b\} = b$, dan diperoleh:

$$b(a+b) = ab + b^2 \leq ab + ab = 2ab$$

$$b \leq \frac{2ab}{a+b}$$

Jadi jika $b < a$, maka $\min\{a, b\} = b \leq \frac{2ab}{a+b}$.

Berdasarkan kedua kasus disimpulkan

$$\min \quad \{a, b\} \leq \frac{2ab}{a+b}.$$

Teorema 2.7

Jika a dan b bilangan real dengan $a \geq 0$ dan $b \geq 0$, asalkan keduanya tidak 0 secara bersamaan, maka

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Bukti:

Jika salah satu dari a atau b sama dengan 0, tetapi yang lain tidak 0, maka kedua ruas nilainya sama dengan 0, sehingga kesamaan dipenuhi.

Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 \geq 2ab \\
&\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab \\
&\Leftrightarrow \quad (a+b)^2 \geq 4ab \\
&\Leftrightarrow \quad a + b \geq 2\sqrt{ab} \\
&\Leftrightarrow \quad \tfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Misal a dan b bilangan real positif. Bilangan $\frac{1}{2}(a+b)$ disebut **rata-rata aritmetik**, dan bilangan $\sqrt{ab}$ disebut **rata-rata geometrik**. Ketaksamaan yang berbentuk

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$$

disebut **Rata-rata Aritmetik-Geometrik (Arithmetic-Geometric Mean)** untuk a dan b.

Di pihak lain, asumsikan $a > 0$, $b > 0$, dan $\sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a+b)$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas dan mengalikan dengan 4 diperoleh

$$4ab = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

yang menyatakan bahwa

$$0 = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2.$$

Kesamaan ini menyatakan bahwa $a = b$. Jadi, kesamaan di dalam (1.1) menyatakan $a = b$.

Teorema 2.8

Jika a dan b bilangan real dengan $a \geq 0$ dan $b \geq 0$, asalkan keduanya tidak 0 secara bersamaan, maka

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}.$$

Bukti:

Jika salah satu dari a atau b sama dengan 0, tetapi yang lain tidak 0, maka kedua ruas nilainya sama dengan 0, sehingga kesamaan dipenuhi.

Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka berdasarkan Teorema 2.7 diperoleh:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Akibatnya diperoleh:

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{a+b} \Leftrightarrow \frac{ab}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

Terbukti bahwa:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}.$$

Teorema 2.9

Jika a dan b bilangan real dengan $a > 0$ dan $b > 0$, maka

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Bukti:

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
0 \leq (a-b)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2ab \leq a^2 + b^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2ab + (a^2+b^2) \leq (a^2+b^2) + (a^2+b^2) \\
&\Leftrightarrow \quad (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Teorema 2.10

Jika *a* dan *b* bilangan real dengan $a \geq 0$ dan $b \geq 0$, maka

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \text{maks}\,\{a,b\}.$$

Bukti:

Ditinjau untuk kasus $a > 0$ dan $b > 0$. Jika $a = b$, maka

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2+a^2}{2}} = \sqrt{\frac{2a^2}{2}} = \sqrt{a^2} = a = b = \text{maks}\,\{a,b\}.$$

Jika $a \neq b$, maka $a < b$ atau $b < a$.

Misal $a < b$, maka maks $\{a,b\} = b$. Lebih lanjut diperoleh:

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 < b^2 + b^2 = 2b^2 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} < b^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b = \text{maks}\,\{a,b\}$$

Misal $b < a$, maka maks $\{a,b\} = a$. Lebih lanjut diperoleh:

$$b < a \Leftrightarrow b^2 < a^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 < a^2 + a^2 = 2a^2 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} < a^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < a = \text{maks}\,\{a,b\}$$

Berdasarkan kedua kasus tersebut diperoleh:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \text{maks}\,\{a,b\}.$$

Berdasarkan Teorema 2.6 sampai dengan Teorema 2.10 dapat dinyatakan akibat sebagai berikut.

Akibat 2.11

Jika *a* dan *b* bilangan real dengan $a > 0$ dan $b > 0$, maka

$$\min\{a,b\} \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \text{maks}\,\{a,b\}.$$

Ketaksamaan tersebut disebut ketaksamaan **Harmonic-Geometric-Arithmetic-Quadratic-Mean** (**HM-GM-AM-QM** ***inequality***).

Ketaksamaan ***Arithmetic-Geometric Mean***, juga berlaku untuk 3 bilangan real sebarang. Hal ini dinyatakan sebagai berikut.

Contoh 1

Jika a, b dan c bilangan-bilangan real positif, maka

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

Bukti:

Misal $A = \frac{a+b+c}{3}$, dan $G = \sqrt[3]{abc}$, maka diperoleh

$$\frac{a+b+c+A}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+A}{2}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+A}{2}\right)} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cA}} = \sqrt[4]{abcA}.$$

Perhatikan bahwa $3A = a+b+c$ dan $G^3 = abc$. Kedua kesamaan ini, kemudian disubstitusikan ke dalam ketidaksamaan di atas dan diperoleh:

$$\frac{3A+A}{4} \geq \sqrt[4]{G^3A} \Leftrightarrow A \geq \sqrt[4]{G^3A}$$

Akibatnya diperoleh

$$A^4 \geq G^3A \Leftrightarrow A(A^3 - G^3) \geq 0$$

Karena $A > 0$, maka

$$A^3 - G^3 \geq 0 \Leftrightarrow (A-G)(A^2 + AG + G^2) \geq 0.$$

Karena $A > 0$, dan $G > 0$ maka $A^2 + AG + G^2 > 0$, akibatnya diperoleh:

$$A - G \geq 0 \Leftrightarrow A \geq G \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Terbukti bahwa $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Ketaksamaan rata-rata Aritmetik-Geometri secara umum berlaku untuk sejumlah berhingga bilangan real positif $a_1, a_2, \cdots, a_n$, yaitu

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

dengan kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Penerapan ketaksamaan rata-rata Aritmetik-Geometri sangat banyak, khususnya dalam bilang lajabar. Berikut diberikan contoh-contoh penerapannya.

Contoh 2

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli *n* berlaku $(1+n)^n \geq 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)$.

Pembahasan:

$$\frac{1+2+3\cdots+n}{n} \geq \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n}$$

$$\frac{\frac{n}{2}(1+n)}{n} \geq \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n}$$

$$\frac{(1+n)}{2} \geq \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n}$$

$$\frac{(1+n)^n}{2^n} \geq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n$$

$$(1+n)^n \geq 2^n(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n)$$

$$(1+n)^n \geq 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)$$

Contoh 3

Buktikan bahwa $999! < 500^{999}$.

Pembahasan:

$$\frac{1+2+3\cdots+999}{999} \geq \sqrt[999]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 999}$$

$$\frac{\frac{999}{2}(1+999)}{999} \geq \sqrt[999]{999 \cdot 998 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$500 \geq \sqrt[999]{999!}$$

$$500^{999} \geq 999!$$

Contoh 4

Jika *a* dan *b* bilangan positif, buktikan bahwa $\frac{2a+3b}{5} \geq \sqrt[5]{a^2b^3}$.

Pembahasan:

Perhatikan 5 bilangan a, a, b, b, b, dan dengan menggunakan ketaksamaan AM-GM diperoleh:

$\frac{a+a+b+b+b}{5} \geq \sqrt[5]{a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b} \Leftrightarrow \frac{2a+3b}{5} \geq \sqrt[5]{a^2.b^3}$.

Contoh 5

Jika *a* dan *b* bilangan positif, *p* dan *q* bilangan-bilangan asli, buktikan bahwa $\frac{pa+qb}{p+q} \geq \sqrt[p+q]{a^pb^q}$.

Pembahasan:

Perhatikan barisan bilangan yang terdiri atas p bilangan a dan q bilangan b, yaitu $a, a, \cdots, a, b, b, \cdots, b$, dengan menggunakan ketaksamaan AM-GM diperoleh:

$$\frac{a + a + \cdots + a + b + b + \cdots + b}{p + q} \geq \sqrt[p+q]{a \cdot a \cdots a \cdot b \cdot b \cdots b}$$

$$\frac{pa + qb}{p + q} \geq \sqrt[p+q]{a^p b^q}.$$