Faktor Persekutuan Terbesar (FPT)

Definisi 1

Misal a dan b bilangan-bilangan bulat dengan $a \neq 0$ atau $b \neq 0$.

Faktor Persekutuan Terbesar dari a dan b, ditulis $FPT(a, b)$, adalah bilangan bulat positif d sehingga memenuhi:

1) $d \mid a$ dan $d \mid b$,

2). Jika $c \mid a$ dan $c \mid b$, maka $c \leq d$.

Teorema 1

Misal a dan b bilangan-bilangan bulat dengan $a \neq 0$ atau $b \neq 0$.

Jika $b = aq + r$, untuk suatu bilangan bulat q dan r sehingga $0 \leq r < |a|$, maka $FPT(a, b) = FPT(a, r) = FPT(a, b - aq)$.

Teorema 2

Jika a dan b bilangan-bilangan bulat dengan $a \neq 0$ atau $b \neq 0$, maka terdapat bilangan bulat *x* dan *y* sehingga $FPT(a, b) = ax + by$.

Teorema 3

Misal a dan b bilangan-bilangan bulat dengan $a > 0$ atau $b > 0$.

Bilangan bulat *a* dan *b* prima relatif jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat *x* dan *y* sehingga *ax* + *by* = 1.

Contoh 1

Buktikan bahwa untuk semua bilangan bulat positif pecahan $\frac{21n+4}{14n+3}$ tidak dapat disederhanakan.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa jika diambil *x* = 3 dan *y* = –2, maka diperoleh:

$$3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 42n + 9 - 42n - 8 = 1.$$

Jadi terdapat bilangan bulat *x* = 3 dan *y* = –2 sehingga $3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1$. Jadi $FPB(21n + 4, 14n + 3) = 1$, dengan demikian bilangan $14n$ + 3 dan $21n$ + 4 merupakan bilangan prima relatif. Dengan demikian, pecahan $\frac{21n+4}{14n+3}$ tidak dapat disederhanakan untuk semua bilangan bulat positif *n*.

Kongruensi antara Bilangan Bulat

Definisi 2

Misal *m* suatu bilangan bulat positif. Dua bilangan bulat *a* dan *b* dikatakan **kongruen modulo *m*** atau ***a* kongruen dengan *b* modulo *m*** apabila *m* membagi habis $a - b$.

Selanjutnya *a* kongruen dengan *b* modulo *m*, dinotasikan dengan $a \equiv b \pmod{m}$.

Jadi $a \equiv b \pmod{m}$ jika dan hanya jika $a - b = k.m$ untuk suatu bilangan bulat *k*.

Teorema 4 (Sifat-sifat Kongruensi pada bilangan bulat)

Misal a, b, c, dan d bilangan-bilangan bulat dan m bilangan bulat positif.

1). $a \equiv a \pmod{m}$.

2). Jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka $b \equiv a \pmod{m}$.

3). Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $b \equiv c \pmod{m}$, maka $a \equiv c \pmod{m}$.

4). Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$, maka $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ dan $a.c \equiv b.d \pmod{m}$.

5). Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $a.k \equiv b.k \pmod{m}$ untuk setiap bilangan bulat k.

6). Jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka $a + c \equiv b + c \pmod{m}$ dan $a.c \equiv b.c \pmod{m}$.

7). Jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka $a^k \equiv b^k \pmod{m}$ untuk setiap bilangan bulat positif *k*.

Teorema 5 (Teorema Kecil Fermat)

Jika *p* suatu bilangan prima dan *p* tidak membagi habis *a*, maka $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Teorema 6

Jika *p* suatu bilangan prima, maka $a^p \equiv a \pmod{p}$ untuk setiap bilangan bulat *a*.

Teorema 7 (Teorema Wilson)

Jika *p* suatu bilangan prima, maka $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ untuk setiap bilangan bulat *a*.

Contoh 2

Tentukan sisa pembagian 59^{219} **:** 7.

Pembahasan:

Karena 7 bilangan prima dan 7 tidak membagi 59, maka menurut Teorema Kecil Fermat diperoleh: $59^6 \equiv 1 \pmod 7$.

Lebih lanjut diperoleh:

$$59^{219} = \left(59^6\right)^{36} 59^3 \equiv 1^{36}\ 59^3 \pmod 7 \equiv 3^3 \pmod 7 \equiv 6 \pmod 7.$$

Jadi sisa pembagian 59^{219} **:** 7 adalah 6.

Contoh 3

Tentukan 1 angka terakhir dari 7^{739}.

Pembahasan:

Untuk menentukan angka terakhir dari 7^{739} ditempuh dengan cara menentukan sisa pembagian 7^{739} **:** 10, sebagai berikut:

Karena $7^2 \equiv -1 \pmod{10}$, maka $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$. Lebih lanjut diperoleh:

$$\begin{aligned} 7^{739} &= (7^4)^{184} \cdot 7^3 \\ &\equiv 1^{184} \cdot 7^3 (\text{mod } 10) \\ &\equiv 7^2 \cdot 7 (\text{mod } 10) \\ &\equiv -7 (\text{mod } 10) \\ &\equiv 3 (\text{mod } 10) \end{aligned}$$

Jadi 1 angka terakhir dari 7^{739} adalah 3.

Contoh 4

Tentukan 2 (dua) angka terakhir dari 7^{355}.

Pembahasan:

Untuk menentukan 2 (dua) angka terakhir dari 7^{355} ditempuh dengan cara menentukan sisa pembagian 7^{355} **:** 100, sebagai berikut:

Perhatikan bahwa $7^4 \equiv 1\ (\text{mod } 100)$. Lebih lanjut diperoleh:

$$\begin{aligned} 7^{355} &= (7^4)^{88} \cdot 7^3 \\ &\equiv 1^{88} \cdot 7^3 (\text{mod } 100) \\ &\equiv 343\ (\text{mod } 100) \end{aligned}$$

$\equiv 43 \pmod{100}$

Jadi 2 angka terakhir dari 7^{355} adalah 43.

Contoh 5

Tunjukan bahwa $2^{70} + 3^{70}$ habis dibagi 13.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa $2^4 \equiv 3 \pmod{13}$ dan $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$. Selanjutnya diperoleh:

$$\begin{aligned}
2^{70} + 3^{70} &\equiv (2^4)^{17}2^2 + (3^3)^{13}3 \pmod{13} \\
&\equiv 4(3)^{17} + 3(1)^{13} \pmod{13} \\
&\equiv 4(3^3)^5(3^2) + 3 \pmod{13} \\
&\equiv 4(1)^5(9) + 3 \pmod{13} \\
&\equiv (4)(9) + 3 \pmod{13} \\
&\equiv 39 \pmod{13} \\
&\equiv 0 \pmod{13}
\end{aligned}$$

Jadi $2^{70} + 3^{70}$ habis dibagi 13.

Teorema 8

Misal n suatu bilangan bulat positif, sedangkan a, b dan c bilangan-bilangan bulat dengan $FPT(n,c) = d$. Jika $ca \equiv cb \pmod{n}$, maka $a \equiv b \pmod{\frac{n}{d}}$.

Akibat 9

Misal n suatu bilangan bulat positif, sedangkan a, b dan c bilangan-bilangan bulat dengan $FPT(n,c) = 1$. Jika $ca \equiv cb \pmod{n}$, maka $a \equiv b \pmod{n}$.

Contoh 6

Tentukan sisa pembagian 15! : 17.

Pembahasan:

Karena 17 bilangan prima, maka berdasarkan Teorema Wilson diperoleh:

$16! \equiv -1 \pmod{17} \equiv 16 \pmod{17} \Leftrightarrow 15! \times 16 \equiv 16 \pmod{17}$.

Karena FPB (16, 17) = 1, maka diperoleh $15! \equiv 1 \pmod{17}$.

Hal ini berarti sisa dari 15! : 17 adalah 1.