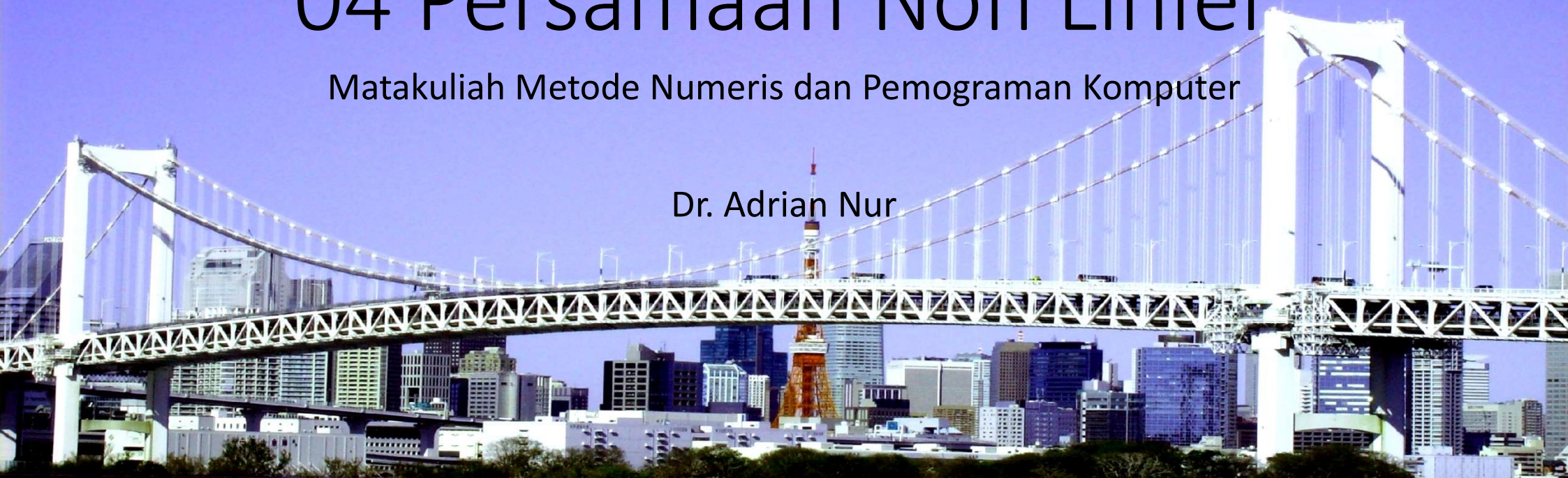


# 04 Persamaan Non Linier

Matakuliah Metode Numeris dan Pemograman Komputer

Dr. Adrian Nur



**1 & 2** Dasar – dasar dan Pemograman dengan MATLAB

---

**3** Persamaan Aljabar Linier

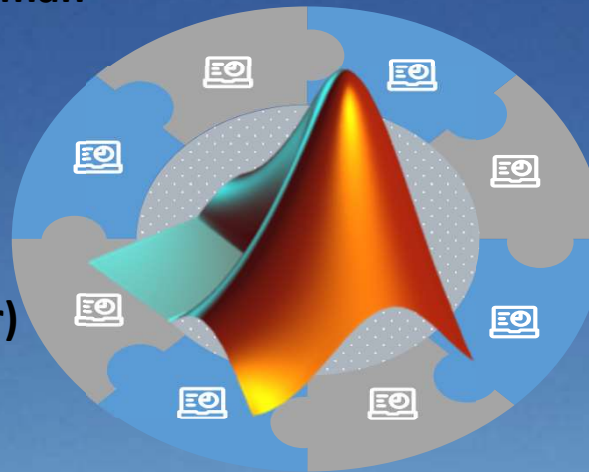
---

**4** Akar Persamaan (non linier)

---

**5** Regresi dan Interpolasi

---



**6** Integral Numeris

---

**7** Optimasi

---

**8** Persamaan Differensial Ordiner

---

**9** Persamaan Differensial Parsial

---



- Many problems in engineering and science require the solution of nonlinear equations. Several examples of such problems drawn from the field of chemical engineering and from other application areas are discussed in this section.



- The solution of nonlinear equations to find  $x$  for a function  $x$ ,  $f(x) = 0$ .
- Example,  $f(x) = e^{-x} - x$ ,  
how much  $x$  for  $f(x) = 0$ .



# Solution of nonlinear equations

The two major classes of methods available are distinguished by the type of initial guess.

They are

- *Bracketing methods*. As the name implies, these are based on two initial guesses that bracket the root.
- *Open methods*. These methods can involve one or more initial guesses, but there is no need for them to bracket the root.





# Persamaan aljabar non linier

Metode Grafik

Metode Dua Bagian

Metode Newton Raphson

Fungsi fzero

# 03 Persamaan Aljabar Non Linier

## 01 Metode Grafik





# Graphical method

- A simple method for obtaining an estimate of the root of the equation  $f(x) = 0$  is to make a plot of the function and observe where it crosses the  $x$  axis.
- This point, which represents the  $x$  value for which  $f(x) = 0$ , provides a rough approximation of the root.



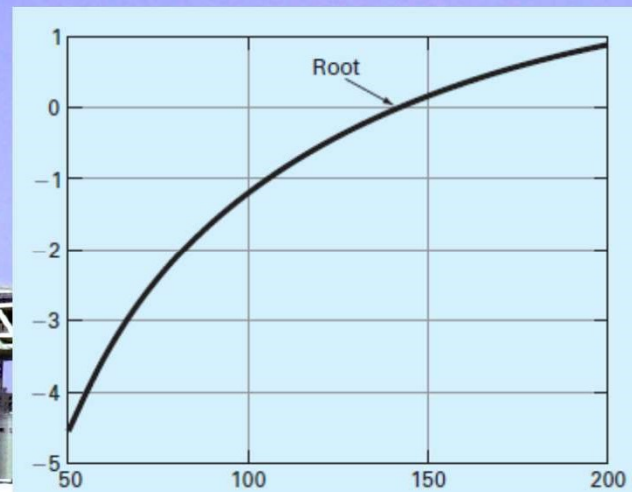


- Use the graphical approach to determine the mass of the bungee jumper with a drag coefficient of 0.25 kg/m to have a velocity of 36 m/s after 4 s of free fall. Note: The acceleration of gravity is 9.81 m/s<sup>2</sup>.

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} t\right)$$

$$f(m) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} t\right) - v(t)$$

```
>> cd = 0.25; g = 9.81; v = 36; t = 4;  
>> mp = linspace(50,200);  
>> fp = sqrt(g*mp/cd) .*tanh(sqrt(g*cd./mp)*t) -v;  
>> plot(mp,fp),grid
```



# 03 Persamaan Non Linier

## 02 Metode Dua Bagian





# Persamaan aljabar non linier

Metode Grafik

Metode Dua Bagian

Metode Newton Raphson

Fungsi fzero

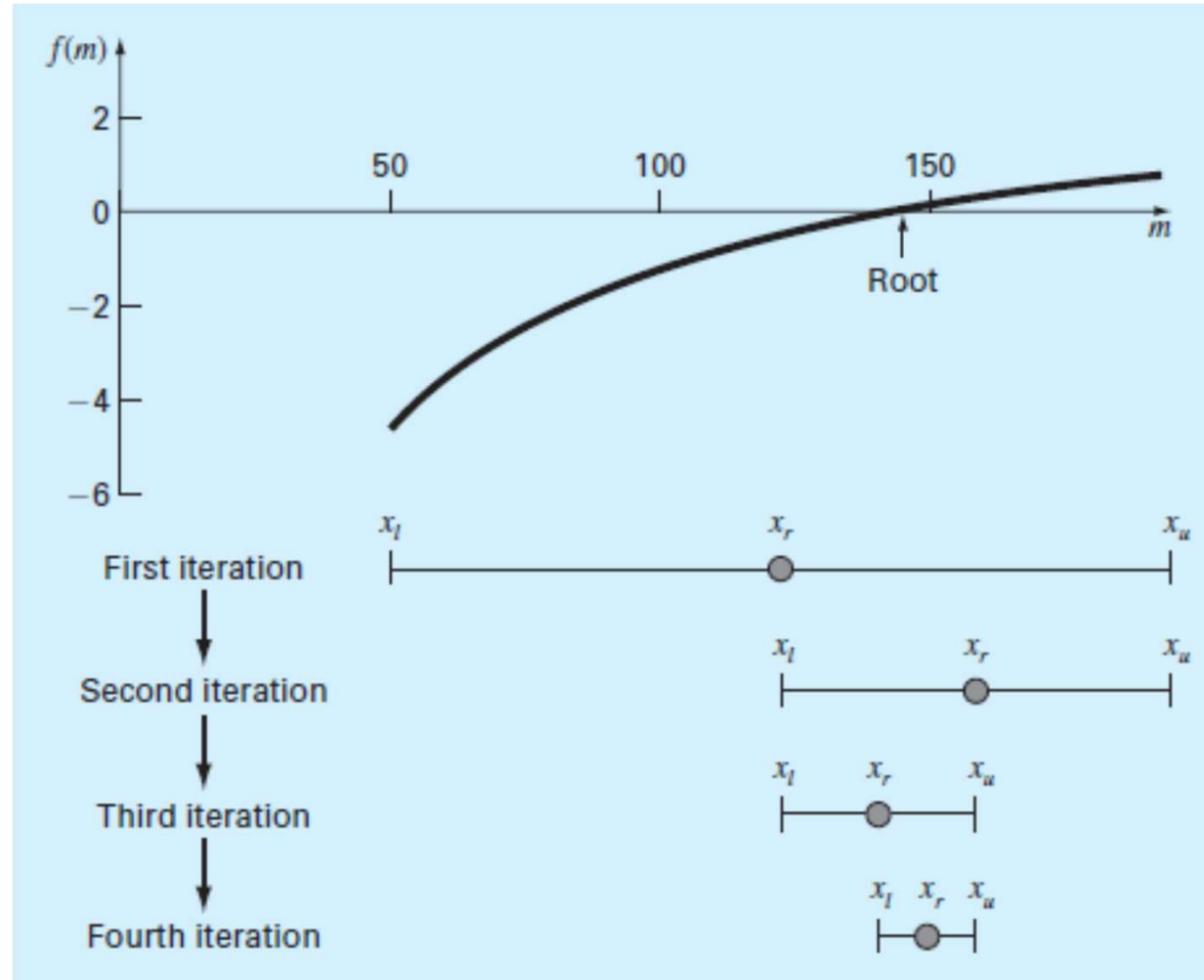
# Bisection Method

- The *bisection method* is a variation of the incremental search method in which the interval is always divided in half.
- If a function changes sign over an interval, the function value at the midpoint is evaluated.
- The location of the root is then determined as lying within the subinterval where the sign change occurs.
- The subinterval then becomes the interval for the next iteration. The process is repeated until the root is known to the required precision.



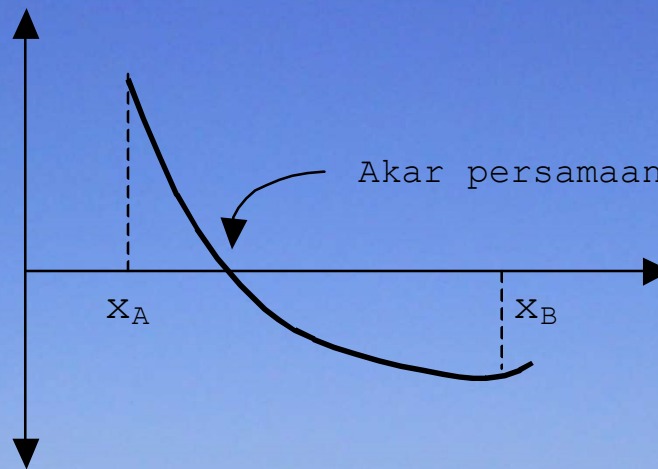


- A graphical depiction of the method is provided in this Fig.



### Step by step for solution

1. Determine initial value  $x_A$  dan  $x_B$
2. Find  $f(x_A)$  dan  $f(x_B)$
3. The interval is correct if  $f(x_A)$  &  $f(x_B)$  different sign



check  $[f(x_A)] \times [f(x_B)] < 0$ .  
If not, repeat (1) & (2).



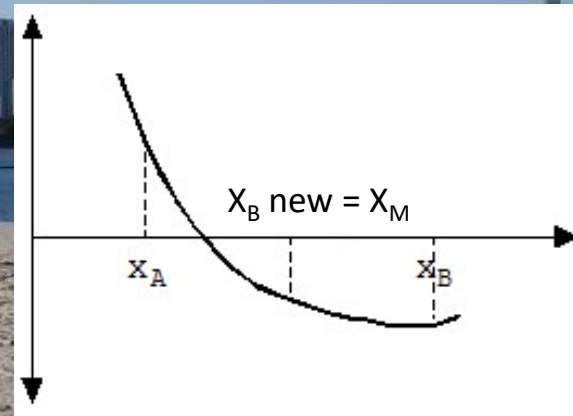
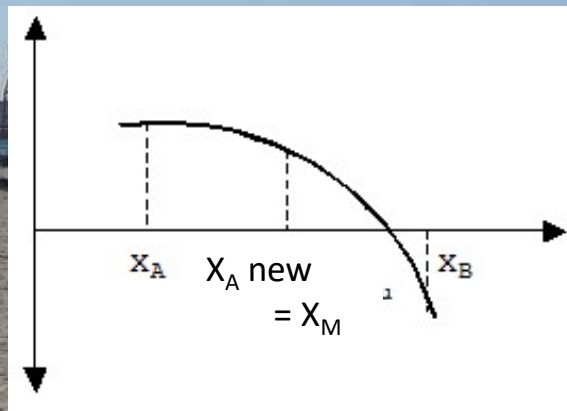
4. Find  $x_M$  (middle point)

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

5. Find  $f(x_M)$

a) If  $[f(x_A)] \times [f(x_M)] > 0$ , then  $x_A \text{ new} = x_M$  &  $x_B = x_B$

b) If  $[f(x_A)] \times [f(x_M)] < 0$ , then  $x_A = x_A$  &  $x_B \text{ new} = x_M$





6. Check  $f(x_m) < \text{Tolerance}$ . If not, repeat (4) for new  $x_m$ .



### Contoh 3.1. Konversi untuk disosiasi H<sub>2</sub>O

Uap air didisosiasi (dipecah) menjadi H<sub>2</sub> dan O<sub>2</sub> pada tekanan 0,2 atm sebagai berikut:



Fraksi molekul (x) dari H<sub>2</sub>O dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$k_p = \frac{x}{(1-x)} \sqrt{\frac{2p}{2+x}}$$

Jika  $k_p = 0,4568$  tentukanlah x yang memenuhi persamaan di atas.



```
clc
clear all

disp 'Masukkan Perkiraan Batas Bawah dan Batas Atas '
xa=input('batas bawah = ');
xb=input('batas atas = ');
fa = contoh31(xa);
fb = contoh31(xb);

x=[xa:(xb-xa)/50:xb];
plot(x,contoh31(x));
xlabel('x')
ylabel('f(x)')
grid on

while fa*fb > 0
    disp 'Tebakan salah, ganti batas atas dan/atau batas bawah'
    disp 'Perhatikan grafik!! Perkirakan nilai x untuk f(x) mendekati nol'
    xa=input('batas bawah = ');
    xb=input('batas atas = ');
    fa=contoh31(xa);
    fb=contoh31(xb);
end
tol=0.000001;

xm=(xa+xb)/2;
fm=contoh31(xm);
while abs(xa-xb)>tol
    xm=(xa+xb)/2;
    fm=contoh31(xm);
    if fa*fm<0
        xb=xm;
        fb=contoh31(xb);
    else
        xa=xm;
        fa=contoh31(xa);
    end
end
end
t = ['f(x)=0 untuk x = ' num2str(xm)];
disp (t)
```

```
function f_x = contoh31(x)
p = 0.2;
kp = 0.4568;
f_x = x./(1-x).*sqrt(2*p./(2+x))-kp;
```

### Contoh 3.2. Faktor Kompresibilitas Gas Ideal

Hubungan faktor kompresibilitas gas ideal dalam bentuk

$$z = \frac{1 - y + y^2 - y^3}{1 - y^3}$$

dengan  $y = b/4v$ , untuk  $b$  adalah koreksi van der Waals dan  $v$  adalah volum molar. Jika  $z = 0,892$  berapakah  $y$  ?

Penyelesaian dilakukan dengan program bisection yaitu dengan mengganti fungsi disosiasi  $H_2O$  dengan fungsi untuk persoalan faktor kompresibilitas gas ideal.





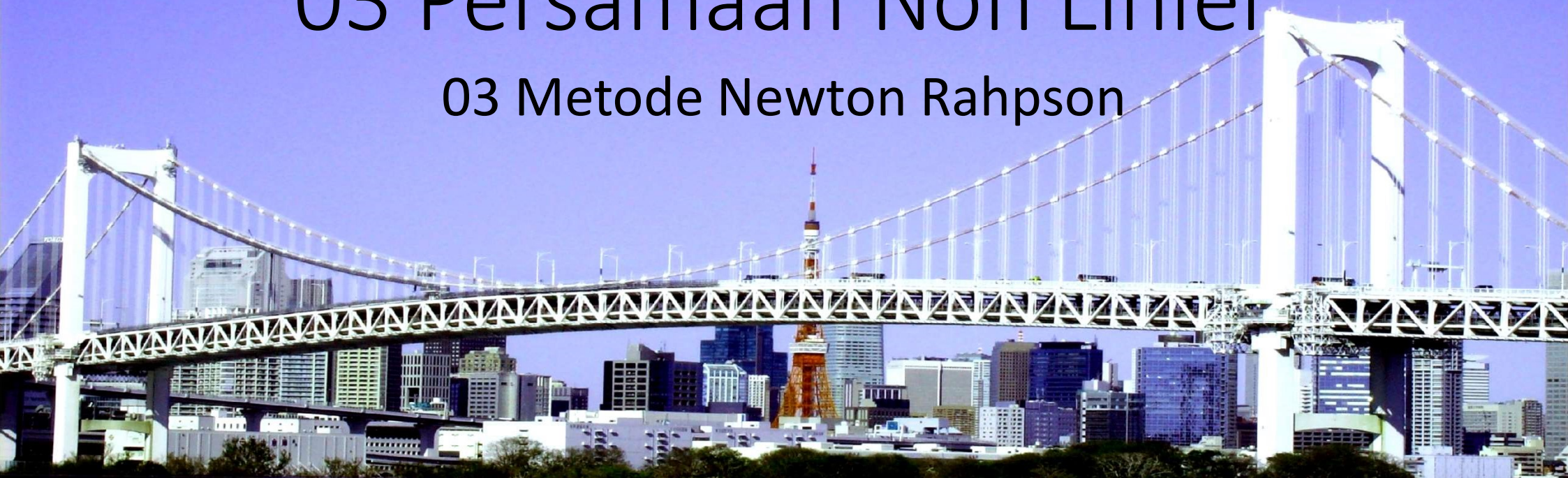
```
function f_y = contoh32(y)
%   Faktor Kompresibilitas Gas Ideal
%       1 - y + y^2 - y^3
%       z = -----
%               1 - y^3
%       z = 0,896

%       Nama File : contoh32.m
%       Surakarta, Oktober 2005
% -----

z = 0.892;
f_y = (1-y+y.^2-y.^3)-z.*(1-y.^3);
```

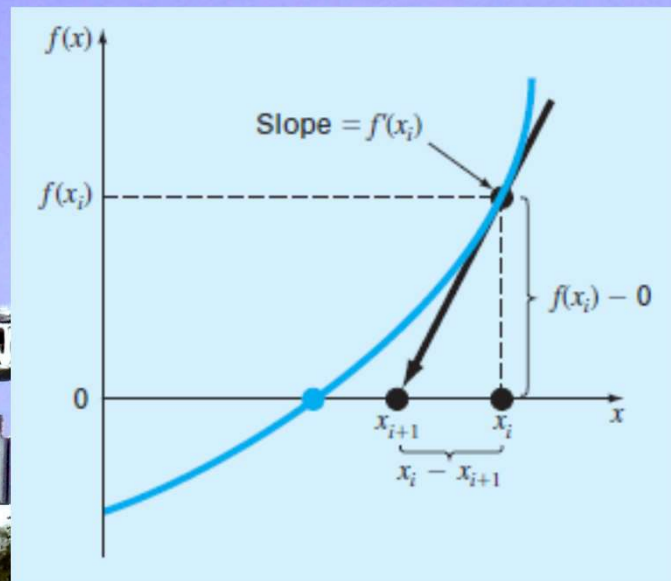
# 03 Persamaan Non Linier

## 03 Metode Newton Rahnpson



# NEWTON-RAPHSON METHOD

- Newton-Raphson Method is one of the most powerful and well-known numerical methods for solving a root-finding problem.
- If the initial guess at the root is  $x_i$ , a tangent can be extended from the point  $[x_i, f(x_i)]$ . The point where this tangent crosses the  $x$  axis usually represents an improved estimate of the root.



Slope for  $x_i$  is derivatif function  $f(x)$

$$f'(x) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$







## Step by step solution

1. Determine the initial guess  $x_i$
2. Find  $f(x_i)$  &  $f'(x_i)$
3. Calculate  $x_{i+1}$  with equation
4. Check  $|x_{i+1} - x_i| < \text{tolerance}$  atau  
 $|f(x_i)| < \text{tolerance}$ ,

If yes, then finished.

If not,  $x_i \text{ new} = x_{i+1}$ , repeat form step (2)

**Problem Statement.** Use the Newton-Raphson method to estimate the root of  $f(x) = e^{-x} - x$  employing an initial guess of  $x_0 = 0$ .

**Solution.** The first derivative of the function can be evaluated as

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$

which can be substituted along with the original function into Eq. (6.6) to give

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1}$$



$i$	$x_i$	$\varepsilon_i$ (%)
0	0	100
1	0.500000000	11.8
2	0.566311003	0.147
3	0.567143165	0.0000220
4	0.567143290	$< 10^{-8}$

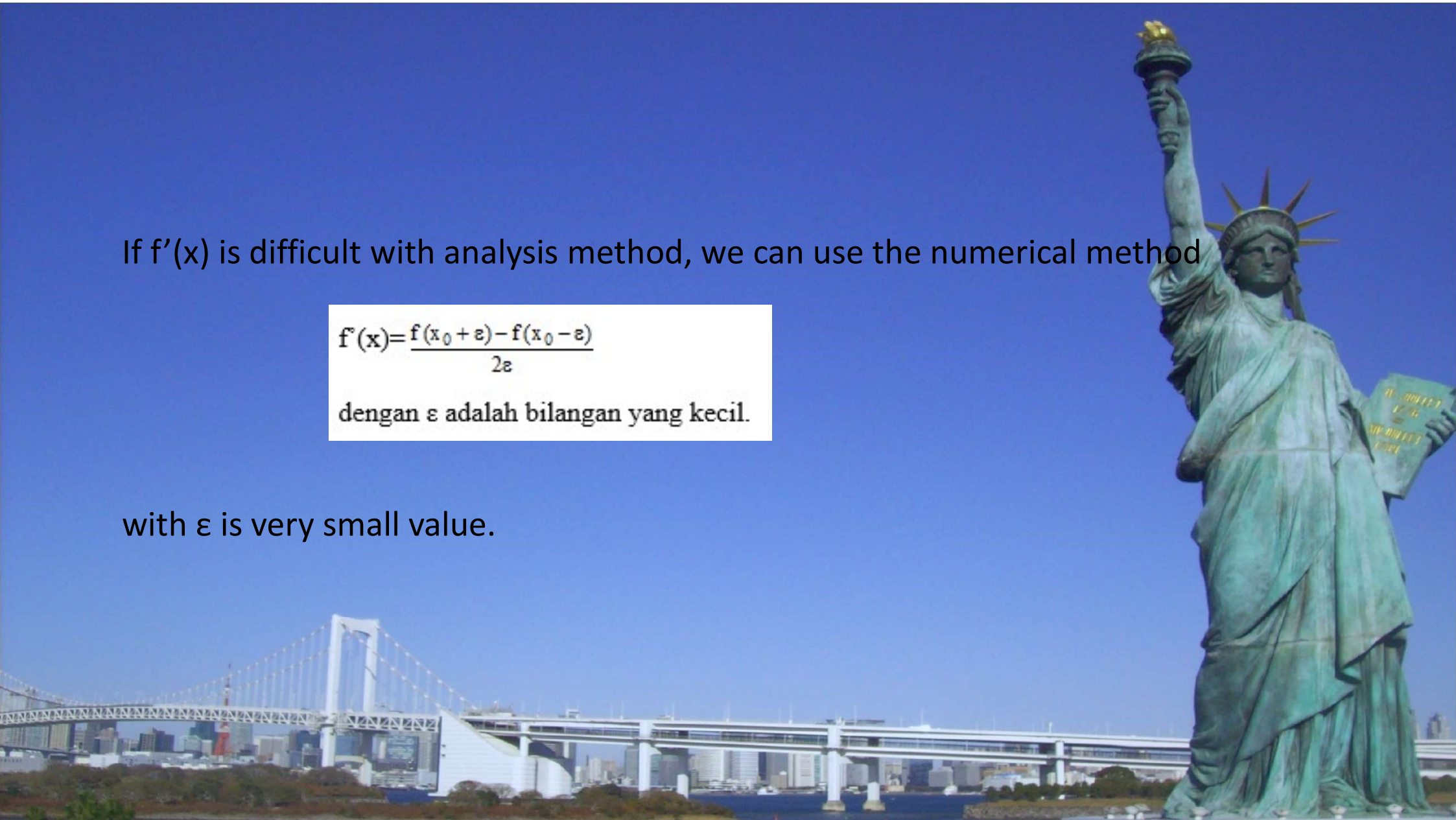


If  $f'(x)$  is difficult with analysis method, we can use the numerical method

$$f'(x) = \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0 - \varepsilon)}{2\varepsilon}$$

dengan  $\varepsilon$  adalah bilangan yang kecil.

with  $\varepsilon$  is very small value.



### Contoh 3.3. Temperatur Dew Point untuk Campuran Benzena dan Toluena

Tentukan temperatur dew point (Titik Embun) dan komposisi liquid dari suatu campuran gas benzena dan toluena pada tekanan 1 atm (760 mmHg). Komposisi uap adalah 0,77 fraksi mol benzena dan 0,23 fraksi mol toluena.

Campuran gas dan liquid diasumsikan sebagai campuran ideal. Kondisi kesetimbangan sesuai dengan Hukum Roult-Dalton,  $y_i P = x_i P_i^{\circ}$  Tekanan uap

murni dihitung dengan persamaan  $\log p^{\circ} = A - \frac{B}{T+C}$  untuk  $p^{\circ}$  dalam mmHg

dan T dalam  $^{\circ}\text{C}$

	Benzena	Toluena
A	6,89745	6,95334
B	1206,35	1343,94
C	220,237	219,377

```

clc
clear all
xnew=input(' Nilai untuk tebakan awal = ');
xold=0;
tol=0.0001;
eps=0.0001;

disp ' x-old      f(x-old) '
while abs(xnew-xold)>tol
    xold=xnew;
    fxold=contoh33(xold);
    t=[ '      'num2str(xold) '      'num2str(fxold) ];
    disp (t)
    fmin=contoh33(xold-eps);
    fplus=contoh33(xold+eps);
    dtx=(fplus-fmin)/2/eps;
    xnew=xold-fxold/dtx;
end
t=[ 'akar persamaan, x = 'num2str(xold) '      f(x) = 'num2str(fxold)];
disp(t)

```

```

function fT=contoh33(T)
P=760;          % Konversi dari atm ke mmHg
y1=0.77;
y2=0.23;
p1o=10^(6.89745-1206.35/(T+220.237));
p2o=10^(6.95334-1343.94/(T+219.377));
x1=y1*P/p1o;
x2=y2*P/p2o;
fT=x1+x2-1;

```

### Contoh 3.4. Hubungan Faktor Friksi suatu Pelarut dengan Bilangan Reynolds

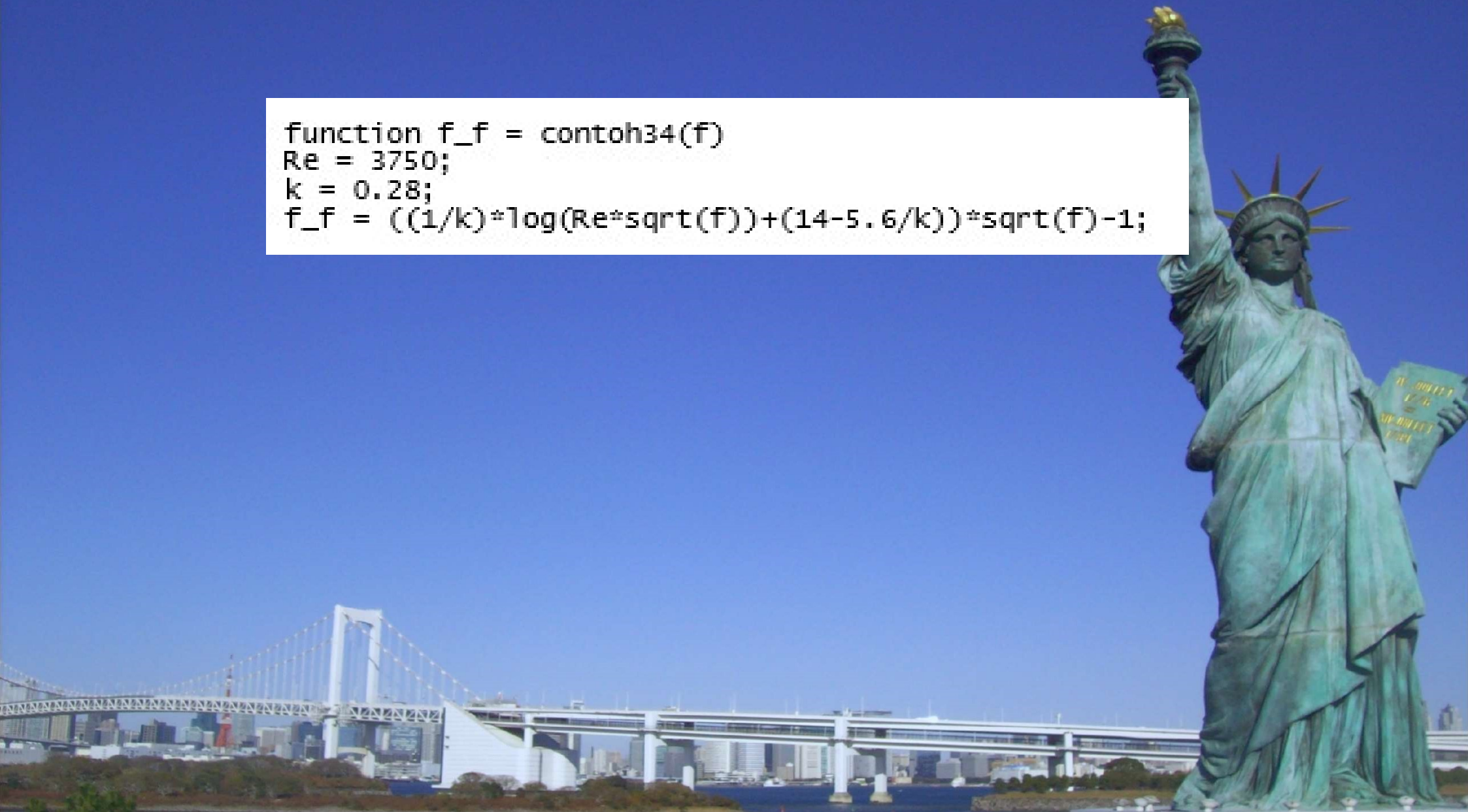
Hubungan faktor friksi untuk aliran suatu pelarut dengan bilangan Reynolds (Re) secara empiris adalah

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \left(\frac{1}{k}\right) \ln(\text{Re} \sqrt{f}) + \left(14 - \frac{5,6}{k}\right)$$

dengan  $k$  = konsentrasi larutan dan  $f$  adalah faktor friksi. Tentukanlah  $f$ , jika  $\text{Re} = 3750$  dan  $k=0,28$

Program penyelesaian dengan Metode Newton-Raphson. Karena bekerja pada bilangan yang lebih kecil, toleransi dapat kita turunkan sampai  $10^{-7}$ .

```
function f_f = contoh34(f)
Re = 3750;
k = 0.28;
f_f = ((1/k)*log(Re*sqrt(f)))+(14-5.6/k)*sqrt(f)-1;
```





# 03 Persamaan Non Linier

04 Fungsi  $f_{zero}$





# Persamaan aljabar non linier

Metode Grafik

Metode Dua Bagian

Metode Newton Raphson

Fungsi fzero



## fzero function

- The fzero function is designed to find the real root of a single equation. A simple representation of its syntax is :

$$x = \text{fzero}(\text{'function'}, x_0)$$

where *function* is the name of the function being evaluated, and  $x_0$  is the initial guess.

# Example

$$x^3 - 10x^2 + 29x - 20 = 0$$

find  $x$  with  $x_0 = 7$



# Example 1

$$x^3 - 10x^2 + 29x - 20 = 0$$

find x with x0 = 7

---

```
function y=f1(x)
y=x^3-10*x^2+29*x-20
```

---

```
%Main Program
x0=7
Akar=fzero('f1',x0)
```



## Example 2

- Here is a simple MATLAB session that solves for the root of a simple quadratic:

$$x^2 - 9 = 0.$$

Try for  $x_0 = 4$  and  $x_0 = -4$





## Example 3

Find  $x$  for around  $x_0 = 0$  this equation:

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$



## Example 4

Find  $x$  with  $x_0 = 0.5$  for

$$e^x - 3x = 0$$





## Example

Hubungan faktor friksi untuk aliran suatu pelarut dengan bilangan Reynolds (Re) secara empiris adalah

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \left( \frac{1}{k} \right) \ln(\text{Re} \sqrt{f}) + \left( 14 - \frac{5,6}{k} \right)$$

dengan k = konsentrasi larutan dan f adalah faktor friksi. Tentukanlah f, jika Re = 3750 dan k=0,28



# lanjutan

```
function f_f = friksi(f)
```

```
Re = 3750;
```

```
k = 0.28;
```

```
f_f = ((1/k)*log(Re*sqrt(f)) + (14-  
5.6/k))*sqrt(f)-1;
```



## Example

Untuk menghitung volum  $\text{CO}_2$  pada tekanan  $1.10^4$  kPa dan temperatur  $340^0\text{K}$ , dapat digunakan persamaan EOS (*equation of state*) Peng-Robinson

$$P = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V(V + b) + b(V - b)}$$

dengan  $a = 364,61 \text{ m}^6\text{kPa}/(\text{kgmol})^2$  dan  $b = 0,02664 \text{ m}^3/\text{kgmol}$   $R=8,3137 \text{ m}^3\text{kPa}/\text{kgmol K}$ . Tentukanlah  $V$  dengan tebakan awal  $V$ , gunakan EOS gas ideal ( $PV=RT$ )



## Example 7

Hubungan faktor kompresibilitas gas ideal dalam bentuk

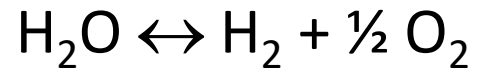
$$z = \frac{1 - y + y^2 - y^3}{1 - y^3}$$

dengan  $y$  adalah koreksi dibagi volum molar. Jika  $z = 0,892$  berapakah  $y$  ?



## Example 8

- Uap air didisosiasikan (dipecah) menjadi H<sub>2</sub> dan O<sub>2</sub> pada tekanan 0,2 atm sebagai berikut:



- Fraksi molekul (x) dari H<sub>2</sub>O dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$k_p = \frac{x}{(1-x)} \sqrt{\frac{2p}{(2+x)}}$$

- Jika  $k_p = 0,4568$  tentukanlah x yang memenuhi persamaan di atas.



Tentukan temperatur dew point (Titik Embun) dan komposisi liquid dari suatu campuran gas benzena dan toluena pada tekanan 1 atm (760 mmHg). Komposisi uap adalah 0,77 fraksi mol benzena dan 0,23 fraksi mol toluena.

	<b>Benzena</b>	<b>Toluena</b>
A	6,89745	6,95334
B	1206,35	1343,94
C	220,237	219,377

Campuran gas dan liquid diasumsikan sebagai campuran ideal. Kondisi kesetimbangan sesuai dengan Hukum Roul-Dalton,  $y_i P = x_i P_i^0$  Tekanan uap murni dihitung dengan persamaan untuk  $p^0$  dalam mmHg dan T dalam  $^{\circ}\text{C}$

$$\log(P_i^0) = A - \frac{B}{C + T}$$

## Example 10

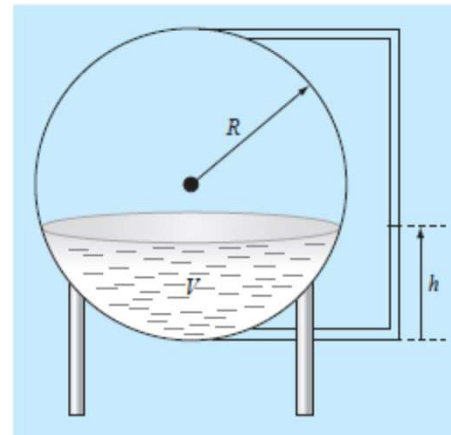
Sebuah tangki berbentuk bola sedang dirancang. Volume cairan dapat dihitung dg persamaan :

$$V = \pi h^2 \frac{[3R - h]}{3}$$

Dg

$V$  = volume ( $m^3$ ),  $h$  = kedalaman air dalam tangki (m), dan  $R$  = jari-jari tangki. Jika  $R$  adalah 3 meter, berapakah  $h$  agar volume tangki menjadi  $30 m^3$ .

Ans  $h = 2,0269$



## Example 11

Persamaan berikut digunakan untuk saluran rektanguldar terbuka :

$$Q = \frac{\sqrt{S}(BH)^{5/3}}{n(B + 2H)^{2/3}}$$

Dengan  $Q$  = aliran ( $\text{m}^3/\text{detik}$ ),  $S$  = slope ( $\text{m}/\text{m}$ ),  $H$  = kedalaman ( $\text{m}$ ), dan  $n$  adalah koefisien kekasarana. Tentukan  $H$  jika diberikan  $Q = 5$ ,  $S = 0,0002$ ,  $B = 20$ , dan  $n = 0,03$ .

Ans  $H = 0.7023$





Suatu campuran gas mempunyai kapasitas panas

$$C_p = 7,053 + 1,2242 \cdot 10^{-3} T - 2,6124 \cdot 10^{-7} T^2$$

T dalam °F dan  $C_p$  dalam Btu/lbmol °F. Jika **panas yang dilepaskan** untuk menurunkan temperatur campuran gas panas tersebut dari 550 °F adalah 2616 Btu/lbmol gas sampai temperatur berapakah campuran gas tersebut dapat didinginkan.

$$q = \int_{T_0}^T C_p dt$$

Sampai berapakah campuran gas tersebut dapat didinginkan ?





Persamaan panas spesifik udara kering  $C_p$  dalam  $\text{kJ}/(\text{kg K})$  sebagai fungsi temperatur dalam K:

$$C_p = 0,99403 + 1,671 \times 10^{-4}T + 9,7215 \times 10^{-8}T^2 - 9,5838 \times 10^{-11}T^3 + 1,9520 \times 10^{-14}T^4$$

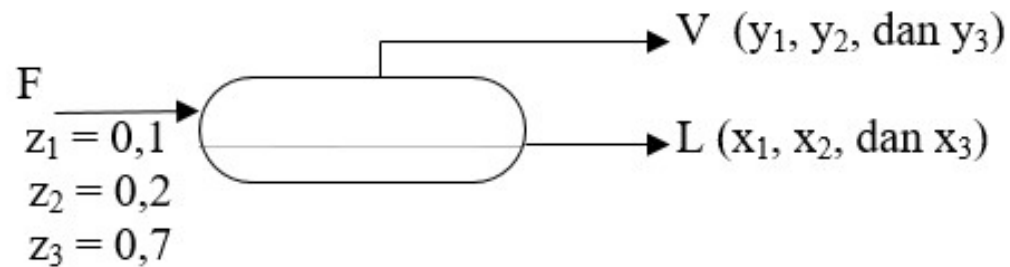
Susunlah script Matlab

Plot  $C_p$  vs  $T$  dengan kisaran 0 sampai 1200 K.

Dari grafik hasil (a) sebagai perkiraan awal, tentukan temperatur untuk panas spesifik 1,2  $\text{kJ}/(\text{kg K})$  dengan fzero.



Campuran hidrokarbon liquid  $\text{CH}_4(1)$ ,  $\text{C}_2\text{H}_6(2)$ , dan  $\text{C}_3\text{H}_8(3)$  masuk ke *flash drum distillation* pada suhu  $50\text{ }^\circ\text{C}$  dan  $200\text{ psia}$ . Jika hubungan kesetimbangan phase adalah  $y_i = K_i x_i$ , tentukanlah komposisi liquid dan uap yang meninggalkan *flash drum*. Neraca massa  $z_i = x_i L + y_i (1 - L)$ . Dengan mensubstitusi  $y_i$  maka  $x_i = z_i / (L + K_i(1-L))$ . Tebaklah  $L$  sehingga  $\sum x_i = 1$ .



$$K_1 = 10,0$$

$$K_2 = 1,76$$

$$K_3 = 0,52$$



Suatu cairan akan dialirkan dari tangki 1 ke tangki 2 melalui pipa berdiameter  $D$ , dengan bantuan pompa. Panjang ekuivalen pipa,  $L_e$ . Dari persamaan Bernoulli antara titik 1 dan titik 2 diperoleh persamaan berikut :

$$z_2 - z_1 + \frac{f.L_e.v^2}{2.g.D} - H_m = 0$$

faktor friksi didekati dengan persamaan empiris :

$$f = \frac{0,0596}{Re^{0,215}} \quad \text{dengan} \quad Re = \frac{\rho.v.D}{\mu}$$

Karakteristik pompa sentrifugal yang dapat dipakai berupa hubungan antara head pompa ( $H_m$ , cm) dengan debit ( $Q$ , cm<sup>3</sup>/dtk) dapat didekati dengan persamaan :

$$H_m = 3718,5 - 2,34967xQ + 7,8474.10^{-4}xQ^2 - 9,5812.10^{-8}xQ^3$$

Debit aliran dihitung dengan persamaan :

$$Q = \frac{\pi}{4} . D^2 . v$$

Data-data yang diketahui :  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ ;  $\mu = 0,01 \text{ g/cm.dtk}$ ;  $g = 981 \text{ cm/dtk}^2$ ;  $z_1 = 300 \text{ cm}$ ;  $z_2 = 900 \text{ cm}$ ;  $D = 6 \text{ cm}$ ;  $L_e = 30.000 \text{ cm}$ . Hitung berapa kecepatan aliran dalam pipa ( $v$ ) dan debitnya ( $Q$ ).

$$v_{hit} = 227.6735$$

$$Q_{hit} = 2.8610e+03$$



The Redlich-Kwong equation of state is given by

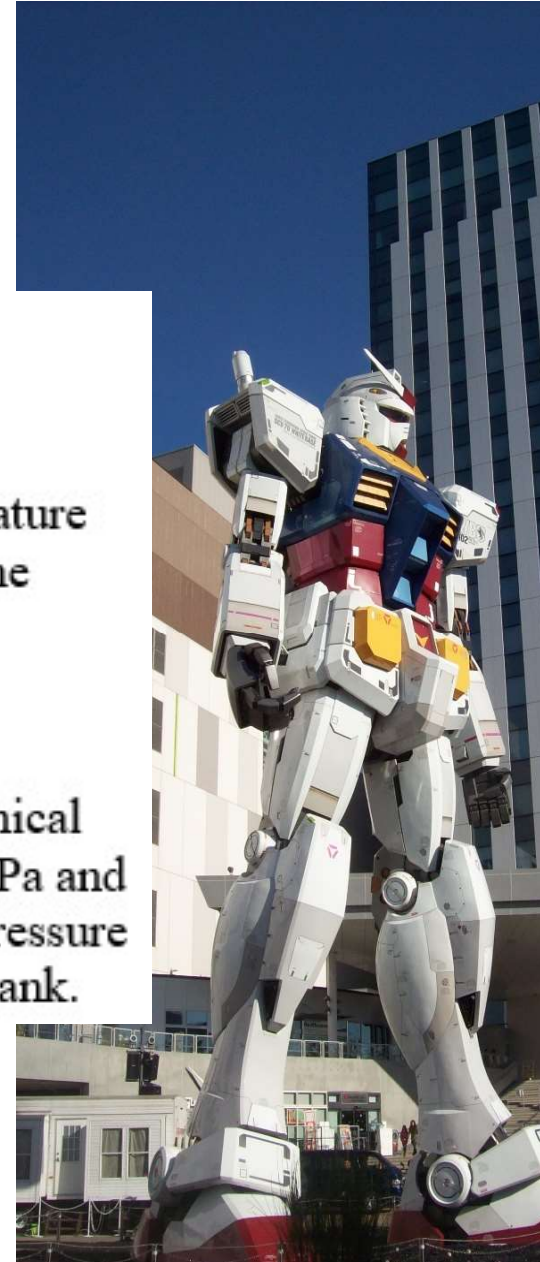
$$p = \frac{RT}{(v - b)} - \frac{a}{v(v + b)\sqrt{T}}$$

where  $R$  = the universal gas constant [= 0.518 kJ/(kg K)],  $T$  = absolute temperature (K),  $p$  = absolute pressure (kPa), and  $v$  = the volume of a kg of gas ( $\text{m}^3/\text{kg}$ ). The parameters  $a$  and  $b$  are calculated by

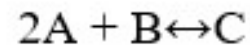
$$a = 0.427 \frac{R^2 T_C^{2.5}}{p_C}$$

$$b = 0.0866R \frac{T_C}{p_C}$$

where  $p_C$  = critical pressure (kPa) and  $T_C$  = critical temperature (K). As a chemical engineer, you are asked to determine the amount of methane fuel ( $p_C = 4600$  kPa and  $T_C = 191$  K) that can be held in a  $3 \text{ m}^3$  tank at a temperature of  $-40^\circ\text{C}$  with a pressure of 6500 kPa. Calculate  $v$  and determine the mass of methane contained in the tank.



A reversible chemical reaction



can be characterized by the equilibrium relationship

$$K = \frac{C_C}{C_A^2 C_B}$$

where the nomenclature  $C_i$  represents the concentration of constituent  $i$ . Suppose that we define a variable  $x$  as representing the number of moles of C that are produced. Conservation of mass can be used to reformulate the equilibrium relationship as

$$K = \frac{(C_{CO} + x)}{(C_{AO} - 2x)^2 (C_{BO} - x)}$$

where the subscript  $o$  designates the initial concentration of each constituent. If  $K = 0.016$ ,  $C_{AO} = 42$ ,  $C_{BO} = 28$ , and  $C_{CO} = 4$ , determine the value of  $x$ !

