# Tugas Kapita Selekta Matematika Sekolah


Nama : Irma Rachmah Hidayah
NIM : S852002013
Matakuliah : Kapita Selekta Matematika Sekolah (MAT71204)
Dosen : Dr. Riyadi, M.Si


---

**Problems of Problem Solving Strategies by Arthur Engel Page 208**

15. Let $\alpha$ be any real number such that $\alpha+\frac{1}{\alpha}\in Z$. Prove that $\alpha^n+\frac{1}{\alpha^n}\in Z$ for any n$\in$N.

Solution:

Pembuktian Induksi Matematika (PIM)

- Langkah 1, menunjukkan bahwa n=1 benar.

$$\alpha^1+\frac{1}{\alpha^1}\in Z=\alpha+\frac{1}{\alpha}\in Z$$

Karena $\alpha+\frac{1}{\alpha}\in Z$ maka $\alpha^n+\frac{1}{\alpha^n}\in Z$ benar untuk n=1

- Langkah 2, mengasumsikan bahwa n=k benar.

$$\alpha^k+\frac{1}{\alpha^k}\in Z$$



- Langkah 3, membuktikan bahwa n=k+1 benar.

$$\alpha^{k+1}+\frac{1}{\alpha^{k+1}}=\alpha^k\cdot\alpha+\frac{1}{\alpha^k\cdot\alpha}=\left(\alpha^k+\frac{1}{\alpha^k}\right)\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-\left(\alpha^{k-1}+\frac{1}{\alpha^{k-1}}\right)$$

Himpunan dari bilangan bulat Z tertutup pada perkalian dan pengurangan.

Karena $\alpha+\frac{1}{\alpha}\in Z$ $\alpha^k+\frac{1}{\alpha^k}\in Z$ maka $\left(\alpha^k+\frac{1}{\alpha^k}\right)\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\in Z$

Dan $\alpha^{k-1}+\frac{1}{\alpha^{k-1}}\in Z$ maka $\left(\alpha^k+\frac{1}{\alpha^k}\right)\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-\left(\alpha^{k-1}+\frac{1}{\alpha^{k-1}}\right)\in Z$

Maka $\left(\alpha^{k+1}+\frac{1}{\alpha^{k+1}}\right)$ benar untuk n=k+1$\in Z$

- Dengan teorema Induksi Matematika **terbukti** bahwa $\alpha^n+\frac{1}{\alpha^n}\in Z$ benar untuk bilangan bulat positif n$\in$N.
- **Terbukti**

-----------------------------------------------------------------------------------------------------

16. Prove that $1 < \frac{1}{(n+1)} + \ldots + \frac{1}{(3n+1)} < 2$

Solution:

Pembuktian Induksi Matematika (PIM)

- Langkah 1, menunjukkan bahwa n=1 benar.

  $$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$$

karena $1 < \frac{13}{12} < 2$ maka $1 < \frac{1}{(n+1)} + \ldots + \frac{1}{(3n+1)} < 2$ benar untuk n=1

- Langkah 2, mengasumsikan bahwa n=k benar.

  $$1 < \frac{1}{(k+1)} + \ldots + \frac{1}{(3k+1)} < 2$$

- Langkah 3, membuktikan bahwa n=k+1 benar.

$$1 < \frac{1}{((k+1)+1)} + \ldots + \frac{1}{(3(k+1)+1)} < 2 = 1 < \frac{1}{(k+2)} + \ldots + \frac{1}{(3k+4)} < 2$$

$$P_{k+1} = \frac{1}{(k+2)} + \ldots + \frac{1}{(3k+4)} = \frac{1}{(k+2)} + \ldots + \frac{1}{(3k+1)} + \frac{1}{(3k+2)} + \frac{1}{(3k+3)} + \frac{1}{(3k+4)}$$



$$P_{k+1} = \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{3k+1}\right) - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}$$

$$P_{k+1} = P_k + \frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)}$$

Jika $P_k > 1$ maka $P_{k+1} = P_k + \frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)} > 1$

Kita tahu bahwa k $\in N$ , $k+2 \geq k+2$ maka $\frac{1}{k+2} \leq \frac{1}{k+2}$

Demikian pula, $\frac{1}{k+3} < \frac{1}{k+2} \cdots \frac{1}{3k+4} < \frac{1}{k+2}$

$$\left(\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{3k+4}\right) < \left(\frac{k-1+k+4}{k+2}\right)$$

Jadi, $P_{k+1} = \left(\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{3k+4}\right) < \left(\frac{2k+3}{k+2}\right)$

Lalu, $2 - \left(\frac{2k+3}{k+2}\right) = \frac{2k+4-2k-3}{k+2} = \frac{1}{n+2} > 0$

Karena $\left(\frac{2k+3}{k+2}\right) < 2$ maka $P_{k+1} < 2$

- Dengan teorema Induksi Matematika **terbukti** bahwa $1 < \frac{1}{(n+1)} + \ldots + \frac{1}{(3n+1)} < 2$ benar
- **Terbukti**

---

17. For all $n \in N$ ,we have $f(n) = g(n)$ where

$$f(n) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n},\ g(n) = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

Solution:

$$f(n) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$f(n) = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$g(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$$



Pembuktian Induksi Matematika (PIM)

- Langkah 1, menunjukkan bahwa n=1 benar.

$$f(1) = 1 - \frac{1}{2}(1) + \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6} \text{ dan } g(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

- Di langkah 1, $f(1) \neq g(1)$ maka **tidak benar** bahwa $f(n) = g(n)$
- Dengan teorema Induksi Matematika **tidak terbukti** bahwa $f(n) = g(n)$ benar untuk semua $n \in N$ .
- **Tidak Terbukti**

Nomor 17 akan **terbukti** jika mengganti tanda penyebut dari f f(n) 2n+1 menjadi 2n-1

$$\text{“ } f(n) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \text{ ”}$$

Solution:

Pembuktian Induksi Matematika (PIM)

- Langkah 1, menunjukkan bahwa n=1 benar.

$$f(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ dan } g(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Karena $f(1) = g(1)$ maka $f(n) = g(n)$ benar untuk n=1.

- Langkah 2, mengasumsikan bahwa n=k benar.

$f(k) = g(k)$

Maka $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} \ldots + \frac{1}{2k}$ (Persamaan 1)

- Langkah 3, membuktikan bahwa n=k+1 benar.

$$f(k+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1}$$

$$f(k+1) = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \frac{1}{2k+1}$$

$$f(k+1) = \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k}\right) + \frac{1}{2k+1}$$ (Dari Persamaan 1)

$$f(k+1) = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1}$$

$$f(k+1) = g(k+1)$$

Karena $f(k+1) = g(k+1)$ benar $f(n) = g(n)$ untuk n=k+1 $\in Z$



- Dengan teorema Induksi Matematika **terbukti** bahwa $f(n) = g(n)$ benar untuk bilangan bulat positif n $\in$ N.
- **Terbukti**

---

18. Prove that $(n+1)(n+2)\ldots 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)$ for all n $\in$ N.

Solution:

Pembuktian Induksi Matematika (PIM)

- Langkah 1, menunjukkan bahwa n=1 benar.

  $2(1) = 2^1 \cdot (2(1) - 1)$

  $2 = 2(1)$

  $2 = 2$

  Karena $2 = 2(1)$ maka $(n+1)(n+2)\ldots 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)$ benar untuk n=1

- Langkah 2, mengasumsikan bahwa n=k benar.

  $(k+1)(k+2)\ldots 2k = 2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)$
- Langkah 3, membuktikan bahwa n=k+1 benar.

  $(k+1)(k+2)\ldots 2k[2(2k+1)] = 2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)[2(2k+1)]$

  $(k+1)(k+2)\ldots(2k)[2(k+1) \cdot 2(k+1)] = 2^k 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)(2k+1)$

$(k+1)(k+2)\dots(2k)(2k+1)(2k+2) = 2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\dots(2k-1)(2k+1)$

Maka $(k+1)(k+2)\dots 2k\left[2(2k+1)\right] = 2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\dots(2k-1)(2k+1)$ benar untuk n=k+1

- Dengan teorema Induksi Matematika **terbukti** bahwa
  $(n+1)(n+2)\dots 2n = 2^{n}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)$ benar untuk bilangan bulat positif $n \in N$.
- **Terbukti**

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Terimakasih**