Kalkulus I

Sistem Bilangan Real

Dr. Eko Pujiyanto, S.Si., M.T.
ekopujiyanto@ft.uns.ac.id
081 2278 3991
eko.staff.uns.ac.id/kalkulus1

Materi Kuliah

- Sistem bilangan real
- Aksioma lapangan
- Komponen bilangan real
- Aksioma urutan
- Aksioma kelengkapan.
- Kalimat matematis
- Persamaan

Sistem bilangan real

- Belajar Kalkulus **PERLU** mempelajari *Sistem Bilangan Real* dan *Fungsi*
- Konsep utama Kalkulus [limit, kontinu, turunan dan integral] **DIKAITKAN** dengan Fungsi Real
- Intuisi **Geometri** **DIPERLUKAN** sebagai alat bantu untuk memahami konsep dan gambaran situasinya

Sistem bilangan real

- Dasar utama pengembangan matematika adalah **teori bilangan** dan **geometri.**

- Sistem bilangan real (diberi lambang R) adalah **himpunan** bilangan real yang disertai dengan operasi penjumlahan dan perkalian sehingga memenuhi **aksioma** lapangan, urutan dan kelengkapan.

Sistem bilangan real

- **Suatu aksioma** adalah basis dari sistem logika formal yang bersama-sama dengan aturan inferensi mendefinisikan logika.
- Kata **aksioma** dalam matematika juga disebut **postulat** yaitu suatu titik awal dari sistem logika.
  - Misalnya, 1+1=2
  - Melalui dua titik sembarang hanya dapat dibuat sebuah garis lurus.

Sistem bilangan real

- **Definisi :** pernyataan yg bernilai benar karena disepakati, dan tak perlu dibuktikan
  - Definisi di buat dengan menggunakan konsep yang belum terdifinisi dan atau konsep yang telah didifinisikan sebelumnya.
- **Teorema** adalah suatu pernyataan matematika yang masih memerlukan pembuktian dan pernyataan itu dapat ditunjukkan bernilai benar.

Aksioma Lapangan

Mengatur tentang :

- Ketertutupan operasi penjumlahan dan perkalian
- Sifat komutatif, asosiatif dan distributif
- Terdapat unsur 0 dan 1
- Invers terhadap penjumlahan dan perkalian
- Pengurangan dan pembagian
- Peubah, konstanta dan parameter

Aksioma lapangan

Pada $\boldsymbol{R}$ didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian (jumlah dan hasilkali bilangan real a dan b ditulis $a + b$ dan ab) yang memenuhi aksioma berikut.

- Jika $a, b \in \boldsymbol{R}$, maka $a + b \in \boldsymbol{R}$ dan $ab \in \boldsymbol{R}$, *sifat tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian*.
- Jika $a, b \in \boldsymbol{R}$, maka $a + b = b + a$ dan $ab = ba$, *sifat komutatif terhadap penjumlahan dan perkalian*.
- Jika $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$ dan $(ab)c = a(bc)$, *sifat asosiatif terhadap penjumlahan dan perkalian*.
- Terdapat 0 dan $1 \in \boldsymbol{R}$ $(0 \neq 1)$ sehingga $a + 0 = 0$ dan $a.1 = a$ untuk setiap $a \in \boldsymbol{R}$, *adanya unsur kesatuan terhadap penjumlahan dan perkalian*. Bilangan 0 dinamakan *unsur kesatuan terhadap penjumlahan* dan 1 *unsur kesatuan terhadap perkalian*.
- Jika $a \in \boldsymbol{R}$, maka terdapat $-a \in \boldsymbol{R}$ sehingga $a + (-a) = 0$, *adanya unsur negatif atau invers terhadap penjumlahan*. Bilangan real $-a$ dinamakan *negatif* atau *lawan* dari a.
- Jika $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$, maka terdapat $a^{-1} \in \boldsymbol{R}$ sehingga $a\,a^{-1} = 1$, *adanya unsur kebalikan atau invers terhadap perkalian*. Bilangan real a^{-1} dinamakan *kebalikan* dari a.
- Jika $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, maka $a(b + c) = ab + ac$, *sifat distributif*.

Aksioma lapangan

Teorema 1.2 Misalkan a, b, c, dan d bilangan real, maka

- $a = b \Rightarrow a + c = b + c$ dan $ac = bc$.
- $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ (*hukum pencoretan untuk penjumlahan*).
- $ac = bc, c \neq 0 \Rightarrow a = b$ (*hukum pencoretan untuk perkalian*).
- $a(b - c) = ab - ac$.
- $-(-a) = a$; $(a^{-1})^{-1} = a, a \neq 0$.
- $a.0 = 0 = 0.a$; $a(-b) = (-a)b = -ab$; dan $(-a)(-b) = ab$.
- $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ atau $b = 0$.
- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc; b, d \neq 0$.
- $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$ dan $\dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c} = \dfrac{a-b}{c}, c \neq 0$.
- $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d} = \dfrac{ad+bc}{cd}$ dan $\dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{d} = \dfrac{ad-bc}{cd}; c, d \neq 0$.
- $\dfrac{a}{c} . \dfrac{b}{d} = \dfrac{ab}{cd}; c, d \neq 0$, dan $\dfrac{a}{c} \Big/ \dfrac{b}{d} = \dfrac{ad}{bc}; b, c, d \neq 0$.

Aksioma lapangan

Teorema 2.1

Misalkan $a \in R$, maka

(i) $a.\,0 = 0$

(i) Berdasarkan M3, kita ketahui bahwa $a.1 = a$. Disini

$$a + a\,.\,0 = a\,.\,1 + a\,.\,0 = a\,.\,(1 + 0)$$

$$= a\,.\,1 = a$$

Berdasarkan teorema 1.1, kita simpulkan bahwa $a\,.\,0 = 0$

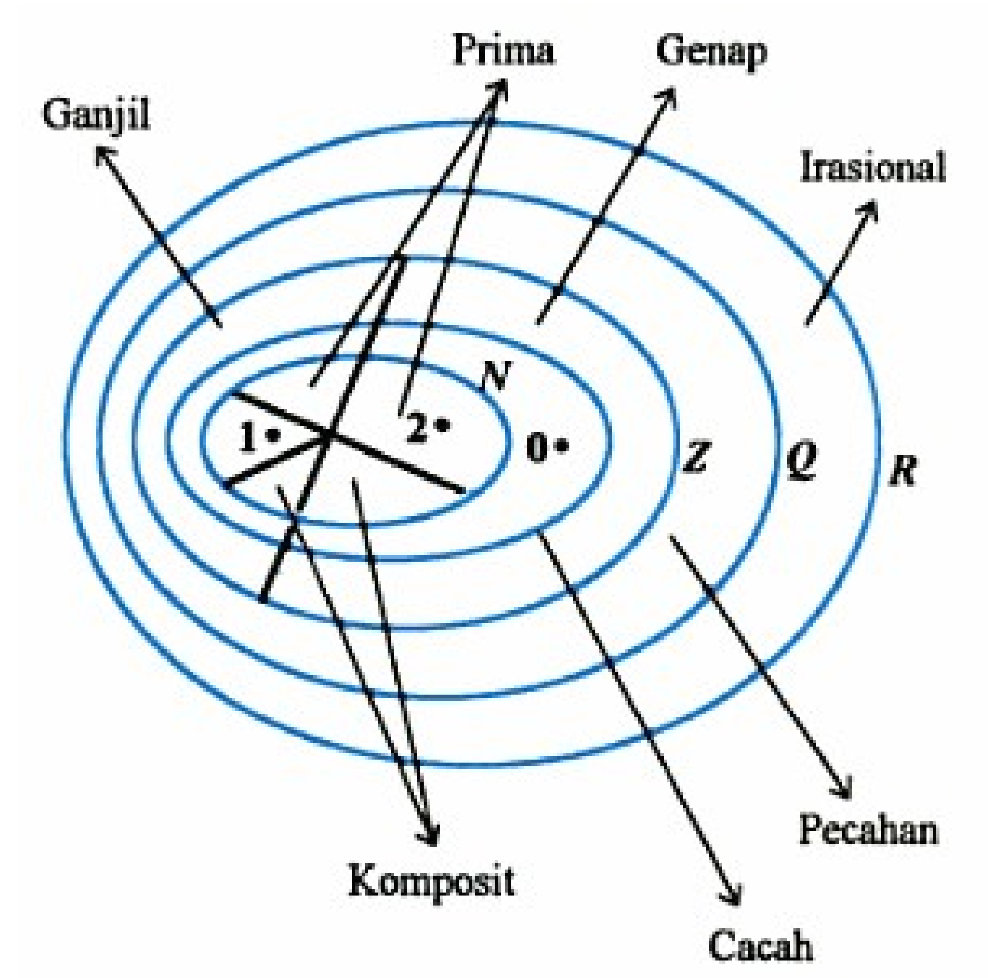
(M3) ada unsur $1 \in R$ sedemikian sehingga $1.\,a = a$ dan $a\,.1 = a$ untuk setiap $a \in R$

Teorema 1.1

(i) jika z, a di R sedemikian sehingga $z + a = a$, maka $z = 0$

(ii) jika u. b di R dan $b \neq 0$ sedemikian sehingga $u.\,b = b$, maka $b = 1$

Komponen Bilangan Real



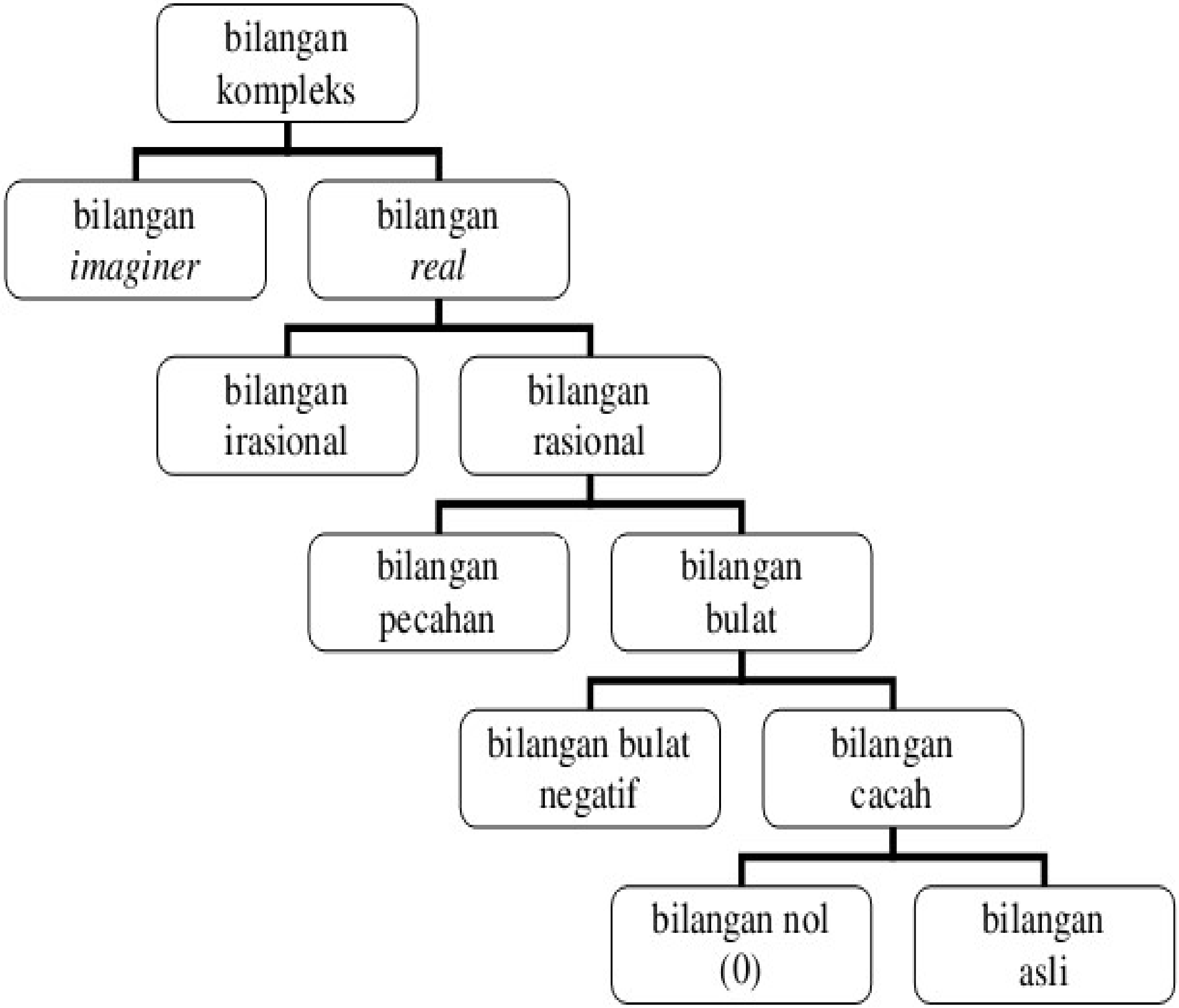
N = himpunan bilangan asli.

Z = himpunan bilangan bulat.

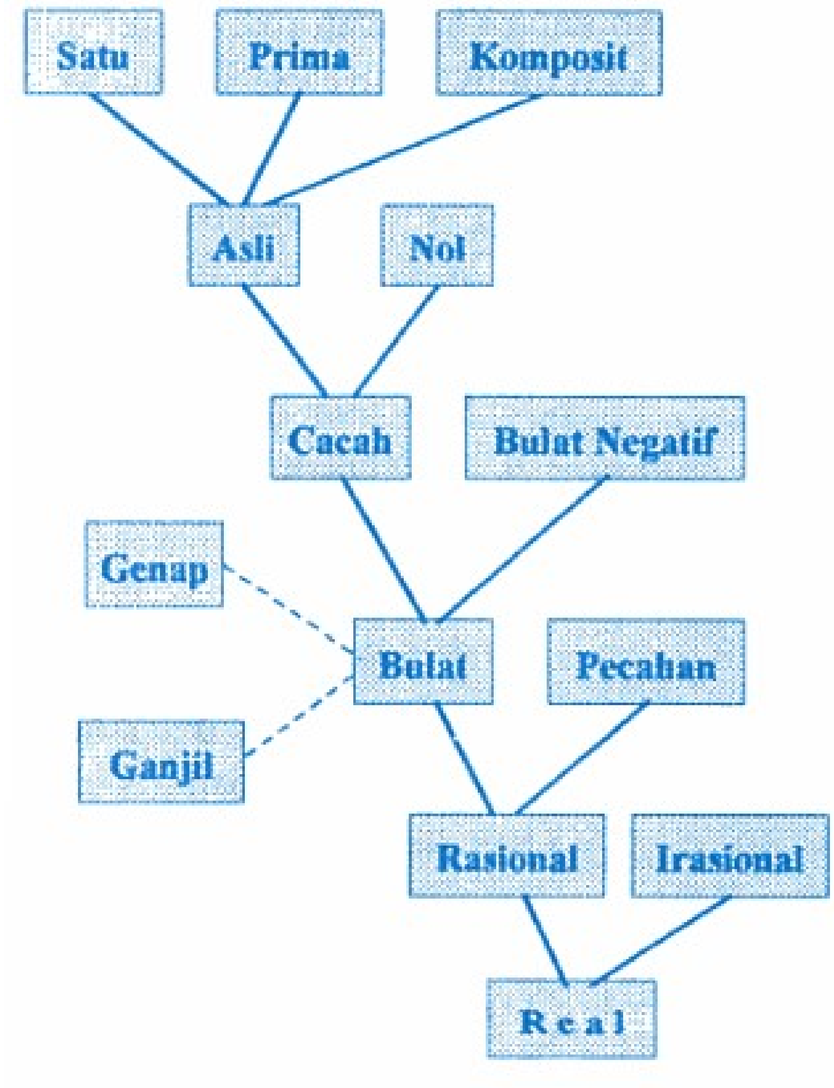
Q = himpunan bilangan rasional.

R = himpunan bilangan real.

Komponen Bilangan Real



Komponen Bilangan Real



Aksioma Urutan

Mengatur tentang :

- Pemunculan bilangan positif dan negatif
- Mengurutkan bilangan dari kecil ke besar
- Konsep nilai mutlak

Aksioma Urutan

Pada $\boldsymbol{R}$ terdapat suatu himpunan bagian yang unsurnya dinamakan *bilangan positif*, yang memenuhi aksioma berikut.

- Jika $a \in \boldsymbol{R}$, maka atau $a = 0$, atau a positif, atau $-a$ positif.
- Jumlah dan hasilkali dua bilangan positif adalah bilangan positif.

Catatan Bilangan positif tidak dapat didefinisikan sebagai bilangan yang lebih besar daripada 0, karena sampai saat ini kita belum mendefinisikan istilah *"lebih besar"*.

Aksioma Urutan

Definisi 1.3 Misalkan a dan b bilangan real.

- Bilangan a dikatakan *lebih besar* dari b, ditulis $a > b$, jika $a - b$ bilangan positif.
- Bilangan a dikatakan *lebih kecil* dari b, ditulis $a < b$, jika $b > a$.
- Lambang $\leq$ (lebih kecil atau sama dengan) dan $\geq$ (lebih besar atau sama dengan) menyatakan relasi: $a \leq b$ jika $a < b$ atau $a = b$, dan $a \geq b$ jika $a > b$ atau $a = b$.
- Pernyataan yang dihubungkan dengan tanda $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ dinamakan *pertaksamaan* atau *ketaksamaan*.
- Bilangan real a dikatakan *negatif* jika $-a$ adalah bilangan positif.

Teorema 1.4 **(a)** $a > 0 \Leftrightarrow a$ bilangan positif, **(c)** $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$,

(b) $a < 0 \Leftrightarrow a$ bilangan negatif, **(d)** $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$.

Aksioma Urutan

Teorema 1.5

Misalkan a, b, c, dan d bilangan real.

(a) Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$ (sifat transitif).

(b) Jika $a < b$ dan c sebarang, maka $a + c < b + c$.

(c) Jika $a < b$ dan $c < d$, maka $a + c < b + d$.

(d) Jika $a < b$ dan $c > 0$, maka $ac < bc$.

(e) Jika $a < b$ dan $c < 0$, maka $ac > bc$.

(f) Jika $0 < a < b$ dan $0 < c < d$, maka $ac < bd$.

(g) Jika $0 < a < b$, atau $a < b < 0$, maka $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Aksioma Urutan

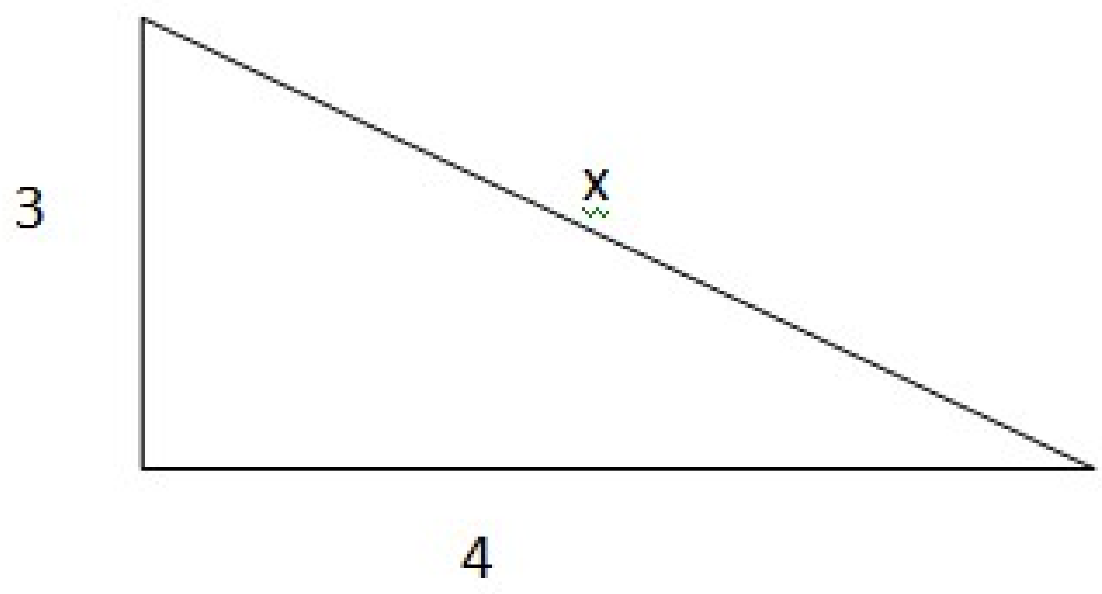
Definisi 1.6

- *Akar kuadrat* dari bilangan positif a, ditulis $\sqrt{a}$, didefinisikan sebagai bilangan positif x yang memenuhi $x^2 = a$.
- *Akar kubik* dari bilangan real a, ditulis $\sqrt[3]{a}$, didefinisikan sebagai bilangan real x yang memenuhi $x^3 = a$.
- Jika n bilangan genap positif, *akar ke-n* dari bilangan positif a, ditulis $\sqrt[n]{a}$, didefinisikan sebagai bilangan positif x yang memenuhi $x^n = a$.
- Jika n bilangan ganjil positif dan $n > 1$, *akar ke-n* dari bilangan positif a, ditulis $\sqrt[n]{a}$, didefinisikan sebagai bilangan x yang memenuhi $x^n = a$.

Selingan

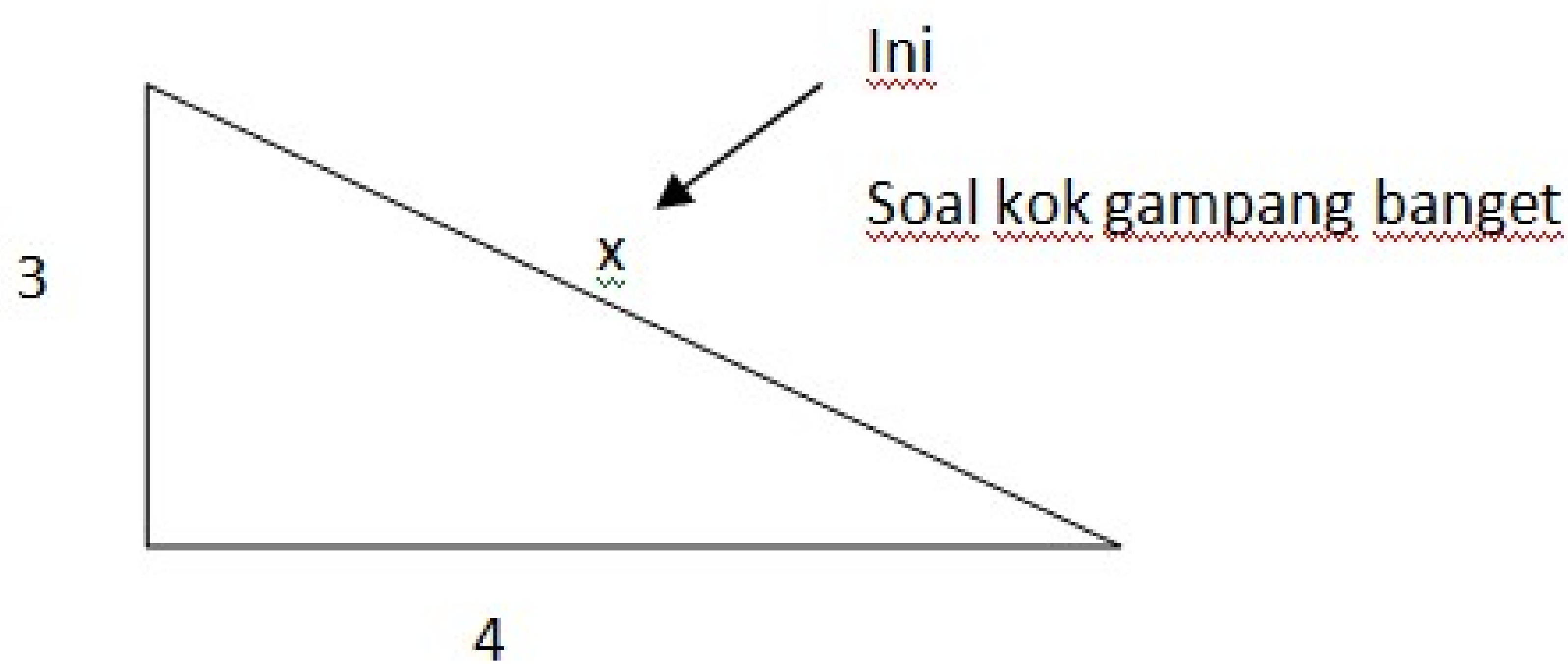
Ujian matematika anak SMP tentang teorema pythagoras

Carilah x pada gambar berikut



Selingan

Begini jawabannya



Selingan ..lagi ☺

Solving equation by one Blondie:

$$\frac{1}{n}\sin x = ?$$

$$\frac{1}{\cancel{n}}\mathrm{si}\cancel{n}\,x =$$

$$six = 6$$

Si:

$$\lim_{x \to 8} \frac{1}{x-8} = \infty$$

Entonces:

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{x-5} = 5$$

Aksioma Kelengkapan

Definisi 1.7

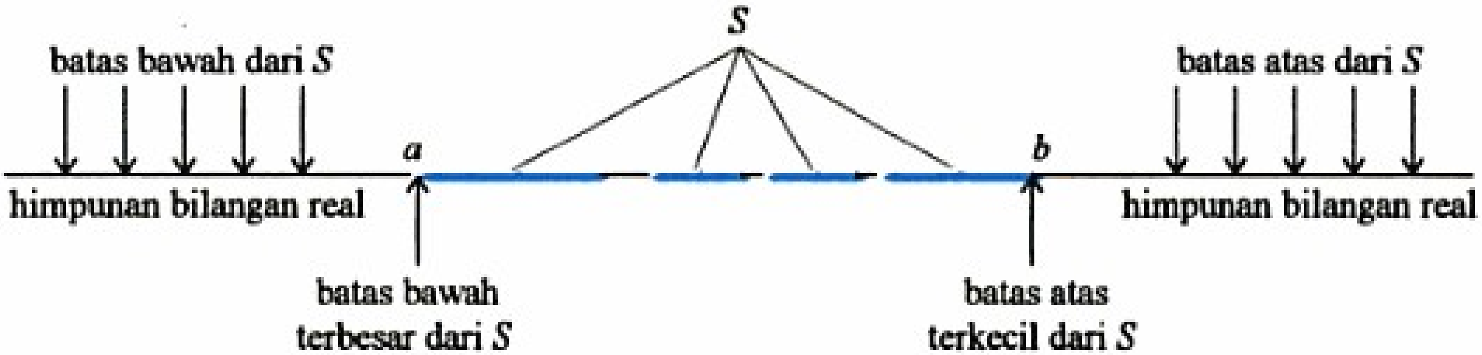
- Himpunan $S \subseteq \boldsymbol{R}$, $S \neq \varnothing$ dikatakan *terbatas di atas* jika terdapat bilangan real b sehingga $x \leq b$ untuk setiap $x \in S$. Dalam hal ini b dinamakan *batas atas* dari S.
- Himpunan $S \subseteq \boldsymbol{R}$, $S \neq \varnothing$ dikatakan *terbatas di bawah* jika terdapat bilangan real a sehingga $x \geq a$ untuk setiap $x \in S$. Dalam hal ini a dinamakan *batas bawah* dari S.
- Bilangan real b dikatakan *batas atas terkecil* (*supremum*) dari $S \subseteq \boldsymbol{R}$, $S \neq \varnothing$, ditulis $b = \sup S$, jika b suatu batas atas dari S dan batas atas lainnya lebih besar/sama dengan b.
- Bilangan real a dikatakan *batas bawah terbesar* (*infimum*) dari $S \subseteq \boldsymbol{R}$, $S \neq \varnothing$, ditulis $a = \inf S$, jika a suatu batas bawah dari S dan batas bawah lainnya lebih kecil/sama dengan a.

Aksioma Kelengkapan

Mengatur tentang :

- Perbedaan bilangan rasional dan real
- Korespondensi satu-satu antara bilangan real dengan titik pada garis
- Konsep selang

Aksioma Kelengkapan

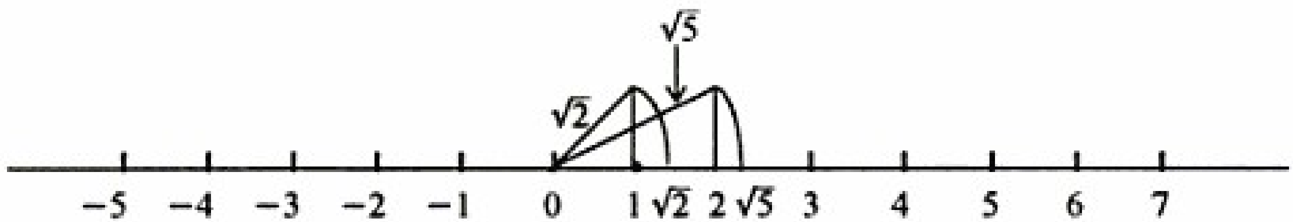


Gb.3 Batas Atas dan Batas Bawah dari $S \subseteq R$

Aksioma Kelengkapan Aksioma Kelengkapan pada Sistem Bilangan Real menyatakan bahwa setiap himpunan bagian tak kosong dari $\boldsymbol{R}$ yang terbatas di atas selalu mempunyai batas atas terkecil. Aksioma ini mengakibatkan bahwa setiap himpunan bagian tak kosong dari $\boldsymbol{R}$ yang terbatas di bawah selalu mempunyai batas bawah terbesar.

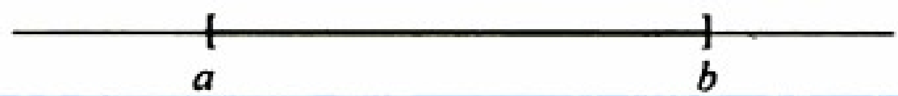
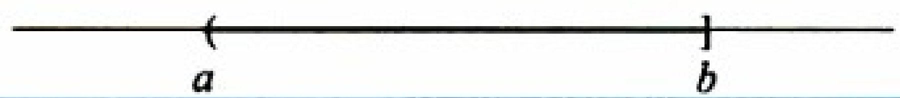
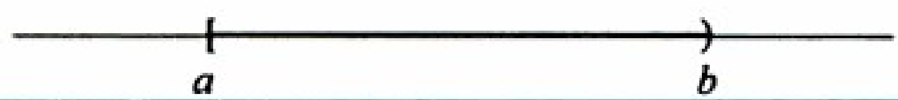
Aksioma Kelengkapan

Kemudian, sifat yang berkaitan dengan batas atas terkecil digunakan untuk membuktikan bahwa di antara setiap bilangan real terdapat tak hingga banyaknya bilangan rasional dan irasional. Berdasarkan ini, terdapat korespondensi satu-satu di antara himpunan bilangan real dan himpunan titik pada sebuah garis lurus. Akibatnya, kita dapat menggambarkan $\boldsymbol{R}$ sebagai himpunan titik sepanjang suatu garis lurus, yang dikenal sebagai *garis bilangan real*, lihat Gb.4.

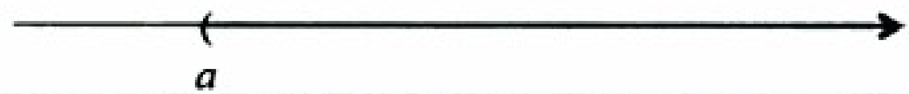
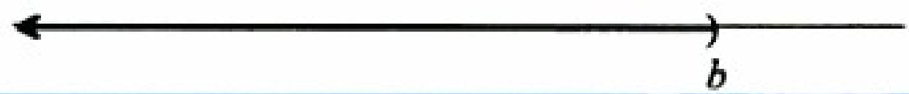
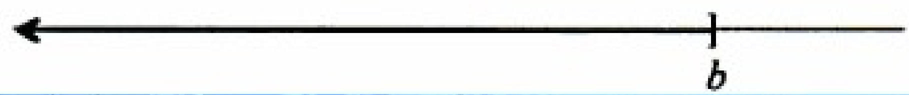
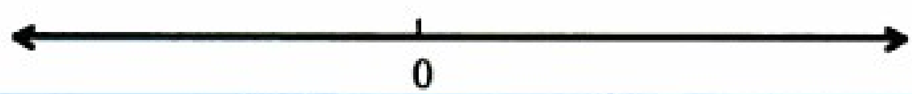


Gb.4 Garis Bilangan Real

Aksioma Kelengkapan

Selang Hingga	
Selang sebagai himpunan titik	*Gambar selang pada garis bilangan*
1. $(a,b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$	
2. $[a,b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$	
3. $(a,b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$	
4. $[a,b) = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}$	

Aksioma Kelengkapan

Selang tak Hingga	
Selang sebagai himpunan titik	*Gambar selang pada garis bilangan*
5. $(a,\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} : x > a\}$	
6. $[a,\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} : x \geq a\}$	
7. $(-\infty,b) = \{x \in \boldsymbol{R} : x < b\}$	
8. $(-\infty,b] = \{x \in \boldsymbol{R} : x \leq b\}$	
9. $(-\infty,\infty) = \boldsymbol{R}$	

Kalimat matematis

- Kalimat matematis adalah kalimat yang memiliki nilai salah atau benar.
- Jika nilainya dapat ditentukan secara langsung tanpa sebuah proses perhitungan, maka kalimat matematis dinamakan **kalimat tertutup**.
- Sedangkan jika tidak langsung (nilainya harus dicari melalui sebuah proses perhitungan) dinamakan **kalimat terbuka**.

Kalimat matematis

Contoh

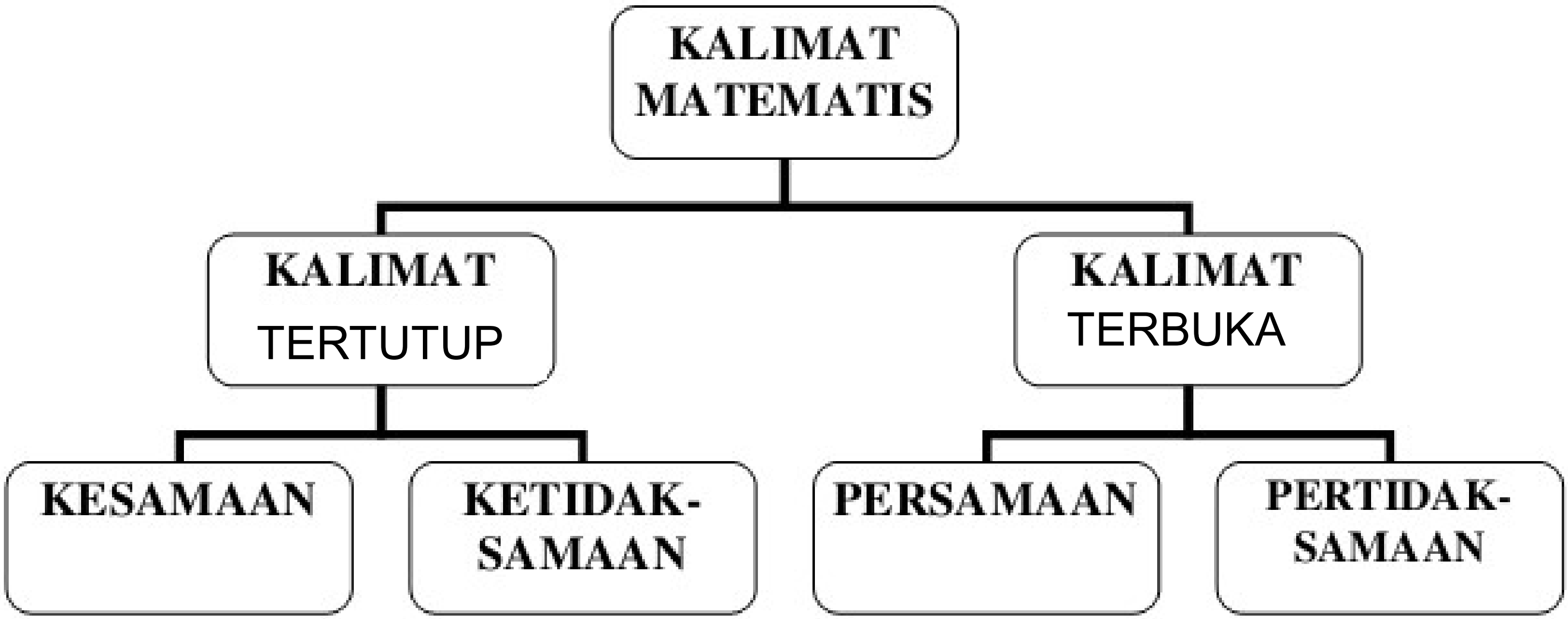
Kalimat tertutup : $2 + 3 = 5$

$3 \times 6 < 20$

Kalimat terbuka : $x + 3 = 5$

$3x < 20$

Kalimat matematis



Sumber : Mulyana, 2005

Kalimat matematis

Bentuk Aljabar Kalkulus selalu melibatkan fungsi sebagai obyeknya, yang selalu berkaitan dengan peubah, konstanta dan parameter, yang pengertiannya sebagai berikut.

- *Peubah* adalah suatu lambang untuk wakil unsur di suatu himpunan.
- *Konstanta* adalah lambang untuk wakil unsur di suatu himpunan berunsur satu, wakil unsurnya tentu saja tetap.
- *Parameter* adalah lambang yang mewakili unsur di suatu himpunan konstanta.
- *Bentuk aljabar* adalah suatu bentuk yang dapat diperoleh dengan sejumlah berhingga operasi aljabar atas peubah, konstanta dan parameter.

Sebagai ilustrasi, pada bentuk aljabar $x^2 + 2x + c$, x adalah peubah, 2 adalah konstanta, dan c adalah parameter. Perhatikan bahwa di sini nilai c dapat diisi konstanta sebarang.

Persamaan

- Persamaan kuadrat

Bentuk umum dari persamaan kuadrat adalah

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dengan $a \neq 0$, b dan c bilangan *real*. x variabel.

Persamaan

- Persamaan kuadrat

Jawab dari persamaan kuadrat dapat diperoleh dengan cara

1. **Metode faktorisasi.**

2. **Dengan menggunakan rumus**.

   Konsepsinya, jika x_1 dan x_2 jawab persamaan kuadrat, maka dipenuhi hubungan :

$$x_{1.,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

dalam formulasi tersebut, $b^2 - 4ac = D$, dinamakan **diskriminan.**

Persamaan

- Persamaan kuadrat

Nilai diskriminan dapat digunakan untuk menentukan ciri dari jawab persamaan. Jika

1) $D > 0$, maka persamaan kuadrat memiliki dua jawab bilangan *real*,
2) $D = 0$ maka persamaan memiliki satu jawab bilangan *real*,
3) $D < 0$ maka persamaan memiliki jawab bilangan kompleks.

Persamaan

- Persamaan kuadrat

Bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$, dinamakan

1) **definit positif**, jika $ax^2 + bx + c > 0$, untuk sembarang nilai x.

   Hal ini akan terjadi jika $D = b^2 - 4ac < 0$ dan $a > 0$.

2) **definit semi positif,** jika $ax^2 + bx + c \geq 0$, untuk sembarang nilai x.

   Hal ini terjadi jika $D = b^2 - 4ac \leq 0$ dan $a > 0$.

3) **definit negatif**, jika $ax^2 + bx + c < 0$, untuk sembarang nilai x.

   Hal ini terjadi jika $D = b^2 - 4ac < 0$ dan $a < 0$

4) **definit semi positif**, jika $ax^2 + bx + c \leq 0$, untuk sembarang nilai x.

   Hal ini terjadi jika $D = b^2 - 4ac \leq 0$ dan $a < 0$

Soal Latihan (Dari Buku Kalkulus , Martono, 1999)

Soal 1

Pada rangkaian operasi berikut, langkah manakah yang prosesnya salah?

$$x^2 - x^2 = x^2 - x^2 \quad \text{..........(1)}$$

$$(x + x)(x - x) = x(x - x) \quad \text{........(2)}$$

$$x + x = x \quad \text{...................(3)}$$

$$2x = x \quad \text{...................(4)}$$

$$2 = 1 \quad \text{...................(5)}$$

Soal Latihan (Dari Buku Kalkulus , Martono, 1999)

Soal 2

Pada rangkaian operasi berikut, langkah manakah yang prosesnya salah?

$$x = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$x^2 = 4x \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$x^2 - 16 = 4x - 16 \ldots\ldots (3)$$

$$(x + 4)(x - 4) = 4(x - 4) \ldots\ldots (4)$$

$$x + 4 = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Soal Latihan (Dari Buku Kalkulus , Martono, 1999)

Soal 3

Pada rangkaian operasi berikut, langkah manakah yang prosesnya salah?

$$x = 4 \text{ ....} (1)$$

$$x^2 = 16 \text{ ....} (2)$$

$$x^2 - 4x = 16 - 4x \text{..........} (3)$$

$$x(x - 4) = -4(x - 4) \text{......} (4)$$

$$x = -4 \text{...................} (5)$$

$$4 = -4 \text{...................} (6)$$

Soal Latihan (Dari Buku Kalkulus , Martono, 1999)

Soal 4 dan 5

Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $x^{6/2} = x^3$.

Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi

$$\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{x+2} \, . \, \sqrt{x-2} \, .$$

Soal Latihan (Dari Buku Kalkulus , Martono, 1999)

Soal 6

Bila pernyataan berikut benar, berikan argumentasinya; dan bila salah, berikan contoh penyangkalnya.

(a) Jika $x = 2$, maka $x^2 = 4$.

(b) Jika $x^2 = 4$, maka $x = 2$.

(c) Jika $x < 2$, maka $x^2 < 4$.

(d) Jika $x > 2$, maka $x^2 > 4$.

(e) Jika $x^2 < 4$, maka $x < 2$.

(f) Jika $x^2 > 4$, maka $x > 2$.

Agenda Pekan Berikutnya

- Pertaksamaan
- Nilai mutlak
- Pertaksamaan dengan nilai mutlak

Baca bahan yang sudah anda punya

Inspirasi hari ini

Saya sering mendapat pencerahan dan inspirasi dari kolomnya Hermawan Kartajaya di kompas (hard copy). Atau versi on line-nya ada di new wave marketing. Begitu hebat-nya internet, itu kesan dari tulisan serial beliau yang hari ini , 4 desember 2008 , sampai ke seri 95 dari 100 seri. Saya juga punya kesan yang sama. Hebatnya internet itulah yang saya tularkan di depan kelas kemarin , 3 desember 2008, saya bilang ke adik-adik mahasiswa, " kesempatan anda untuk menjadi mahasiswa setara temen-temen anda di ITB , NUS atau bahkan MIT , sebenarnya telah terbuka, dengan internet anda berkesempatan lansung berdiskusi dengan Profesor di ITB, NUS , MIT dan seluruh universitas di dunia ini , itu jika anda mau ! , jika tidak mau ya silakan menjadi pemain di sekitar solo saja " . Menurut saya edukasi setara dunia memang sudah hadir dihadapan kita, kalau kita mau kita bisa meng-guide mahasiswa kita mendapatkan edukasi setara dunia !.

Catatan : Judul ini terinspirasi dari temen-temen Alumni PAS Salman ITB Bandung yang mendirikan perusahaan di bidang pendidikan eduTalk.