Optimasi Kombinatorik

Pemodelan Dengan Variabel Integer

Putranto Hadi Utomo

putranto@staff.uns.ac.id

March 28, 2019

Disclaimer:

Overview

1. Pemodelan Dengan Variabel Integer I
   - Masalah knapsack
   - Masalah assignment dan matching
   - Masalah set-covering, set-packing, set partitioning
2. Pemodelan dengan Variabel Integer II
   - Facility location problem
   - Fixed-charge network flow problem
   - Traveling salesman problem
3. Pemodelan dengan Variabel Integer III
   - Piecewise linear functions
   - Disjunctive constrains
   - Vehicle routing problem

Pendahuluan

Optimisasi kombinatorik dan intejer banyak berperan dengan masalah maksimisasi dan minimisasi dari suatu fungsi yang memiliki banyak variabel yang memiliki
(a) kendala persamaan dan pertidaksamaan,
(b) batasan untuk beberapa (atau semua) variabel.

Mixed-integer programming

$$\max\left\{cx + hy : Ax + Gy \leq b, x \in Z_+^n, y \in R_+^p\right\},$$

dengan Z_+^n adalah himpunan vektor-vektor bilangan bulat yang berdimensi n, R_+^p adalah himpunan vektor-vektor bilangan real yang berdimensi p, dan $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dan $y = (y_1, \ldots, y_p)$ adalah variabel yang ingin diketahui nilainya. sedangkan c, h, A, G, b berupa konstanta dengan c adalah vektor dengan panjang n,h adalah vektor dengan panjang p, A adalah matriks berdimensi $m \times n$, G adalah matriks berukuran $m \times p$, dan b adalah vektor dengan panjang m. Masalah ini dikatakan "mixed" karena adanya variabel bilangan bulat dan variabel bilangan real.

Definisi dan Notasi

$$\max\left\{cx + hy : Ax + Gy \leq b, x \in Z_+^n, y \in R_+^p\right\},$$

Himpunan $S = \left\{x \in Z_+^n, y \in R_+^p, Ax + Gy \leq b\right\}$ dikatakan daerah fisibel, dan $(x, y) \in S$ dikatakan solusi fisibel. Suatu masalah MIP dikatakan memiliki solusi fisibel jika $S \neq \emptyset$. Sedangkan fungsi $z = cx + hy$ disebut fungsi objektif. Suatu titik di daerah fisibel $\left(x^0, y^0\right)$ yang membuat fungsi objektif bernilai sebesar-besarnya, atau memiliki siffat $cx^0 + hy^0 \geq cx + hy \ , \forall (x, y) \in S$ dikatakan solusi optimal.

Definisi dan Notasi

Walaupun suatu MIP memiliki daerah fisibel, belum tentu MIP tersebut meiliki solusi optimal. MIP tersebut dapat bersifat unbounded, yaitu jika untuk sembarang nilai $\omega \in R^1$, ada $(x^n, y^n) \in S$ sehingga $cx + hy > \omega$.

Integer programming vs Linear programming

Bentuk khusus dari MIP ada dua, yaitu pure integer programming (IP): $\max\left\{cx : Ax \leq b, x \in Z_{+}^{n}\right\}$, dimana semua variabel harus bernilai/berisikan bilangan bulat. Sedangkan linear programming: $\max\left\{cx : Gy \leq b, y \in R_{+}^{p}\right\}$, memiliki variabel bilangan real.

Variabel biner

Dalam beberapa model MIP, banyak ditemukan kasus dimana variabel harus bernilai nol atau satu (binary variable). Dalam kasus ini, misalkan variabel x pada model MIP diatas harus bernilai 0-1, maka kendala $x \in Z_+^n$ pada model diatas diganti dengan $x \in B^n$, dimana B^n adalah himpunan dari vektor biner yang memiiki panjang n.

Masalah knapsack

Misalkan ada n projek. Projek yang ke-j, $j = 1, \ldots n$, memiliki biaya sebesar a_j dan memiliki bobot/nilai sebesar c_j. Setiap projek harus diselesaikan secara keseluruhan atau tidak sama sekali, sehingga tidak dimungkinkan untuk mengerjakan sebagian saja dari projek tersebut. Misalkan pula hanya ada dana sebesar b untuk membiayai semua projek tersebut. Masalah pemilihan projek untuk memaksimumkan jumlah bobot namun tidak melebihi dana yang tersedia dikenal dengan nama masalah knapsack (the 0-1 knapsack problem).

Masalah knapsack

Dalam bahasa matematika, dapat dituliskan sbb:

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j : \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b, x_j \in B^n\right\}.$$

Dalam kasus ini, kejadian ke-j adalah projek ke-j. Masalah ini disebut masalah knapsack karena dapat dianalogikan sebagai masalah para pendaki gunung yang harus memilih barang apa saja yang harus dibawa dalam knapsacknya, dengan batasan berat yang dapat dibawa. Secara umum, masalah seperti ini dapat memiliki beberapa kendala yang lain, yang disebut dengan masalah knapsack multidimensi (multidimensional knapsack problem).

Example

I am moving from New Jersey to Indiana and have rented a truck that can haul up to 1,100 cu ft of furniture. The volume and value of each item I am considering moving on the truck are given in the table below. Which items should I bring to Indiana? Formulasikan sebagai masalah knapsack.

Item	Value	Volume(cu ft)
Bedroom set	60	800
Dining room set	48	600
Stereo	14	300
Sofa	31	400
TV set	10	200

Assignment problem

Salah satu contoh masalah klasik lainnya adalah masalah penugasan beberapa orang untuk beberapa pekerjaan. Misalakan ada n orang dan m pekerjaan, $n \geq m$. Setiap pekerjaan harus dikerjakan oleh tepat satu orang, dan setiap orang hanya dapat mengerjakan paling banyak satu pekerjaan. Biaya untuk orang ke j dalam mengerjakan pekerjaan ke-i adalah sebesar c_{ij}. Masalah ini bertujuan untuk meng-assign orang dan pekerjaan yang dapat meminimumkan total biaya dalam menyelesaikan semua pekerjaan yang ada.

Formulasi kendala

Untuk memformulasikan masalah ini, yang dikenal dengan assignment problem, didefinisikan variabel $0-1$, x_{ij}, $i=1,\ldots,m$, $i=1,\ldots,n$. Variabel x_{ij} berkoresponden dengan kejadian ke-ij, yaitu kejadian ketika orang ke-i dipasangkan dengan pekerjaan ke-j. Karena pekerjaan ke-i hanya dapat dikerjakan oleh tepat satu orang, perlu ditambahkan kendala

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \;\; \text{untuk } i = 1,\ldots,m.$$

Karena setiap orang tidak dapat mengerjakan lebih dari satu pekerjaan, perlu ada kendala

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \;\; \text{untuk } j = 1,\ldots,m.$$

Fungsi objektif assignment problem

Jika $x \in B^{mn}$memenuhi kedua kendala diatas, jelas akan diperoleh solusi fisibel untuk masalah assignment. Fungsi objektif untuk masalah ini adalah

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Masalah matching

Dalam masalah assignment, $m+n$ elemen dipartisi ke dalam dua himpunan yang saling lepas, yaitu pekerjaan dan orang. Namun dalam beberapa model yang lain, asumsi tersebut tidak dapat belaku. Misalkan ada $2n$ orang yang akan dipasangkan dengan n ruangan. Dalam kasus ini, setiap orang harus dipasangkan dengan tepat satu pasangan. Misalkan kejadian ke-ij, $i<j$, berkorespondesi dengan pasangan orang ke-i dan ke-j yang dipasangkan dalam kamar yang sama. Misalkan pula ada nilai(bobot) c_{ij} jika orang ke-i dipasangkan dengan orang ke-j. Masalah

$$\left\{\max \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{j=i+1}^{2n} c_{ij} x_{ij} : \sum_{k<i} x_{ki} + \sum_{j>i} x_{ij} = 1, i = 1, \ldots, 2n, x \in B^{n(2n-1)}\right\}$$

dikenal dengan masalah perfect matching. Jika pada MIP di atas, kendala persamaan diganti dengan pertidaksamaan ($\leq$), masalahnya disebut dengan masalah matching.

Example

Machineco has four machines and four jobs to be completed. Each machine must be assigned to complete one job. The time required to set up each machine for completing each job is shown in Table 43. Machineco wants to minimize the total setup time needed to complete the four jobs. Use linear programming to solve this problem.

Machine/Time(Hours)	Job 1	Job 2	Job 3	Job 4
1	14	5	8	7
2	2	12	6	5
3	7	8	3	9
4	2	4	6	10

Example

Five male and five female entertainers are at a dance. The goal of the matchmaker is to match each woman with a man in a way that maximizes the number of people who are matched with compatible mates. Table 10 describes the compatibility of the entertainers. Formulate an integer programming model that makes it possible to represent the problem of maximizing the number of compatible pairings as a maximum-flow problem.

	Anderson	Streep	Hepburn	Evans	Principal
Costner	-	C	-	-	-
Reynolds	C	-	-	-	-
Selleck	C	C	-	-	-
Jackson	C	C	-	-	C
Cruise	-	-	C	C	C

Masalah set-covering, set-packing, set partitioning

Misalkan $M = \{1, \ldots, m\}$ adalah himpunan hingga dan misalkan (M_j) untuk $j \in N = \{1, \ldots, n\}$adalah koleksi himpunan bagian dari M. Sebagai contoh, misalkan koleksi tersebut berisi semua himpunan bagian yang memiliki ukuran/banyaknya elemen sebanyak k, untuk $k \leq m$. $F \subseteq N$ dikatakan meng-cover M jika $\bigcup_{j \in F} M_j = M$. masalah ini disebut "set-covering problem", $\mathscr{F} = \{F : F \text{ mengcover } M\}$.

Masalah set-covering, set-packing, set partitioning

Selain masalah set-covering, ada yang disebut masalah set-packing. $F \subseteq N$ dikatakan packing terhadap M jika $M_j \cap M_k = \emptyset$ untuk semua $j, k \in F, j \neq k$. Jika $F \subseteq N$ bersifat meng-cover sekaligus bersifat packing, maka F dikatakan sebagai "set-partitioning" untuk M. Dalam masalah "set-covering", c_j adalah biaya untuk M_j dan akan dicari cover yang meminimumkan total biaya, sedangkan di masalah set-packing, $c_j$adalah bobot/nilai dari $M_j$dan akan dicari packing yang memaksimumkan bobot dari packing tersebut.

Masalah set-covering, set-packing, set partitioning

Masalah tersebut dapat diformulasikan sebagai masalah binary integer programming. Misalkan A adalah incidence matrix untuk keluarga $\{M_j\}$untuk $j \in N$, dan untuk suatu $i \in M$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i \in M_j \\ 0 & ; i \notin M_j \end{cases} \qquad x_j = \begin{cases} 1 & ; j \in F \\ 0 & ; j \notin F \end{cases}.$$

Masalah set-covering, set-packing, set partitioning

F dikatakan cover jika $Ax \geq 1$, packing jika $Ax \leq 1$, dan partisi jika $Ax = 1$, dimana 1 adalah vektor berukuran m yang semua elemennya bernilai 1. Dari penjelasan diatas, dapat dilihat bahwa set-packing problem merupakan bentuk khusus dari 0-1 IP, dengan A merupakan matriks 0-1 (matriks yang elemennya bernilai 0 atau 1) dan $b = 1$. dapat dilihat pula bahwa masalah assignment dengan m pekerjaan dan m orang merupakan masalah set-partitioning dengan $M = \{1, \ldots m, m+1, \ldots, 2m\}$ dan M_j untuk $j = 1, \ldots m^2$ adalah himpunan bagian dari M yang berisikan satu orang dan satu pekerjaan.

Masalah set-covering, set-packing, set partitioning

Banyak masalah nyata yang dapat dimodelkan dalam masalah set-covering. Salah satunya adalah aplikasi yang menyangkut tentang masalah penempatan fasilitas. Misalkan diberikan beberapa pilihan lokasi($N = \{1, \ldots, n\}$) untuk menempatkan beberapa fasilitas pemadam kebakaran yang jika di bangun di lokasi j dikenakan biaya c_j. Selain itu, ada pula komunitas $M = \{1, \ldots, m\}$ yang harus di proteksi. Himpunan bagian yang dapat diproteksi dari pemadam kebakaran yang berada di lokasi j didefiniskan dengan M_j. Misalkan M_j adalah himpunan dari komunitas yang dapat dijangkau oleh pemadam kebakaran yang berlokasi di j dalam jangka waktu 10 menit.

Masalah set-covering, set-packing, set partitioning

Selanjutnya, masalah penentuan lokasi pemadam kebakaran yang memiliki biaya minimum dan setiap kominitas dapat dijangkau oleh pemadam kebakaran dalam waktu yang kurang dari 10 menit merupakan masalah set-covering. Masalah lain yang dapat dimodelkan, antara lain adalah menentukan rute mengiriman barang untuk pelanggan, pemilihan awak pesawat udara, dan pemilihan jadwal kerja pegawai.

Example

Four jobs must be processed on a single machine. The time required to process each job and the date the job is due are shown in Table 63. The delay of a job is the number of days after the due date that a job is completed (if a job is completed on time or early, the job's delay is zero). In what order should the jobs be processed to minimize the total delay of the four jobs?

TABLE 63

Durations and Due Date of Jobs

Job	Days Required to Complete Job	Due Date
1	6	End of day 8
2	4	End of day 4
3	5	End of day 12
4	8	End of day 16

Example

The manager of State University's DED computer wants to be able to access five different files. These files are scattered on 10 disks as shown in Table 13. The amount of storage required by each disk is as follows: disk 1, 3K; disk 2, 5K; disk 3, 1K; disk 4, 2K; disk 5, 1K; disk 6, 4K; disk 7, 3K; disk 8, 1K; disk 9, 2K; disk 10, 2K.
a) Formulate an IP that determines a set of disks requiring the minimum amount of storage such that each file is on at least one of the disks. For a given disk, we must either store the entire disk or store none of the disk; we cannot store part of a disk.
b) Modify your formulation so that if disk 3 or disk 5 is used, then disk 2 must also be used.

Example

File/Disk	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x	x		x	x			x	x	
2	x		x							
3		x			x		x			x
4			x			x		x		
5	x	x		x		x	x		x	x

Facility location problem

Pada masalah ini, ilustrasi masalahnya hampir sama dengan model set-covering, yang memerhatikan lokasi dari fasilitas yang melayani cliennya se-ekonomis mungkin. Diberikan himpunan $N = \{1, \ldots, n\}$ yang menyatakan lokasi yang mungkin untuk dibangunnya fasilitas tersebut, dan diberikan pula himpunan clien $I = \{1, \ldots, m\}$. Biaya mendirikan fasilitas pada lokasi j sebesar c_j, untuk $j \in N$. Masalah ini lebih kompleks dibandingkan dengan masalah set-covering karena setiap clien memiliki permintaan untuk barang tertentu, dan biaya untuk memenuhi kebutuhan clien i dari lokasi j adalah h_{ij}. Masalah optimisasi ini bertujuan untuk memilih himpunan bagian dari lokasi yang akan di bangun fasilitas dan meng-assign clien untuk masing-masing fasilitas tersebut sehingga total biayanya minimum. Dalam masalah uncapacitated facility location, tidak ada batasan untuk banyaknya clien yang dapat dilayani oleh sebuah fasilitas.

Facility location problem

Selain variabel biner x_j (bernilai satu jika pada lokasi j di bangun fasilitas, bernilai nol jika tidak), diperkenalkan variabel y_{ij},yang menyatakan fraksi dari permintaan untuk clien i, yang dilayani oleh fasilitas di j. Kondisi bahwa setiap permintaan clien harus terpenuhi di representasikan dalam

$$\sum_{j \in N} y_{ij} = 1 \quad ; i \in I$$

Selain itu, karena klien i tidak dapat dilayani dari j kecuali fasilitas ditempatkan di j, perlu ditambahkan kendala

$$y_{ij} - x_j \leq 0 \quad ; i \in I \,\text{dan}\, j \in N.$$

Fungsi objektif untuk masalah uncapacitated facility adalah

$$\min \sum_{j \in N} c_j x_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in N} h_{ij} y_{ij},$$

dengan catatan $x \in B^n, y \in R_+^{mn}$.

Facility location problem

Dalam kenyataanya, sangat tidak realistis jika sebuah fasilitas dapat melayani berapapun banyaknya klien. Misalkan fasilitas yang berlokasi di j memiliki kapasitas $u_j$dan klien ke-i memiliki permintaan sebanyak b_i. Misalkan y_{ij}adalah kuantitas barang yang dikirimkan dari fasilitas j ke klien i dan misalkan pula h_{ij}adalah biaya pengiriman per unitnya. Untuk memformulasikan capasitated facility problem dalam MIP, kendala permintaan klien harus diganti dengan

$$\sum_{j \in N} y_{ij} = b_i \quad ; i \in I,$$

sedangkan kendala pelayanan dari fasilitas j untuk klien i diganti dengan

$$\sum_{i \in I} y_{ij} - u_i x_j \leq 0 \quad ; j \in N$$

Exercise

There are six cities (cities 1-6) in Kilroy County. The county must determine where to build fire stations. The county wants to build the minimum number of fire stations needed to ensure that at least one fire station is within 15 minutes (driving time) of each city. The times (in minutes) required to drive between the cities in Kilroy County are shown in Table 1. Formulate an IP that will tell Kilroy how many fire stations should be built and where they should be located.

Exercise

from/to	city 1	city 2	city 3	city 4	city 5	city 6
city 1	0	10	20	30	30	20
city 2	10	0	25	35	20	10
city 3	20	25	0	15	30	20
city 4	30	20	30	0	15	14
city 5	30	20	30	15	0	14
city 6	20	10	20	25	14	0

Table: Times required to drive between cities in Kilroy Country

Fixed-charge network flow problem

Misalkan diberikan suatu network dengan himpunan node V dan himpunan arcs $\mathscr{A}$. Suatu arc $e = (i,j)$ yang menghubungkan node i ke node j menyatakan bahwa dapat dilakukan pengiriman langsung dari node i ke node j. pada setiap node i, ada demand/permintaan sebesar b_i. Node i berupa demand, supply, atau node transit tergantung dari nilai b_i (positif jika demand, negatif jika supply, dan nol jika node transit). Diasumsikan keseluruhan demand bernilai nol ($\sum_{i \in V} b_i = 0$). Setiap arc(i,j) memiliki kapasitas arus sebesar u_{ij} dan memiliki biaya arus per unit sebesar h_{ij}. Misalkan y_{ij} merupakan arus pada arc (i,j).

Fixed-charge network flow problem

Arus tersebut fisibel jika memenuhi

$$y \in R_{+}^{\mathscr{A}}$$

$$y_{ij} \leq u_{ij} \quad ; (i,j) \in \mathscr{A}$$

$$\sum_{j \in V} y_{ij} - \sum_{j \in V} y_{ij} = b_i \quad i \in V$$

kendala terakhir menyatakan kendala konservasi arus di tiap-tiap node. Yang menjadi masalah adalah mencari arus (y_{ij}) yang biayanya minimum, atau

$$\min \left\{ \sum_{(i,j) \in \mathscr{A}} h_{ij} y_{ij} : y \text{ memenuhi ketiga kendala diatas} \right\}$$

Masalah ini dikenal dengan masalah network flow .

Fixed-charge network flow problem

Fixed-charge network problem diperoleh dengan menambahkan biaya tetap c_{ij} jika terdapat arus pada arc (i,j). Untuk itu perlu didefinisikan variabel x_{ij} yang mengindikasikan apakan arc (i,j) digunakan atau tidak. Kendala yang berkaitan adalah

$$y_{ij} - u_{ij}x_{ij} \leq 0 \;\; ; (i,j) \in \mathscr{A}$$

Fixed-charge network flow problem

Sehingga masalahnya dapat dituliskan sbb:

$$\min \left\{ \sum_{(i,j)\in\mathscr{A}} (c_{ij}x_{ij} + h_{ij}y_{ij}) : \right.$$
$$x \in B^{|\mathscr{A}|};\;\; y \in R_{+}^{\mathscr{A}};$$
$$\sum_{j\in V} y_{ij} - \sum_{j\in V} y_{ij} = b_i\,;$$
$$i \in V, y_{ij} - u_{ij}x_{ij} \leq 0;$$
$$\left. (i,j) \in \mathscr{A} \right\}.$$

Model fixed-charge flow dapat dipakai untuk mendisain masalah-masalah yang berkaitan dengan arus material dalam suatu network. Masalah tersebut dapat meliputi sistem suplai air bersih (PAM) dan sistem jalan raya.

Exercise

J. C. Nickles receives credit card payments from four regions of the country (West, Midwest, East, and South). The average daily value of payments mailed by customers from each region is as follows: the West, \$70,000; the Midwest, \$50,000; the East, \$60,000; the South, \$40,000. Nickles must decide where customers should mail their payments. Because Nickles can earn 20% annual interest by investing these revenues, it would like to receive payments as quickly as possible. Nickles is considering setting up operations to process payments (often referred to as lockboxes) in four different cities: Los Angeles, Chicago, New York, and Atlanta. The average number of days (from time payment is sent) until a check clears and Nickles can deposit the money depends on the city to which the payment is mailed, as shown in Table 2.

Exercise

For example, if a check is mailed from the West to Atlanta, it would take an average of 8 days before Nickles could earn interest on the check. The annual cost of running a lockbox in any city is $50,000. Formulate an IP that Nickles can use to minimize the sum of costs due to lost interest and lockbox operations. Assume that each region must send all its money to a single city and that there is no limit on the amount of money that each lockbox can handle.

from/to	Los Angles	Chicago	New York	Atlanta
Region 1 West	2	6	8	8
Region 2 Midwest	6	2	5	5
Region 3 East	8	5	2	5
Region 4 South	8	5	5	2

Table: Number of days until money is recieved

Traveling salesman problem

Misalkan diberikan himpunan node $V = \{1, \ldots, n\}$ dan himpunan arc $\mathscr{A}$. Node merepresentasikan kota, dan arc merepresentasikan pasangan terurut antara dua kota dimana perjalanan secara langsung dimungkinkan. Untuk $(i,j) \in \mathscr{A}$, c_{ij}disefinisikan sebagai waktu perjalanan dari kota i ke kota j. Masalah ini bertujuan untuk mencari sebuah tour (perjalanan) yang dimulai dari kota 1, dengan syarat: (a) mengunjungi setiap kota lain tepat satu kali dan kembali ke kota 1, (b) menghabiskan waktu terkecil.

Traveling salesman problem

Untuk memformulasikan masalah ini, perlu didefisinikan variabelx_{ij} yang akan bernilai 1 jika j dikunjungi tepat setelah i dikunjungi (dalam tour tersebut), dan bernilai 0 jika selainnya, sehingga $x \in B^{|\mathscr{A}|}$. Kendala yang menyatakan bahwa setiap kota harus dikunjungi tepat satu kali dinyatakan oleh persamaan $\sum_{(i:(i,j)\in\mathscr{A})} x_{ij} = 1 \ \ ; \forall j \in V$ dan $\sum_{(j:(i,j)\in\mathscr{A})} x_{ij} = 1 \ \ ; \forall i \in V$.

Traveling salesman problem

Dua kendala diatas tidak cukup untuk mendefinisikan suatu tour yang diinginkan, karena masih memungkinkan untuk terjadi subtour; sebagai contoh untuk $n = 6$,
$x_{12} = x_{23} = x_{31} = x_{45} = x_{56} = x_{64} = 1$ memenuhi kedua kendala tersebut, namun tidak merepresentasikan tour yang diinginkan.
Pada contoh ini, salah satu cara untuk mengeliminasi subtour adalah dengan memperhatikan bahwa harus ada arc dari $\{4, 5, 6\}$ ke $\{1, 2, 3\}$ dan harus ada pula arc dari $\{1, 2, 3\}$ ke $\{4, 5, 6\}$.

Traveling salesman problem

Secara umum, untuk sembarang $U \subset V$ dengan $2 \leq |U| \leq |V| - 2$, kendala

$$\sum_{((i,j)\in\mathscr{A}:i\in U, j\in V\setminus U)} x_{ij} \geq 1$$

akan dipenuhi oleh semua tour, namun subtour pasti akan melanggar salah satu dari kendala tersebut. Karena masalah komputasi, kendala ini sering digantikan dengan kendala

$$\sum_{((i,j)\in\mathscr{A}:i\in U, j\in V\setminus U)} x_{ij} \leq |U| - 1 \text{ untuk } 2 \leq |U| \leq |V| - 2.$$

Traveling salesman problem

Sehingga, masalah travelling salesperson dapat diformulasikan dengan

$$\min\left\{\sum_{(i,j)\in\mathscr{A}} c_{ij}x_{ij} : x \text{ memenuhi kendala diatas}\right\}$$

Exercise

The SV Tourist Agency, has launched a promotion to boost the number of tourists of Scenic Valley. They are about to offer a package tour to tourists who fly in and out of Geyser Town (GT), which is the only airport with connections to towns outside the valley. They now offer a bus tour of the valley, visiting each town once, starting from and returning to GT. In order to estimate the costs of the tour the agency needs to know the least number of miles the bus must travel in making the tour. The question is to find the closed sequence of towns (in which each is visited exactly once) of shortest distance. In graph theoretic terms we wish to find the least-weight Hamiltonian cycle of the graph.

Exercise

The table of intertown distances is given below.

		2	3	4	5	6	7	8	9	10
Geyser Town	1	8	5	9	12	14	12	16	17	22
Lakeside	2		9	15	17	8	11	18	14	22
Mountainview	3			7	9	11	7	12	12	17
Riverview	4				3	17	10	7	15	18
Twin Streams	5					8	10	6	15	15
Snowdonia	6						9	14	8	16
Skier's Paradise	7							8	6	11
Park City	8								11	11
rolling Downs	9									10
Tumbling Basin	10									

Exercise-HW

Joe State lives in Gary, Indiana. He owns insurance agencies in Gary, Fort Wayne, Evansville, Terre Haute, and South Bend. Each December, he visits each of his insurance agencies. The distance between each agency (in miles) is shown in Table 3. What order of visiting his agencies will minimize the total distance traveled?

Day	Gary	Fort W.	Evansville	Terre H.	South B.
Gary	0	132	217	164	58
Fort W.	132	0	290	201	79
Evansville	217	290	0	113	303
Terre H.	164	201	113	0	196
South B.	58	79	303	196	0

Table: Distance between agencies

Piecewise linear functions

Fungsi dengan bentuk $f(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^{p} f_j(y_j)$ dikatakan fungsi yang terpisahkan (separable function). Misalkan $f_j(y_j)$ adalah fungsi sepotong-sepotong (piecewise) untuk setiap j. Dengan fungsi f_j, kita dapat mengaproksimasi fungsi kontinu dengan satu variabel.

Piecewise linear functions

Misalkan didefisinikan fungsi sepotong-sepotong $f(y)$ yang didefinisikan oleh titik-titik $(a_i, f(a_i))$ untuk $i = 1, \ldots r$. Maka, untuk setiap selang $a_i \leq y \leq a_r$, y dapat dituliskan ke dalam

$$y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i, \ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1, \ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R_+^r.$$

Piecewise linear functions

Nilai λ_i tidak unik, namun jika $a_i \leq y \leq a_{i+1}$ dan λ dipilih sehingga $y = \lambda_i a_i + \lambda_{i+1} a_{i+1}$ dan $\lambda_i + \lambda_{i+1} = 1$, maka akan diperoleh $f(y) = \lambda_i f(a_i) + \lambda_{i+1} f(a_{i+1})$.

Piecewise linear functions

Dengan kata lain,

$$f(y) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(a_i), \; \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1, \; \lambda \in R_+^r$$

jika paling banyak dua dari λ_i bernilai positif dan jika λ_j dan λ_k positif, maka $k = j - 1$ atau $j + 1$.

Piecewise linear functions

Keadaan ini dapat dimodelkan dengan menggunakan variabel biner x_i untuk $i = 1, \ldots, r-1$ (dimana $x_i = 1$ jika $a_i \leq y \leq a_{i+1}$ dan $x_i = 0$ selainnya) ditambah dengan kendala berikut:

$$\lambda_1 \leq x_1$$

$$\lambda_i \leq x_{i-1} + x_i \quad ; i = 2, \ldots, r-1$$

$$\lambda_i \leq x_{r-1}$$

$$\sum_{i=1}^{r-1} x_i = 1$$

$$x \in B^{r-1}$$

Dari model tersebut dapat dilihat bahwa jika $x_j = 1$, maka $\lambda_i = 0$ untuk $i \neq \{j, j+1\}$.

Piecewise linear functions

Fungsi sepotong-sepotong yang bersifat konveks (atau concave) dapat dimaksimumkan (atau diminimumkan) dengan menggunakan program linear biasa karena kemiringan/slope dari segmen fungsinya naik (atau turun). Namun, hal tersbut tidak berlaku pada fungsi sepotong-sepotong yang tidak konveks/koncave, sehingga perlu ditambahkan variabel biner untuk memilih segmen yang tepat untuk suatu nilai y tertentu.

Exercise

Euing Gas produces two types of gasoline (gas 1 and gas 2) from two types of oil (oil 1 and oil 2). Each gallon of gas 1 must contain at least 50 percent oil 1, and each gallon of gas 2 must contain at least 60 percent oil 1. Each gallon of gas 1 can be sold for 12¢, and each gallon of gas 2 can be sold for 14¢. Currently, 500 gallons of oil 1 and 1,000 gallons of oil 2 are available. As many as 1,500 more gallons of oil 1 can be purchased at the following prices: first 500 gallons, 25¢per gallon; next 500 gallons, 20¢per gallon; next 500 gallons, 15¢per gallon. Formulate an IP that will maximize Euing's profits (revenues - purchasing costs).

Disjunctive constrains

Kendala yang bersifat disjungsi muncul pada banyak model. Ilustrasi sederhana mengenai kendala ini adalah ketika ingin didefinisikan variabel yang sama dengan nilai minimum dari dua variabel lain, misalkan, $y = \min(u_1, u_2)$. Hal ini dapat diselesaikan dengan dua kendala berikut:

$$y \leq u_1 \quad \text{dan} \qquad y \leq u_2$$

beserta salah satu dari dua pertidaksamaan berikut:

$$y \geq u_1 \quad \text{atau} \quad y \geq u_2$$

Disjunctive constrains

Secara umum, kendala disjungsi menyatakan bahwa suatu titik harus memenuhi paling sedikit k dari m kendala. Misalkan $P^i = \left\{y \in R_+^p : A^i y \leq b^i, y \leq d\right\}$ untuk $i = 1, \ldots, m$. Misalkan didefinisikan vektor ω dimana untuk setiap i, $A^i y \leq b^i + \omega$ terpenuhi oleh sembarang $y, 0 \leq y \leq d$. Maka, y akan dipenuhi oleh paliing sedikit k himpunan p_i jika dan hanya jika himpunan berikut

$$A^i y \leq b^i + \omega(1 - x_i) \text{ untuk } i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \geq k$$

$$y \leq d$$

$$x \in B^m, \; y \in R_+^p$$

tidak kosong.

Disjunctive constrains

Hal ini masuk akal, karena ketika $x_i = 1$, akan dihasilkan kendala $A^i y \leq b^i$, sedangkan jika $x_i = 0$ akan menghasilkan kendala yang pasti benar, yaitu $A^i y \leq b^i + \omega$.
Ketika $k = 1$, formulasi diatas akan menjadi

$$A^i y^i \leq x_i b^i \text{ untuk } i = 1, \ldots, m$$

$$y^i \geq x_i d \text{ untuk } i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} y^i = y$$

$$x \in B^m, \; y \in R_+^p, \; y^i \in R_+^p \text{ untuk } i = 1, \ldots, m$$

Exercise

Dorian Auto is considering manufacturing three types of autos: compact, midsize, and large. The resources required for, and the profits yielded by, each type of car are shown in Table 4. Currently, 6,000 tons of steel and 60,000 hours of labor are available. For production of a type of car to be economically feasible, at least 1,000 cars of that type must be produced. Formulate an IP to maximize Dorian's profit.

Resources/Car type	Compact	Midsize	Large
Steel required	1.5 tons	3 tons	5 tons
Labour required	30 hours	25 hours	40 hours
Profit yielded ($)	2000	3000	4000

Table: Profit and resources needed

Vehicle routing problem

Vehicle routing problem merupakan generalisasi dari traveling salesman problem. Dalam masalah ini, ingin dicari rute optimal suatu kendaraan dalam mendistribusikan barang yang dibawa untuk para konsumen.

Vehicle routing problem

Formula matematika untuk vehicle routing problem adalah sebagai berikut:

$$\text{Minimize } Z = \sum_{k=1}^{K} \sum_{(i,j)\in A} C_{ij} x_{kij}$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} = 1, j = 2, 3, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1, j = 2, 3, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{1j} = K, \sum_{i=1}^{n} y_{i1} = K$$

Vehicle routing problem

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n} D_j x_{kij} \leq U, \quad k = 1, 2, \ldots, K$$

$$\sum_{k=1}^{K} x_{kij} = y_{ij} \quad \forall i, j$$

$$\sum_{(i,j)\in S\times S, i\neq j} y_{ij} \leq |S| - 1, \quad \text{for all subsets } S \text{ of } \{2, 3, \ldots, n\}$$

$$x_{kij} = 0 \text{ or } 1 \quad \forall (i,j) \in A \text{ and } \forall k$$

$$y_{ij} = 0 \text{ or } 1 \quad \forall (i,j) \in A$$

Vehicle routing problem

Dengan keterangan dan asumsi sebagai berikut:

- Kendaraan bersifat homogen, yang memiliki kapasitas sebanyak U unit.
- Depot ($i = 1$) memiliki M kendaraan
- Ada $N - 1$ pelanggan, yang masing-masingnya mempunyai demand sebanyak D_j ($j = 2, \ldots, N$)
- Biaya perjalanan dari lokasi i ke lokasi j sebesar C_{ij}
- Variabel x_{kij} bernilai 1 jika kendaraan k pergi dari lokasi i ke lokasi j, dan 0 jika tidak
- Variabel y_{ij} bernilai 1 jika ada kendaraan yang melewati jalan (i, j)

Exercise

the SV Tourist agency, employ a printing company ot produce its vrochures. The company's press is located in Skier's Paradise (SP, town 7). Each month the company allocates its complete fleets of three small vans to the deliver of the brochures for SP are collected independently by the SP agency. The number of the bundles of brochures required by each of the towns per month is:

Town	1	2	3	4	5	6	8	9	10
Required bundle	10	15	18	17	3	5	9	4	6

Exercise

The vans can each hold 40 bundles. What the company wants to do is to find a delivery schedule for each of the vans so that each van starts out at SP, visits a number of the other towns, delivers the bundles, and then returns to SP. Naturally the towns on any trip cannot have a total requirement of more than 40 bundles (van capacity). The objective is to find a schedule for each van so that each town is visited by exactly one van and the total distance traveled by all the vans is minimized. We calculate distances according to table below:

Exercise

		2	3	4	5	6	7	8	9	10
Geyser Town	1	8	5	9	12	14	12	16	17	22
Lakeside	2		9	15	17	8	11	18	14	22
Mountainview	3			7	9	11	7	12	12	17
Riverview	4				3	17	10	7	15	18
Twin Streams	5					8	10	6	15	15
Snowdonia	6						9	14	8	16
Skier's Paradise	7							8	6	11
Park City	8								11	11
rolling Downs	9									10
Tumbling Basin	10									

Daftar Pustaka

- Winston, W.L. and Goldberg, J.B.Operations Research: Applications and Algorithms. Thomson Brooks. 2004
- J. G. Oxley. Matroid Theory. Oxford University Press. 2006.
- Nemhauser, Wolse. Integer and Combinatorial Optimizaation. New York: John Willey & Sons, Inc. 1999
- Miklos Bona, a Walk Trough Combinatorics.World Scientific. 2011
- OCW MIT. `https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-314-combinatorial-analysis-fall-2014`
- L. R. Foulds. Combinatorial Optimization for Undergraduates. 2012.

Daftar Pustaka (cont.)

- Eugene Lawler. Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. Courier Corporation. 2012.
- Gary Chartrand, Linda Lesniak, Ping Zhang. Graphs & Digraphs. CRC Press. 2004.
- Ruhul Amin Sarker, Charles S. Newton. Optimization Modelling: A Practical Approach. CRC press. 2007