CATATAN KULIAH

KALKULUS 1

S1 / Semester 1 / 3 sks

Oleh :

Dyah Ratri Aryuna, S.Pd,M.Si

Program Studi Pendidikan Matematika

Universitas Sebelas Maret

2019

1. Sistem Bilangan Riil

Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

1. Menjelaskan pengertian bilangan riil
2. Menjelaskan kaitan bilangan rasional dan irasional dengan bentuk desimal berulang dan tak berulang
3. Menjelaskan sifat-sifat kerapatan dan urutan pada sistem bilangan riil

Materi Ajar

Kalkulus di dasarkan pada sistem bilangan riil dan sifat-sifatnya. Apa yang dimaksud dengan bilangan riil ? Sebelum menjawab pertanyaan tersebut kita mulai dengan beberapa sistem bilangan yang lebih sederhana

Bilangan Riil

Bilangan-bilangan asli

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

adalah bilangan yang paling sederhana yang kita kenal. Dengan bilangan asli kita membilang, misalnya banyaknya mahasiswa di kelas atau banyaknya buku di perpustakaan. Bilangan-bilangan asli bersama-sama dengan negatifnya dan 0 dinamakan bilangan-bilangan bulat.

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

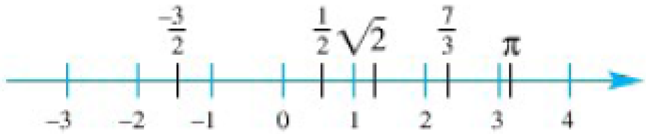
Bilangan bulat tidak selalu memadai untuk mewakili hasil suatu pengukuran panjang, hasilnya bisa jauh dari presisi. Kita kemudian menemui bilangan yang merupakan perbandingan dari dua bilangan bulat, seperti

$$\frac{3}{4}, \frac{-7}{8}, \frac{21}{5}, \frac{19}{-2}, \frac{16}{2}, \text{ and } \frac{-17}{1}$$

Selanjutnya bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{m}{n}$, dengan m, n bilangan bulat dan $n \neq 0$ dinamakan bilangan rasional. Bentuk $\frac{m}{0}$ tidak diikut sertakan karena kita tidak mungkin memberi makna pada bentuk tersebut

Apakah bilangan pecahan mencukupi untuk semua keperluan mengukur panjang ? Ternyata tidak. Misalnya $\sqrt{2}$ - yang dapat dilihat sebagai panjang dari sisi miring dari suatu segitiga siku-siku - tidak dapat dinyatakan sebagai hasi bagi dari dua bilangan bulat. Jadi $\sqrt{2}$ bukan bilangan rasional atau dinamakan bilangan irasional. $\sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, \pi, e$ adalah beberapa contoh bilangan irasional lainnya.

Semua bilangan rasional dan bilangan irasional dinamakan bilangan riil. Bilangan riil dapat dipandang sebagai label dari titik pada garis dan mengukur jarak dari kanan atau kiri (jarak berarah) dari suatu titik tetap yang disebut titik asal dan diberi label 0. Walaupun kita tidak dapat menuliskan semua label, tapi setiap titik dilabelkan secara tunggal oleh bilangan riil. Garis yang dipakai untuk merepresentasikan bilangan riil tersebut dinamakan garis riil



Untuk selanjutnya di kalkulus, jika tidak ada penjelasan tambahan maka jika kita mengatakan bilangan maka yang dimaksud adalah bilangan riil atau semesta pembicaraan kita tentang bilangan adalah bilangan riil.

Operasi Aritmatika pada Himpunan bilangan riil

Diberikan dua bilangan riil x dan y, kita menjumlahkan dan mengalikan keduanya sehingga diperoleh bilangan riil yang baru $x + y$ dan xy. Penjumlahan dan perkalian memiliki sifat yang disebut sebagai sifat aljabar, yakni :

1. Hukum komutatif : $x + y = y + x$ dan $xy = yx$
2. Hukum asosiatif : $(x + y) + z = x + (y + z)$ dan $(xy)z = x(yz)$
3. Hukum distributif : $x(y + z) = xy + xz$
4. Elemen identitas : terdapat bilangan riil 0 dan 1 yang memenuhi $0 + x = x = x + 0$ dan $1x = x = x1$ untuk setiap bilangan riil
5. Invers : setiap bilangan riil x memiliki invers penjumlahan (sering disebut lawan) $-x$, yang memenuhi $-x + x = 0 = x + -x$. Setiap bilangan riil x kecuali 0, memiliki invers perkalian (disebut resiprokal) x^{-1} yang memenuhi $xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$

Pengurangan dan pembagian didefinisikan sebagai :

$$x - y = x + (-y)$$

$\frac{x}{y} = xy^{-1}$, asalkan $y \neq 0$, pembagian dengan 0 tidak didefinisikan

Urutan

Bilangan bulat tak nol dapat dipisahkan menjadi bilangan positif dan bilangan negatif. Selanjutnya kita dapat mengenalkan relasi urutan $<$ (dibaca : kurang dari), dengan

$$x < y \Leftrightarrow y - x \text{ adalah positif}$$

Disepakati bahwa $x < y$ dan $y > x$ adalah hal yang sama. Berikut adalah sifat-sifat relasi urutan :

1. Trikotomi , jika x dan y adalah bilangan riil, maka satu diantara yang berikut berlaku
   $x < y$ atau $x = y$ atau $x > y$
2. Ketransitifan , $x < y$ dan $y < z \Rightarrow x < z$ untuk sebarang x, y, z di R
3. $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$ untuk sebarang x, y, z di R
4. Jika z positif , berlaku $x < y \Leftrightarrow xz < yz$ untuk sebarang x, y di R dan jika z negatif, berlaku $x < y \Leftrightarrow xz > yz$ untuk sebarang x, y di R

Relasi $\leq$ (dibaca "kurang dari atau sama dengan"), didefinisikan sebagai

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \text{ positif atau nol}$$

Sifat-sifat urutan 2,3 dan 4 berlaku dengan lambang $<$ diganti dengan lambang $\leq$

Desimal Berulang dan Tidak Berulang

Setiap bilangan rasional dan irasional dapat dinyatakan dalam bentuk desimal. Representasi desimal dari bilangan rasional dapat berakhir atau terus berulang secara teratur, sebagai contoh

$$\frac{1}{2} = 0.5 \qquad \frac{3}{8} = 0.375 \qquad \frac{3}{7} = 0.428571428571428571\ldots$$

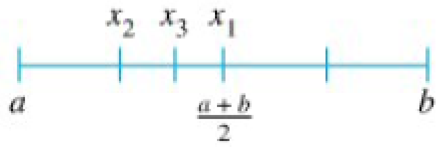
Sedangkan representasi desimal dari bilangan irasional tidak berulang dan tanpa akhir, misalnya

$$\sqrt{2} = 1.4142135623\ldots, \qquad \pi = 3.1415926535\ldots$$

Sebaliknya juga berlaku, yakni suatu penyajian desimal yang berakhir atau terus berulang secara teratur dapat ditulis sebagai suatu bilangan rasional dan suatu penyajian desimal yang tidak berulang dan tanpa akhir adalah mewakili suatu bilangan irasional

Kerapatan

Diantara sebarang dua bilangan riil a dan b, betapapun dekatnya terdapat bilangan riil yang lain, khususnya $x_1 = \frac{a+b}{2}$ yakni bilangan riil yang terletak dipertengahan a dan b. Proses itu dapat kita lanjutkan, sehingga diantara a dan x_1 terdapat bilangan riil x_2, diantara x_1 dan x_2 terdapat bilangan riil x_3 dan seterusnya selalu dapat kita lakukan demikian



Jadi masuk akal jika kemudian dikatakan bahwa terdapat tak berhingga bilangan riil diantara sebarang dua bilangan riil. Dikatakan bahwa bilangan riil adalah rapat disepanjang garis riil

2. Pertidaksamaan dan Nilai Mutlak

<u>Indikator Pencapaian Hasil Belajar</u>

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

1. Menjelaskan pengertian selang
2. Menentukan penyelesaian pertidaksamaan
3. Menjelaskan pengertian nilai mutlak
4. Menyebutkan sifat-sifat nilai mutlak
5. Menentukan penyelesaian pertidaksamaan yang memuat nilai mutlak

<u>Materi Ajar</u>

Menyelesaikan pertidaksamaan berarti mencari himpunan dari semua bilangan riil yang menyebabkan pertidaksamaan menjadi ketidaksamaan yang bernilai benar. Umumnya penyelesaian pertidaksamaan adalah berupa semua bilangan pada suatu interval atau gabungan dari interval-interval.

Interval

Himpunan bagian tertentu dari himpunan bilangan riil yang disebut selang sering muncul dalam Kalkulus. Secara geometris ini berkaitan dengan ruas garis pada garis riil. Perhatikan tabel berikut :

Notasi Himpunan	Notasi Selang	Grafik
$\{x : a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x : a \le x \le b\}$	$[a, b]$	
$\{x : a \le x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x : a < x \le b\}$	$(a, b]$	
$\{x : x \le b\}$	$(-\infty , b]$	
$\{x : x < b\}$	$(-\infty , b)$	
$\{x : x \ge a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x : x > a\}$	(a, ∞)	
$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	

Simbol ∞ pada notasi di atas bukan mewakili sebuah bilangan. (a, ∞) berarti himpunan semua bilangan yang lebih dari a. Secara geometris selang ini membentang mulai dari titik a tak berhingga jauhnya ke kanan dalam arah positif. Analog untuk $[a,\infty)$, (∞,b), $(\infty,b]$ dan (∞,∞).

Menyelesaikan Pertidaksamaan

Prosedur menyelesaikan pertidaksamaan terdiri dari langkah-langkah mengubah pertidaksamaan hingga penyelesaiannya terlihat dengan jelas. Dengan menggunakan sifat urutan pada bilangan riil, kita dapat melakukan operasi tertentu pada kedua ruas pertidaksamaan tanpa mengubah himpunan penyelesaian. Kita dapat menambahkan kedua ruas dengan bilangan yang sama, mengalikan kedua ruas dengan bilangan positif yang sama dan mengalikan kedua ruas dengan bilangan negatif yang sama tapi kita harus membalik tanda ketidaksamaan.

CONTOH 1 :

Selesaikan pertidaksamaan $3x-5<4x-6$

Jawab :

$$3x-5<4x-6$$
$$3x<4x-1$$
$$-x<-1$$
$$x>1$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah : $HP=(1,\infty)$

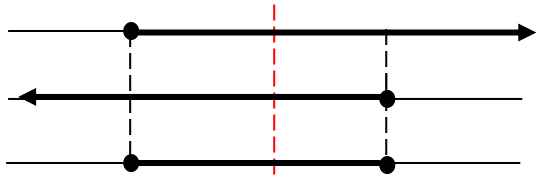
CONTOH 2 :

Selesaikan pertidaksamaan $4\le 3x-1\le 13$

Jawab :

$$4\le 3x-1\le 13$$
$$4\le 3x-1 \text{ dan } 3x-1\le 13$$

$$3x-1\ge 4 \qquad 3x\le 14$$
$$3x\ge 5 \qquad x\le \frac{14}{3}$$
$$x\ge \frac{5}{3}$$



Jadi himpunan penyelesaiannya adalah :

$$HP = \left[\frac{5}{3}, \infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{14}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{5}{3}, \frac{14}{3}\right]$$

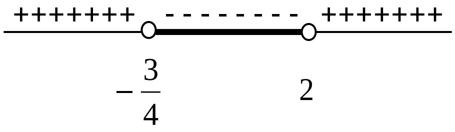
CONTOH 3 :

Selesaikan pertidaksamaan $4x^2 - 5x - 6 < 0$

Jawab :

$$4x^2 - 5x - 6 < 0$$

$$(4x+3)(x-2) < 0$$

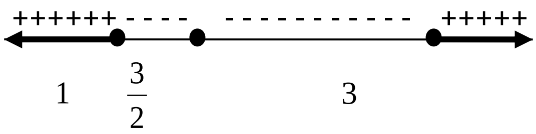


Jadi himpunan penyelesaiannya adalah : $HP = \left(-\frac{3}{4},\ 2\right)$

CONTOH 4 :

Selesaikan pertidaksamaan $(2x-3)(x-1)^2(x-3) \geq 0$

Jawab :



Jadi himpunan penyelesaiannya adalah : $HP = (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

CONTOH 5 :

Selesaikan pertidaksamaan $2x^2 + 2x + 3 > 0$

Jawab :

Perhatikan bahwa :

$$2x^2 + 2x + 3 = 2\left(x^2 + x + \frac{3}{2}\right) = 2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\frac{1}{4}\right] = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} > 0 \text{ untuk setiap } x \in R$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah : $HP = \Re$

CONTOH 6 :

Selesaikan pertidaksamaan $x^3 - x^2 - x + 1 < 0$

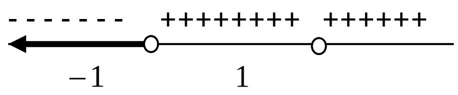
Jawab :

Karena $x = 1$ membuat ruas kiri sama dengan nol, maka $(x-1)$ adalah suatu faktor linier dari $x^3 - x^2 - x + 1$, kemudian gunakan pembagian sintetik untuk menentukan faktor yang lain

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

sehingga

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1) < 0$$

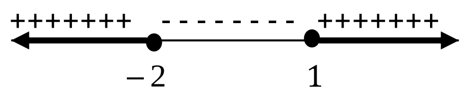


Jadi himpunan penyelesaiannya adalah : $HP = (-\infty, 1)$

CONTOH 7 :

Selesaikan pertidaksamaan $\dfrac{x-1}{x+2} \geq 0$

Jawab :



Jadi himpunan penyelesaiannya adalah : $HP = (-\infty\,, \text{-}\,2) \cup (1, \infty)$

CONTOH 8 :

Selesaikan pertidaksamaan $\dfrac{x-2}{x+4} \leq 2$

Jawab :

$$\frac{x-2}{x+4} \leq 2$$

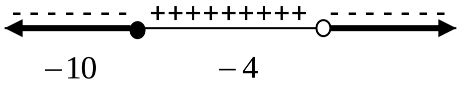
$$\frac{x-2}{x+4} - 2 \leq 0$$

$$\frac{x-2-2(x+4)}{x+4} \leq 0$$

$$\frac{x-2-2x-8}{x+4} \leq 0$$

$$\frac{-x-10}{x+4} \leq 0$$

$$\frac{-(x+10)}{x+4} \leq 0$$



Jadi himpunan penyelesaiannya adalah : $HP = (-\infty, -10] \cup (-4, \infty)$

Nilai Mutlak

Konsep nilai mutlak memegang peranan penting di kalkulus sehingga penguasaan terhadap konsep ini diperlukan.

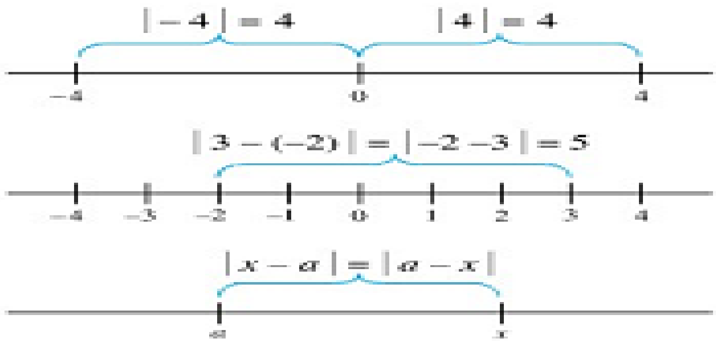
Definisi

Nilai mutlak suatu bilangan riil x dinyatakan dengan $|x|$ didefinisikan sebagai

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{jika} \quad x < 0 \end{cases}$$

Sebagai contoh $|3| = 3$, $|-3| = 3$, $|0| = 0$, $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$ dan $|3 - \pi| = \pi - 3$. Perhatikan bahwa $|x| \geq 0$ dan $|-x| = |x|$ untuk semua $x \in R$, tetapi tidak benar bahwa $|-x| = x$ untuk semua $x \in R$

Salah satu cara terbaik untuk membayangkan nilai mutlak secara geometris adalah sebagai jarak (tak berarah), yakni $|x|$ adalah jarak antara x dengan titik asal dan secara umum $|x - a|$ adalah jarak antara x dengan a. Perhatikan ilustrasi berikut :



Sifat-sifat Nilai Mutlak

Untuk sebarang bilangan riil a, b berlaku sifat-sifat berikut :

1. $|ab| = |a||b|$

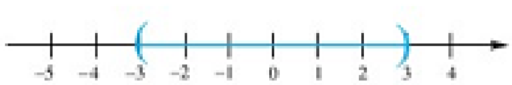
2. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

3. $|a+b| \le |a|+|b|$ (Ketaksamaan segitiga)

4. $|a-b| \ge |a|-|b|$

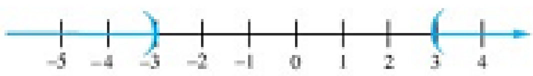
Pertidaksamaan yang Melibatkan Nilai Mutlak

Dengan memandang nilai mutlak sebagai jarak berarah, maka penyelesaian dari pertidaksamaan $|x|<3$ dapat dilihat pada garis riil sebagai semua titik yang jaraknya terhadap titik asal kurang dari 3, seperti yang diilustrasikan berikut ini



$|x|<3$

Di sisi lain penyelesaian dari pertidaksamaan $|x|>3$, adalah semua titik yang jaraknya terhadap titik asal lebih dari 3,



$|x|>3$

Secara umum nantinya dapat ditunjukkan bahwa jika $a>0$, akan berlaku

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$
$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \quad \text{or} \quad x > a$$

Pernyataan di atas tetap bernilai benar jika tanda ketidaksamaan $<$ dan $>$ diganti dengan $\le$ dan $\ge$. Selanjutnya fakta tersebut dapat digunakan untuk menyelesaikan pertidaksamaan yang melibatkan nilai mutlak, karena hal tersebut memungkinkan kita bekerja tanpa menggunakan nilai mutlak. Selain itu nilai mutlak juga memiliki sifat :

$$|x|^2 = x^2$$
$$|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$$

CONTOH 9 :

Selesaikan pertidaksamaan $|x+2|<1$

Jawab :

$$|x+2|<1$$
$$-1<x+2<1$$
$$-3<x<-1$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah : $HP=(-3,-1)$

CONTOH 10 :

Selesaikan pertidaksamaan $\left|\frac{5}{x}+2\right| \geq 1$

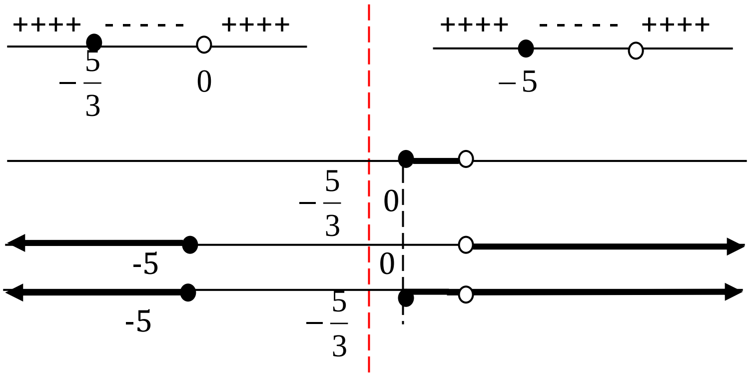
Jawab :

$$\left|\frac{5}{x}+2\right| \geq 1$$

$$\frac{5}{x}+2 \leq -1 \quad \text{atau} \quad \frac{5}{x}+2 \geq 1$$

$$\frac{5}{x}+3 \leq 0 \qquad\qquad \frac{5}{x}+1 \geq 0$$

$$\frac{5+3x}{x} \leq 0 \qquad\qquad \frac{5+x}{x} \geq 0$$



Jadi himpunan penyelesaiannya adalah :

$$HP = \left[-\frac{5}{3}, 0\right) \cup \left((-\infty, -5] \cup (0, \infty)\right)$$

CONTOH 11 :

Selesaikan pertidaksamaan $|3x-1| < 2|x+6|$

Jawab :

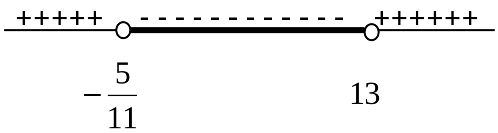
$$|3x-1| < 2|x+6|$$

$$(3x-1)^2 < 2^2(x+6)^2$$

$$(3x-1)^2 - 2^2(x+6)^2 < 0$$

$$(3x-1+2(x+6))(3x-1-2(x+6)) < 0$$

$$(5x+11)(x-13) < 0$$



Jadi himpunan penyelesaiannya adalah :

$$HP = \left(\frac{-5}{11}, 13\right)$$

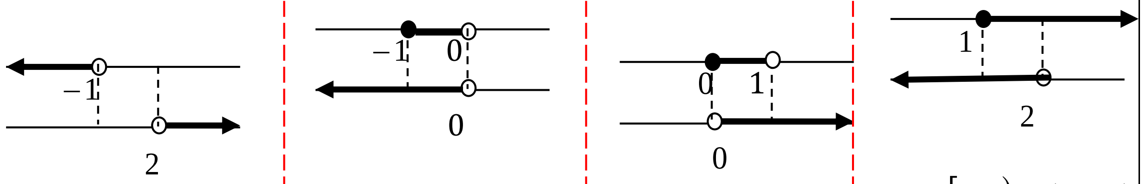
CONTOH 12 :

Selesaikan pertidaksamaan $|x-1|+|x|<|x+1|$

Jawab :

$|x+1|$ berganti tanda di $x=-1$, $|x|$ berganti tanda di $x=0$ dan $|x-1|$ berganti tanda di $x=1$, maka pertidaksamaan di atas kita selesaikan dengan meninjaunya atas kasus $x<-1$, $-1\le x<0$, $0\le x<1$ dan $x\ge 1$

$(-\infty,-1)$	atau $[-1,0)$	atau $[0,1)$	atau $[1,\infty)$
$-(x-1)-x<-(x+1)$	$-(x-1)-x<x+1$	$-(x-1)+x<x+1$	$x-1+x<x+1$
$-2x+1<-x-1$	$-2x+1<x+1$	$1<x+1$	$2x-1<x+1$
$-x<-2$	$-3x<0$	$x>0$	$x<2$
$x>2$	$x<0$		



$HP=(-\infty,1)\cap(2,\infty)$ $=\phi$	$HP=[-1,0)\cap(-\infty,0)$ $=[-1,0)$	$HP=[0,1)\cap(0,\infty)$ $=(0,1)$	$HP=[1,\infty)\cap(-\infty,2)$ $=[1,2)$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah :

$$HP=\phi \quad\cup\quad [-1,0) \quad\cup\quad (0,1) \quad\cup\quad [1,2)$$
$$= [-1,0)\cup(0,2)$$

Setiap bilangan positif mempunyai dua akar kuadrat. Misalnya, akar kuadrat dari 16 adalah -4 dan 4. Untuk $x\ge 0$ lambang $\sqrt{x}$ disebut akar kuadrat utama dari x, yang menunjukkan akar kuadrat tak negatif dari x. Jadi dua akar kuadrat dari 5 adalah $\pm\sqrt{5}$, tapi tidak benar mengatakan $\sqrt{25}=\pm 5$. Dengan menggunakan nilai mutlak kita punyai

$$\sqrt{x^2}=|x|.$$

CONTOH 13 :

Selesaikan pertidaksamaan $\sqrt{4-x^2} \le 2$

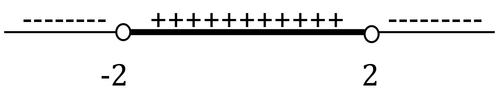
Jawab :

$$\sqrt{4-x^2} \le 2$$
$$\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 \le 4$$
$$4-x^2 \le 4$$
$$-x^2 \le 0$$
$$x^2 > 0$$

Himpunan penyelesaian dari $x^2 > 0$ adalah $\Re$

Tetapi kita juga harus diingat bahwa $\sqrt{4-x^2}$ memiliki nilai jika $4-x^2 \ge 0$

$$4-x^2 \ge 0$$
$$(2-x)(2+x) \ge 0$$



Himpunan penyelesaian dari $(2-x)(2+x) \ge 0$ adalah $[-2,2]$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\Re \cap \left[-2,2\right] = [-2,2]$

3. Fungsi

<u>Indikator Pencapaian Hasil Belajar</u>

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

1. Menjelaskan pengertian fungsi
2. Menentukan daerah asal dari suatu fungsi
3. Mengenali suatu kurva adalah grafik fungsi atau bukan
4. Memeriksa apakah suatu fungsi adalah fungsi genap, ganjil atau bukan keduanya
5. Membuat grafik fungsi yang terkait dengan nilai mutlak dan bilangan bulat terbesar

<u>Materi Ajar</u>

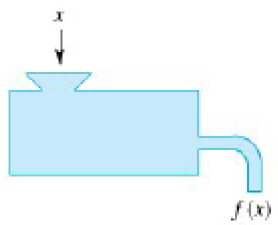
Fungsi

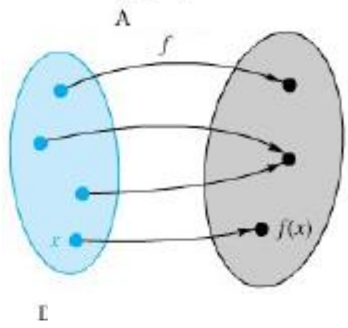
Konsep fungsi adalah salah satu konsep dasar dalam matematika, dan memegang peranan penting di kalkulus

Definisi

Fungsi adalah aturan pengaitan yang mengaitkan setiap x *anggota suatu himpunan yang dinamakan daerah asal (domain) dengan suatu nilai* $f(x)$ *pada himpunan ke dua. Himpunan dari semua nilai yang diperoleh disebut daerah hasil (range)*

Pikirkan fungsi sebagai suatu mesin yang mengambil suatu masukan x dan menghasilkan keluaran $f(x)$. Pada mesin ini dimungkinkan beberapa masukan yang berbeda menghasilkan keluaran yang sama.





Definisi tersebut tidak membatasi seperti apa objek dari daerah asal dan daerah hasil. Daerah asal bisa saja berupa himpunan mahasiswa di kelas Kalkulus dan daerah hasilnya nilai $\{A, B, C, D, E\}$ yang diperoleh. Tetapi hampir semua fungsi yang ditemui dalam Kalkulus adalah fungsi satu atau lebih dari variabel riil. Aturan pengaitan seringkali dinyatkan dalam bentuk rumus, misalnya $g(x) = x^2$.

Fungsi dinotasikan dengan huruf tunggal seperti f, g, F, G . Selanjutnya $f(x)$ dibaca " f dari x " atau " f pada x " menyatakan nilai yang dipasangkan oleh f untuk x.

CONTOH 1 :

Untuk $f(x) = x^2 - 2x$ cari dan sederhanakan

(a) $f(4)$ (b) $f(4+h)$

(c) $f(4+h) - f(4)$ (d) $[f(4+h) - f(4)]/h$

Jawab :

(a) $f(4) = 4^2 - 2.4 = 16 - 8 = 8$

(b) $f(4+h) = (4+h)^2 - 2(4+h) = 16 + 8h + h^2 - 8 - 2h = h^2 + 6h + 8$

(c) $f(4+h) - f(4) = h^2 + 6h + 8 - 8 = h^2 + 6h$

(d) $\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \dfrac{h^2 + 6h}{h} = 6$

Daerah Asal dan Daerah Hasil

Untuk mencirikan suatu fungsi, kita tidak hanya menyatakan aturan pengaitannya tapi seringkali juga perlu menyatakan daerah asalnya. Aturan pengaitan dengan daerah asal akan menentukan daerah hasil. Sebagai contoh fungsi $F(x) = x^2 - 1$ dengan daerah asal $\{-1,2,3,4,5\}$ menentukan daerah hasil $\{0,3,8,15,24\}$.

Jika daerah asal tidak dinyatakan secara spesifik, kita menganggap sebagai daerah asalnya adalah himpunan terbesar di mana aturan pengaitannya memiliki makna atau nilai dan biasanya dinamakan daerah asal alamiah. Bilangan-bilangan yang harus diingat untuk dikeluarkan dari daerah asal alamiah adalah yang nilainya dapat memberikan pembagian dengan nol atau akar negatif .

CONTOH 2 :

Tentukan daerah asal (alamiah) dari fungsi berikut :

(a) $f(x) = 1/(x-3)$ (b) $g(t) = \sqrt{9 - t^2}$

(c) $h(w) = 1/\sqrt{9 - w^2}$

Jawab :

(a) Kita menghindari pembagian dengan nol , dalam hal ini $x = 3$

Himpunan terbesar di mana f memiliki nilai adalah $\{x | \, x \neq 3\}$.

Jadi daerah asal f adalah, $D_f = \{x | \, x \neq 3\} = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$

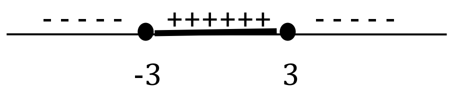
(b) Kita menghindari akar negatif, dalam hal ini $9-t^2<0$

Himpunan terbesar di mana $g(t)=\sqrt{9-t^2}$ memiliki nilai adalah $\left\{t \mid 9-t^2\geq 0\right\}$.

Untuk menentukan semua nilai t yang memenuhi $9-t^2\geq 0$, itu berarti kita harus menyelesaikan pertidaksamaan $9-t^2\geq 0$. Perhatikan,

$9-t^2\geq 0$

$(3-t)(3+t)\geq 0$



Jadi daerah asal g adalah, $D_g=\left\{t \mid -3\leq t\leq 3\right\}=[-3,3]$

(c) Kita menghindari akar negatif dan pembagian dengan nol

Himpunan terbesar di mana $h(w)=\dfrac{1}{\sqrt{9-w^2}}$ memiliki nilai adalah

$\left\{w \mid 9-w^2>0\right\}$ Jadi daerah asal h adalah $\left\{w \mid -3<w<3\right\}=(3,3)$

Jika aturan fungsi diberikan oleh persamaan dalam bentuk $y=f(x)$, kita sebut x sebagai variabel bebas dan y bagai variabel terikat. Ketika sebarang nilai di daerah asal di substusi untuk variabel bebas, nilai tersebut akan menentukan nilai untuk variabel terikat.

Grafik Fungsi

Jika daerah asal dan daerah asal fungsi berupa himpunan bagian dari bilangan riil kita dapat menggambarkan fungsi tersebut dalam suatu grafik pada bidang koordinat. Grafik suatu fungsi f adalah kurva pada bidang-xy yang dibentuk oleh semua titik (x,y) dengan y memenuhi persamaan $y=f(x)$ dengan x anggota daerah asal.

Untuk saat ini, kita menggambar grafik dengan menghubungkan sejumlah titik yang dilalui grafik, yakni titik yang koordinatnya memenuhi persamaan $y=f(x)$. Setelah mempelajari limit dan turunan, nanti kita bisa menggambar grafik dengan cara yang lebih cermat .

Berikut adalah prosedur sederhana untuk menggambar grafik dengan menghubungkan sejumlah titik :

Langkah 1 : Dapatkan koordinat beberapa titik yang memenuhi persamaan .

Langkah 2 : Rajah titik-titik tersebut di bidang-xy

Langkah 3 : Hubungkan titik-titik tersebut dengan kurva mulus

CONTOH 3 :

Gambarkan grafik fungsi

(a) $f(x) = x^2 - 3$ (b) $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$

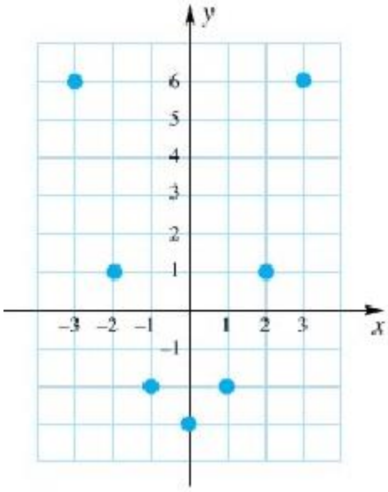
Jawab :

(a) $f(x) = x^2 - 3$ memiliki nilai untuk semua x anggota himpunan bilangan riil, sehingga daerah asal f adalah himpunan bilangan riil $\Re$. Selanjutnya kita bisa menggambar grafik fungsi f dengan langkah seperti berikut ini :

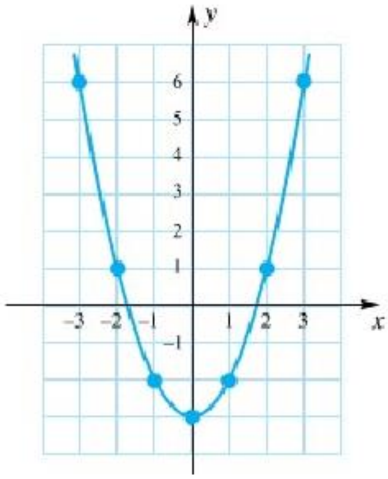
$y = x^2 - 3$

x	y
−3	6
−2	1
−1	−2
0	−3
1	−2
2	1
3	6

Buat daftar nilai



Rajah titik-titik di bidang- xy



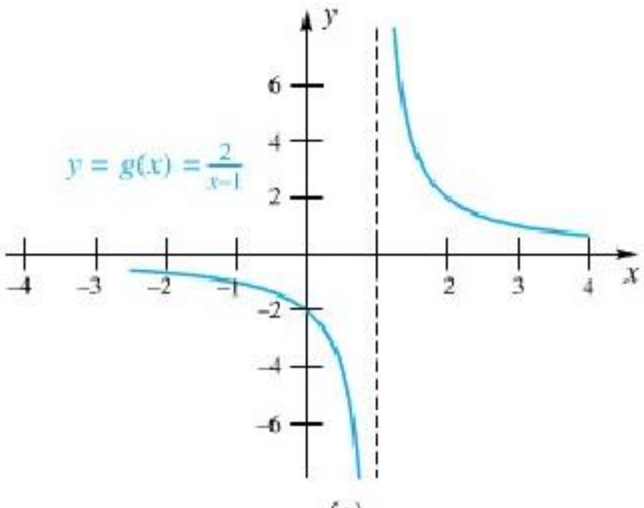
Hubungkan titik-titik dengan kurva mulus

Dari grafik tersebut, kita bisa menduga daerah hasil f adalah $\{x \mid x \geq -3\} = [-3, \infty)$

(b) $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$ memiliki nilai untuk semua x anggota himpunan bilangan riil, kecuali di $x = 1$, sehingga daerah asal g adalah $D_g = \{x \mid x \neq 1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Perhatikan juga bahwa $g(x) \neq 0$ untuk semua x anggota daerah asal.

Selanjutnya dengan mengikuti prosedur membuat grafik seperti yang dijelaskan di atas , diperoleh grafik :



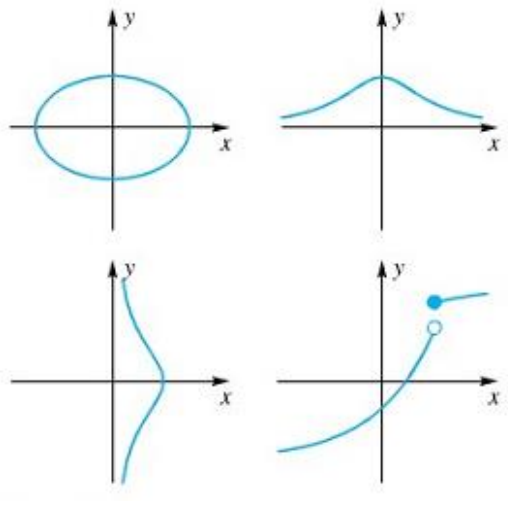
(a)

Dari grafik tersebut, kita bisa menduga daerah hasil *g* adalah $\{x \mid -\infty < x < 0 < \text{atau } 0 < x < \infty\} = (\infty,0) \cup (0,\infty)$

Grafik suatu fungsi berupa suatu kurva di bidang koordinat, tapi tidak berarti setiap kurva di bidang-xy merupakan grafik suatu fungsi. Karena fungsi mengaitkan setiap anggota daerah asal dengan tepat satu anggota daerah kawan , kita dapat memeriksa suatu kurva merupakan grafik suatu fungsi atau bukan, dengan memperhatikan apakah setiap setiap garis vertikal hanya memotong kurva di satu titik (uji garis vertikal).

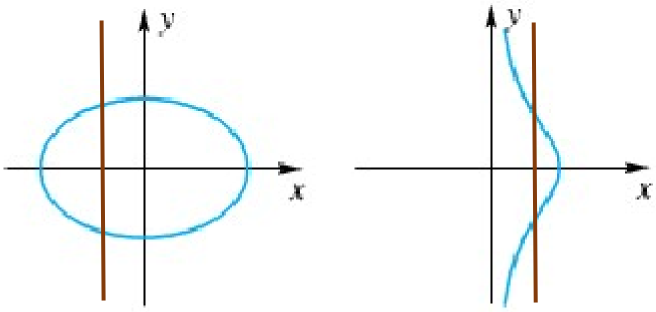
CONTOH 4:

Manakah diantara kurva berikut yang menunjukkan grafik suatu fungsi

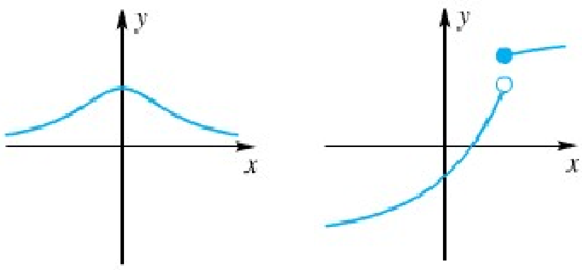


Jawab :

Dari gambar yang diberikan pada soal, kita bisa mendapatkan garis vertikal yang memotong dua kurva berikut pada lebih dari satu titik, sehingga sesuai dengan uji garis vertikal kita bisa menyimpulkan bahwa kedua kurva bukan grafik fungsi



Sedangkan pada dua kurva lainnya setiap garis vertikal memotong kurva hanya di satu titik, sehingga kurva-kurva tersebut merupakan grafik fungsi.



Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Kita dapat memperkirakan kesimetrian grafik suatu fungsi dengan melihat rumus fungsinya. Jika $f(-x) = f(x)$ untuk setiap x di daerah asal, maka grafik f simetri terhadap sumbu-y. Fungsi yang demikian dinamakan fungsi genap. Jika $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap x di daerah asal, maka grafik f simetri terhadap titik asal. Fungsi yang demikian dinamakan fungsi ganjil.

CONTOH 5 :

Periksa apakah fungsi-fungsi berikut adalah ganjil, genap atau bukan keduanya

a. $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{x^4 - 3x^2 + 4}$

b. $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$

Jawab :

(a) Misal x anggota daerah asal , maka

$$f(-x)=\frac{(-x)^3+3(-x)}{(-x)^4-3(-x)^2+4}=\frac{-x^3-3x}{x^4-3x^2+4}=-\frac{x^3+3x}{x^4-3x^2+4}=-f(x)\ ,$$

Jadi $f(-x)=f(x)$ untuk setiap x di daerah asal, dengan demikian kita bisa menyimpulkan bahwa f adalah fungsi ganjil.

(b) Untuk $x_0=3$, maka $g(-x_0)=g(-3)=\dfrac{2}{-3-1}=-\dfrac{1}{2}$ dan $g(x_0)=g(3)=\dfrac{2}{3-1}=1$. Perhatikan bahwa untuk $x_0=3$, $g(-x_0)\neq g(x_0)$ dan $g(-x_0)\neq -g(x_0)$. Jadi terdapat x_0 anggota daerah asal sedemikian sehingga $g(-x_0)\neq g(x_0)$ dan $g(-x_0)\neq -g(x_0)$, dengan demikian kita bisa menyimpulkan bahwa g bukan fungsi genap dan juga bukan fungsi ganjil.

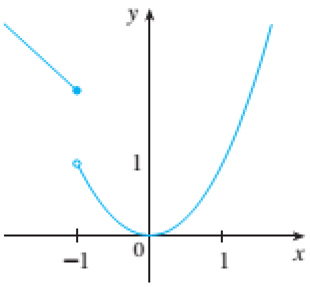
Fungsi Yang Didefinisikan Sepotong-sepotong

Berikut adalah contoh-contoh dari fungsi yang didefinisikan dengan rumus atau aturan yang berbeda pada bagian yang berbeda pada daerah asal . Fungsi yang demikian dinamakan fungsi yang didefinisikan sepotong-sepotong.

Misal

$$f(x)=\begin{cases}1-x & \text{if } x\leq -1\\ x^2 & \text{if } x>-1\end{cases}$$

Ingat bahwa fungsi itu sebenarnya adalah aturan. Untuk fungsi f yang diberikan di atas , aturannya adalah sebagai berikut : Pertama lihat nilai dari input x. Jika $x\leq -1$ maka nilai nilai dari f adalah $f(x)=1-x$, jika $x>-1$ maka nilai dari f adalah $f(x)=x^2$. Bagaimana menggambar grafiknya ? Dengan memperhatikan aturan pengaitan atau rumus fungsi f, maka grafik fungsi f terdiri dari dua bagian. Untuk $x\leq -1$, grafik fungsi f berimpit dengan garis $y=1-x$, sedangkan untuk $x>-1$ grafik fungsi f berimpit dengan kurva $y=x^2$



Fungsi nilai mutlak $f(x)=|x|$ didefinsikan sebagai

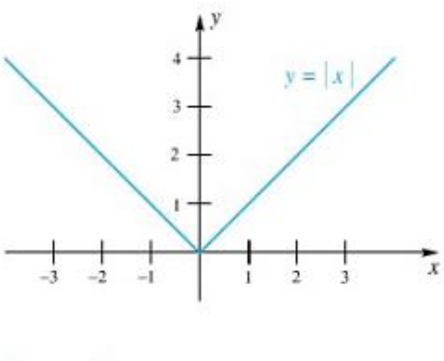
$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

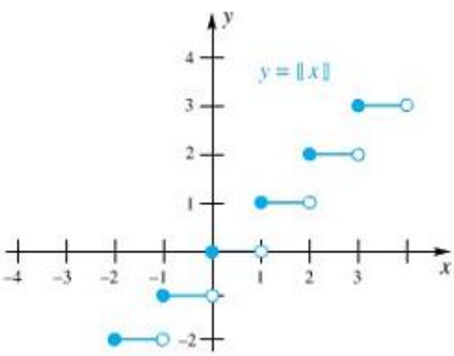
dan fungsi bilangan bulat terbesar $g(x)=[\![x]\!]$ didefinisikan sebagai

$[\![x]\!] =$ bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x

$$[\![x]\!] = \begin{cases} \ldots\ldots \\ -2 & \text{jika} & -2 \leq x < -1 \\ -1 & \text{jika} & -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{jika} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{jika} & 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{jika} & 2 \leq x < 3 \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Kedua fungsi tersebut adalah fungsi yang didefinisikan sepotong-sepotong. Grafiknya ditunjukkan pada gambar berikut ini





CONTOH 6 :

Buat sketsa grafik fungsi berikut :

a.

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \le 0 \\ t+1 & \text{if } 0 < t < 2 \\ t^2 - 1 & \text{if } t \ge 2 \end{cases}$$

b.

$$g(x) = \left[\!\left[\frac{x}{2} \right]\!\right]$$

c.

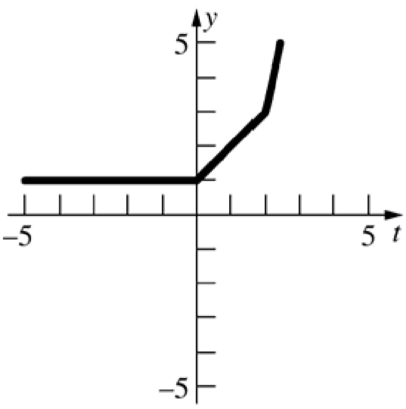
$$F(t) = -|t+3|$$

Jawab :

a.

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \le 0 \\ t+1 & \text{if } 0 < t < 2 \\ t^2 - 1 & \text{if } t \ge 2 \end{cases}$$

Grafik fungsi g yang terdiri dari tiga bagian : untuk $t \le 0$, grafik fungsi g berimpit dengan garis $y = 1$, untuk $0 < t < 2$ grafik fungsi g berimpit dengan garis $y = t + 1$, untuk $t \ge 2$ grafik fungsi g berimpit dengan kurva $y = t^2 - 1$



b.

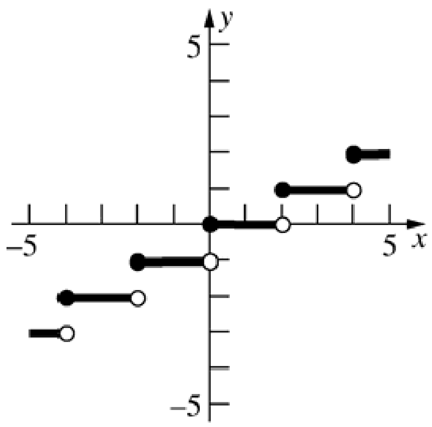
$$g(x) = \left[\!\left[\frac{x}{2} \right]\!\right]$$

$g(x) = \left[\!\left| \frac{x}{2} \right|\!\right] =$ bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan $\frac{x}{2}$

g adalah fungsi yang dapat didefinisikan sepotong-sepotong , yakni

$$g(x)=\left[\left|\frac{x}{2}\right|\right]=\begin{cases}\dots\dots \\ -2 & \text{jika} \quad -2\le x/2<-1 \\ -1 & \text{jika} \quad -1\le x/2<0 \\ 0 & \text{jika} \quad 0\le x/2<1 \\ 1 & \text{jika} \quad 1\le x/2<2 \\ 2 & \text{jika} \quad 2\le x/2<3 \\ \dots\dots\end{cases}=\begin{cases}\dots\dots \\ -2 & \text{jika} \quad -4\le x<-2 \\ -1 & \text{jika} \quad -2\le x<0 \\ 0 & \text{jika} \quad 0\le x<2 \\ 1 & \text{jika} \quad 2\le x<4 \\ 2 & \text{jika} \quad 4\le x<6 \\ \dots\dots\end{cases}$$

sehingga grafik fungsi g



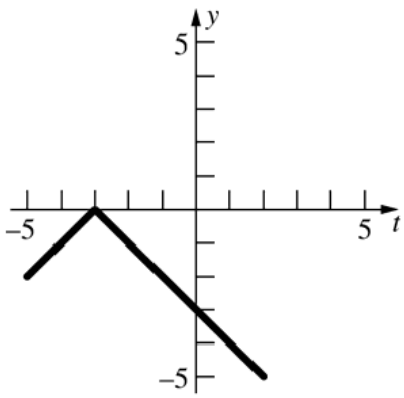
c.

$F(t) = -|t+3|$

F adalah fungsi yang dapat didefinisikan sepotong-sepotong , yakni

$$F(t)=\begin{cases}-(t+3) & jika \quad t+3\ge 0 \\ -(-(t+3)) & jika \quad t+3<0\end{cases}=\begin{cases}-t-3 & jika \quad t\ge -3 \\ t+3 & jika \quad t<-3\end{cases}$$

sehingga grafik fungsi F



4. Operasi Fungsi

Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

1. Menentukan definisi fungsi yang diperoleh dari penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian dari fungsi-fungai yang diberikan
2. Menentukan definisi fungsi komposit dari fungsi-fungsi yang diberikan dan menentukan daerah asal dan daerah hasil dari fungsi komposit tersebut
3. Menjelaskan arti geometri dari berbagai transformasi fungsi
4. Membuat sketsa grafik fungsi dengan memanfaatkan transformasi fungsi

Materi Ajar

Bilamana dua fungsi dikatakan sama ? Tentu saja jika daerah asal dan aturan pengaitannya sama. Hal itu didefinisikan seperti berikut :

Definisi :

Dua fungsi $f : A \to B$ dan $g : A \to B$ *dikatakan sama , ditulis* $f = g$ *, jika* $f(x) = g(x)$ *untuk semua* $x \in A$

Penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian fungsi

Jika a dan b bilangan riil, maka kita dapat menjumlahkan a dan b sehingga diperoleh $a+b$. Kita memikirkan hal sama untuk fungsi-fungsi, kita menginginkan jika f dan g fungsi, kita bisa mendapatkan fungsi $f+g$. Bagaimana pendefinisian untuk $f+g$? Apakah setiap kali kita memiliki dua fungsi, kita selalu bisa mendapat jumlah dari kedua fungsi tersebut ?

Misal $f(x) = x-3$ dan $g(x) = \sqrt{x}$, kita dapat membuat fungsi baru $f+g$ dengan mengaitkan x dengan nilai $f(x)+g(x) = x-3+\sqrt{x}$. Tentu saja agar nilai tersebut ada, x harus berada pada daerah asal f dan daerah asal g, yakni daerah asal $f+g$ adalah irisan dari daerah asal f dan daerah asal g. Dengan cara yang analog, kita dapat memperoleh $f-g$, fg dan $\dfrac{f}{g}$

Definisi :

Misalkan f *fungsi dengan daerah asal* A *dan* g *fungsi dengan daerah asal* B

Fungsi $f+g$, $f-g$, fg dan $\dfrac{f}{g}$ *didefinisikan sebagai*

$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ dengan daerah asal $A \cap B$

$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$ dengan daerah asal $A \cap B$

$(fg)(x) = f(x)g(x)$ dengan daerah asal $A \cap B$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dengan daerah asal $(A \cap B)/\{x | g(x) = 0\rangle$

CONTOH 1 :

Misal $F(x) = \sqrt[4]{x+1}$ dan $G(x) = \sqrt{9 - x^2}$. Cari rumus untuk $F + G$, $F - G$, $F \cdot G$ dan F / G dan tentukan daerah asalnya

Jawab :

Kita menghindari akar negatif agar $F(x) = \sqrt[4]{x+1}$ dan $G(x) = \sqrt{9 - x^2}$ memiliki nilai. Daerah asal F adalah $D_F = \{x | x \geq -1\} = [-1, \infty)$ dan daerah asal G adalah $D_G = \{x | -3 \leq x \leq 3\} = [-3,3]$.

Rumus untuk $F + G$, $F - G$, $F \cdot G$ dan F / G dan daerah asalnya adalah sebagai berikut :

$(F + G)(x) = F(x) + G(x) = \sqrt[4]{x+1} + \sqrt{9 - x^2}$ dengan daerah asal $D_F \cap D_G = [-1,3]$

$(F - G)(x) = F(x) - G(x) = \sqrt[4]{x+1} - \sqrt{9 - x^2}$ dengan daerah asal $D_F \cap D_G = [-1,3]$

$(FG)(x) = F(x)G(x) = (\sqrt[4]{x+1})(\sqrt{9 - x^2})$ dengan daerah asal $D_F \cap D_G = [-1,3]$

$(\frac{F}{G})(x) = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{9 - x^2}}$ dengan daerah asal $(D_F \cap D_G)/\{x | G(x) = 0\rangle = [-1,3]/\{-3,3\} = [-1,3)$

Kita juga bisa mendapatkan fungsi dengan perpangkatan. Yang kita maksudkan f^n adalah fungsi yang didefinisikan dengan

$$f^n(x) = [f(x)]^n$$

Tetapi ada pengecualian untuk $n = -1$, kita menggunakan simbol f^{-1} untuk fungsi invers (akan kita bicarakan pada pembahasan khusus tentang hal itu nantinya). Jadi f^{-1} tidak berarti $\frac{1}{f}$.

Suatu fungsi dalam bentuk $f(x) = k$, dengan k konstanta di sebut fungsi konstan. Fungsi yang aturan pengaitannya didefinisikan dengan $f(x) = x$ disebut fungsi identitas. Sebarang fungsi yang diperoleh dari fungsi konstan dan fungsi identitas melalui operasi penjumlahan, pengurangan dan perkalian dinamakan fungsi polinomial. Fungsi f adalah suatu fungsi polinomial jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

dengan a_i , $i = 0,1,2,\ldots,n$ adalah bilangan riil. Jika $a_n \neq 0$ maka dikatakan n adalah derajat dari fungsi polinomial tersebut. Daerah asal dari fungsi polinomial adalah himpunan bilangan riil. Khususnya, $f(x) = ax + b$ adalah fungsi berderajat satu disebut sebagai fungsi linier dan $f(x) = ax^2 + bx + c$ adalah fungsi berderajat dua dan disebut sebagai fungsi kuadrat.

Hasil bagi dari dua fungsi polinomial disebut fungsi rasional. Jadi f adalah fungsi rasional jika dapat diyatakan dalam bentuk

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Daerah asal dari fungsi rasional adalah himpunan semua bilangan riil kecuali yang menyebabkan penyebut bernilai nol.

Suatu fungsi dikatakan fungsi aljabar eksplisit jika dapat diperoleh dari fungsi konstanta dan fungsi identitas melalui, penjumlahan, pengurangan, pembagian, perkalian dan penarikan akar . Sebagai contoh ,

$$f(x) = 3x^{2/5} = 3\sqrt[5]{x^2} \qquad g(x) = \frac{(x+2)\sqrt{x}}{x^3 + \sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

CONTOH 2 :

Klasifikasikan setiap fungsi aljabar berikut ini sebagai fungsi polinomial, fungsi rasional atau bukan keduanya :

(a) $f(x) = 3x^{1/2} + 1$ (b) $f(x) = 3$

(c) $f(x) = 3x^2 + 2x^{-1}$ (d) $f(x) = \pi x^3 - 3\pi$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ (f) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x+3}}$

Jawab :

(a) $f(x) = 3x^{1/2} + 1$ bukan fungsi polinomial dan bukan fungsi rasional, karena terdapat perkalian dengan fungsi akar $x^{1/2}$, bukan perkalian dengan fungsi identitas

(b) $f(x) = 3$ adalah fungsi polinomial

(c) $f(x) = 3x^2 + 2x^{-1}$ dapat ditulis sebagai $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2}{x}$, sehingga merupakan fungsi rasional

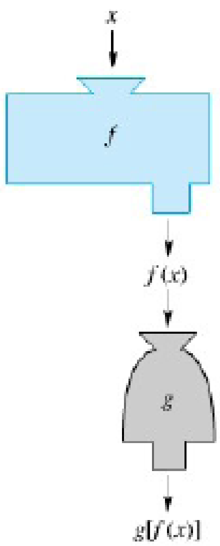
(d) $f(x) = \pi x^3 - 3\pi$ adalah fungsi polinomial

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ adalah fungsi rasional

(f) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x+3}}$ bukan fungsi polinomial dan bukan fungsi rasional, karena terdapat pembagian dengan fungsi akar $\sqrt{x+1}$, bukan pembagian dengan fungsi polinomial

Komposisi Fungsi

Kita pernah memikirkan fungsi sebagai mesin yang mengambil suatu masukan x dan menghasilkan keluaran $f(x)$. Sekarang, kita akan meletakkan dua mesin bersama-sama dan bekerja berurutan untuk membuat mesin yang lebih canggih. Sebagai ilustrasi perhatikan gambar berikut :



Jika f bekerja pada x untuk menghasilkan $f(x)$ dan kemudian g bekerja pada $f(x)$ untuk menghasilkan $g(f(x))$, kita katakan kita telah mengkomposisikan g dengan f. Hasilnya disebut sebagai fungsi komposisi dari g dengan f, ditulis dengan gof, jadi $(gof)(x) = g(f(x))$. Tentu saja agar $g(f(x))$ memiliki nilai x harus menjadi anggota daerah asal f dan $f(x)$ menjadi anggota daerah asal g.

Definisi :

Diberikan fungsi f dengan daerah asal A dan g dengan daerah asal B. Fungsi komposit gof (disebut juga komposisi dari g dengan f) didefinisikan oleh $g \circ f(x) = g(f(x))$ dengan daerah asal adalah himpunan semua $x \in A$ dan $f(x) \in B$

Agar g dapat dikomposisikan dengan f, maka harus terdapat x anggota daerah asal f dengan $f(x)$ menjadi anggota daerah asal g. Daerah asal dari gof adalah himpunan semua nilai x yang memenuhi sifat : x anggota daerah asal f dan $f(x)$ anggota daerah asal g

CONTOH 3 :

1. Apakah operasi komposisi bersifat komutatif ? Jelaskan jawabanmu
2. Diberikan fungsi $f(x) = \dfrac{6x}{x^2 - 9}$ dan $g(x) = \sqrt{3x}$
   a. Perlihatkan bahwa f dapat dikomposisikan dengan g
   b. Tentukan rumus fungsi $f \circ g$
   c. Tentukan daerah asal $f \circ g$

Jawab :

1. Pilih $f(x) = x^2$ dan $g(x) = \sqrt{x+1}$.

   $gof(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2+1}$ dan $fog(x) = f(g(x)) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = x+1$.

   Terlihat bahwa $gof(x) \neq fog(x)$.

   Jadi terdapat dua fungsi f dan g sedemikian sehingga $gof(x) \neq fog(x)$. Ini berarti operasi komposisi tidak bersifat komutatif.

2. Diberikan fungsi $f(x) = \dfrac{6x}{x^2 - 9}$ dan $g(x) = \sqrt{3x}$

   a. Kita harus menghindari pembagian dengan nol ,agar $f(x) = \dfrac{6x}{x^2 - 9}$ memiliki nilai Daerah asal f adalah $D_f = \{x \mid x \neq 3 \text{ atau } x \neq -3\} = (-\infty,-3) \cup (-3,3) \cup (3,\infty)$.

   Kita harus menghindari akar negatif , agar $g(x) = \sqrt{3x}$ memiliki nilai

   Daerah asal g adalah $D_g = \{x \mid x \geq 0\}$.

   Selanjutnya pilih $x = 0 \in D_g$ dan perhatikan bahwa $g(0) = 0 \in D_f$.

   Jadi ada x anggota daerah asal g dengan $g(x)$ menjadi anggota daerah asal f.

   Dengan demikian f dapat dikomposisikan dengan g

b. Rumus untuk fog adalah $fog(x) = f(g(x)) = \dfrac{6\sqrt{3x}}{(\sqrt{3x})^2 - 9} = \dfrac{6\sqrt{3x}}{3x-9}$

c. Jika kita memperhatikan rums untuk $fog = \dfrac{6\sqrt{3x}}{3x-9}$, kita harus menghindari pembagian dengan nol dan akar negatif , yaitu jika $x \neq 3$ dan $x \geq 0$.

Di sisi lain perlu diperhatikan juga bahwa agar f dapat dikomposisikan dengan g , haruslah $x \in D_g$.

Ini berarti daerah asal fog adalah himpunan semua x yang memenuhi $x \neq 3, x \geq 0$ dan $x \in D_g$, yakni $x \in (-\infty,3) \cup (3,\infty) \cap [0,\infty) \cap [0,\infty)$.

Jadi daerah asal fog adalah $D_{fog} = [0,3) \cup (3,\infty)$.

Dalam kalkulus kita terkadang perlu menyatakan suatu fungsi sebagai komposisi dari dari beberapa fungsi . Biasanya kita dapat menyatakan hal ini dalam berbagai cara. Misalnya $p(x) = \sqrt{x^2+4}$ dapat ditulis sebagai

$$p(x) = g(f(x)) \text{ dengan } g(x) = \sqrt{x} \quad \text{dan} \quad f(x) = x^2 + 4$$

dan

$$p(x) = g(f(x)) \text{ dengan } g(x) = \sqrt{x+4} \quad \text{dan} \quad f(x) = x^2$$

CONTOH 4 :

Nyatakan fungsi-fungsi berikut sebagai komposisi dari beberapa fungsi

a. $p(x) = \dfrac{2}{(x^2+x+1)^3}$ b. $q(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Jawab :

a. $p(x) = \dfrac{2}{(x^2+x+1)^3}$ bisa dipandang sebagai $p(x) = fogoh(x)$, dengan $h(x) = x^2 + x + 1,\ g(x) = x^2$ dan $f(x) = \dfrac{1}{x}$

b. $q(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ bisa dipandang sebagai $q(x) = fogoh(x)$, dengan $h(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$ dan $f(x) = \dfrac{1}{x}$

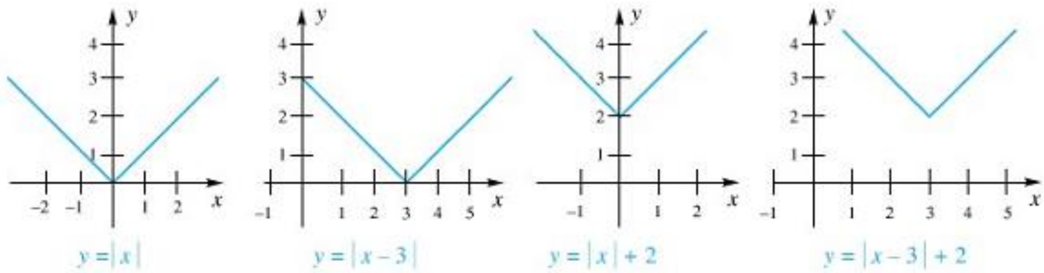
Transformasi Fungsi

Dengan menerapkan transformasi tertentu pada grafik fungsi yang diketahui, dapat diperoleh grafik fungsi tertentu yang berkaitan. Hal ini akan memberikan kita kemudahan untuk menggambar grafik fungsi secara cepat dengan menggunakan tangan.

Misal $f(x) = |x|$, grafik dari

$$y = f(x) \qquad y = f(x-3) \qquad y = f(x) + 2 \qquad y = f(x-3) + 2$$

diberikan sebagai berikut



Adakah kaitan antara grafik-grafik tersebut ? Secara umum untuk pergeseran tegak dan mendatar kita punyai :

Jika $c > 0$ *, dari grafik* $y = f(x)$ *dapat diperoleh grafik*

$y = f(x) + c$ *dengan menggeser* $y = f(x)$ *sejauh* c *satuan ke atas*

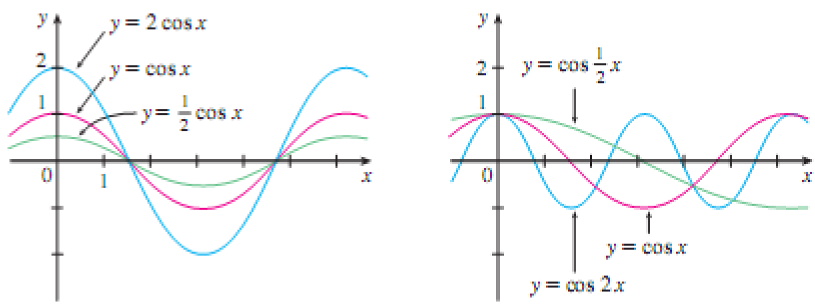
$y = f(x) - c$ *dengan menggeser* $y = f(x)$ *sejauh* c *satuan ke bawah*

$y = f(x - c)$ *dengan menggeser* $y = f(x)$ *sejauh* c *satuan ke kanan*

$y = f(x + c)$ *dengan menggeser* $y = f(x)$ *sejauh* c *satuan ke kiri*

Misal $y = \cos x$. Grafik dari $y = 2\cos x$, $y = \frac{1}{2}\cos x$, $y = \cos 2x$ dan $y = \cos\frac{1}{2}x$

dapat dilihat sebagai berikut



Secara umum untuk peregangan dan pemampatan kita punyai :

Jika $c > 1$ *, dari grafik* $y = f(x)$ *dapat diperoleh grafik*

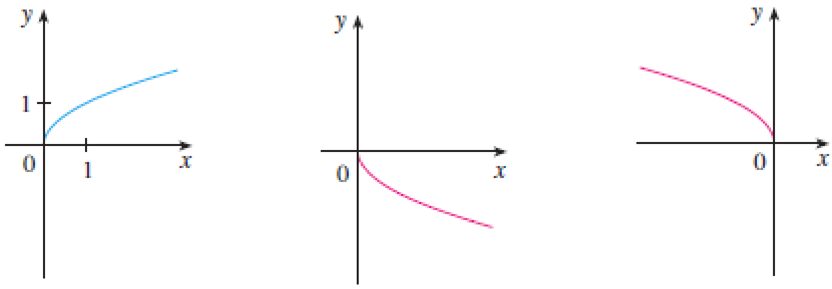
$y = cf(x)$ *dengan meregangkan* $y = f(x)$ *secara tegak dengan faktor* c

$y = \frac{1}{c} f(x)$ *dengan memampatkan* $y = f(x)$ *secara tegak dengan faktor* c

$y = f(cx)$ *dengan memampatkan* $y = f(x)$ *secara mendatar dengan faktor* c

$y = f(\frac{1}{c}x)$ *dengan meregangkan* $y = f(x)$ *secara mendatar dengan faktor* c

Misal $y = \sqrt{x}$, grafik $y = -\sqrt{x}$ dan grafik $y = \sqrt{-x}$ dapat dilihat sebagai berikut :



$y = \sqrt{x}$ $\qquad$ $y = -\sqrt{x}$ $\qquad$ $y = \sqrt{-x}$

Secara umum untuk pencerminan terhadap sumbu-x dan pencerminan terhadap sumbu-y, kita punyai :

Dari grafik $y = f(x)$ *dapat diperoleh grafik*

$y = -f(x)$ *dengan mencerminkan grafik* $y = f(x)$ *terhadap sumbu-*x

$y = f(-x)$ *dengan mencerminkan grafik* $y = f(x)$ *terhadap sumbu-*y

CONTOH 5 :

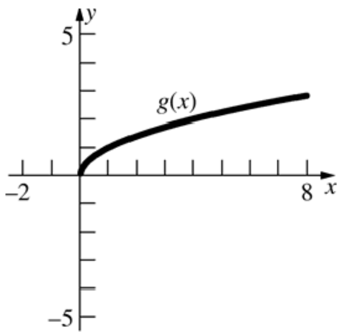
Tanpa memplot titik demi titik gambarkan grafik fungsi berikut dengan memanfaatkan transformasi dari grafik fungsi baku yang diberikan :

a. grafik fungsi $y = \sqrt{x-2} - 3$ dari grafik fungsi $y = \sqrt{x}$

b. grafik fungsi $y = |x+3| - 4$ dari grafik fungsi $y = |x|$

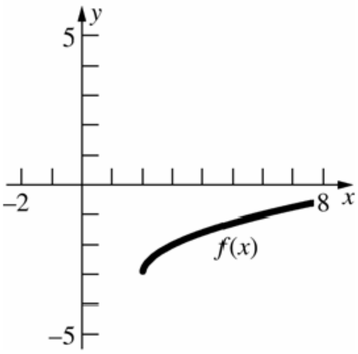
Jawab :

a.

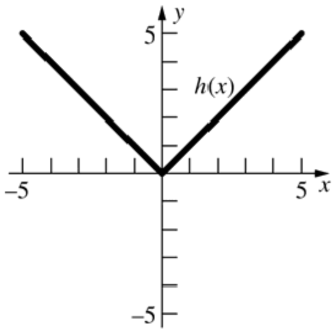


$y = \sqrt{x}$

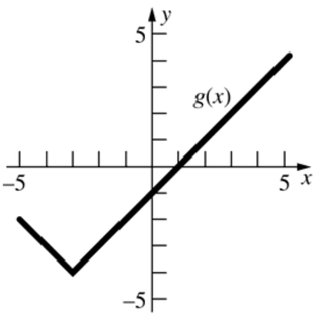
Grafik $y = \sqrt{x-2} - 3$, diperoleh dari dengan mengggeser grafik $y = \sqrt{x}$ dua satuan ke kanan dan tiga satuan ke bawah



b.



Grafik $y = |x+3| - 4$, diperoleh dari dengan mengggeser grafik $y = |x|$ tiga satuan ke kiri dan empat satuan ke bawah



5. Pengertian Intuitif tentang Limit

Indikator Pencapaian Hasil Belajar

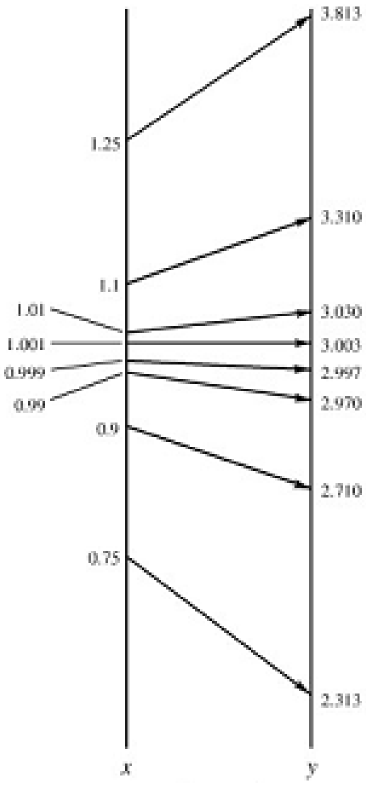
Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

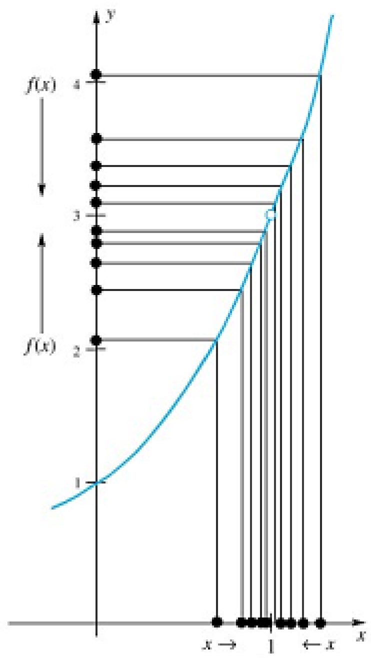
1. Menjelaskan pengertian limit fungsi secara intuisi
2. Menentukan nilai limit suatu fungsi di suatu titik menggunakan pengertian intutif tentang limit

Materi Ajar

Tinjau fungsi $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$. Perhatikan bahwa fungsi tersebut tidak terdefinisi pada $x=1$. Tapi mungkin kita masih bertanya apa yang terjadi dengan $f(x)$ jika x mendekati 1 ? Untuk melihat hal tersebut kita dapat melakukan dengan cara menghitung nilai $f(x)$ untuk beberapa nilai x di sekitar 1, menunjukkan diagram skematik untuk nilai-nilai tersebut atau membuat sketsa grafik $y=f(x)$

x	$y=\dfrac{x^3-1}{x-1}$
1.25	3.813
1.1	3.310
1.01	3.030
1.001	3.003
↓	↓
1.000	?
↑	↑
0.999	2.997
0.99	2.970
0.9	2.710
0.75	2.313





Dari ketiga cara tersebut kita melihat bahwa $f(x)$ mendekati 3 jika x mendekati 1. Hal ini diungkapkan dengan "limit fungsi $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ jika x mendekati sama dengan 3.

Dalam lambang matematika ditulis $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$

Sebagai langkah awal kita coba dulu membuat definisi limit seperti berikut :

Definisi

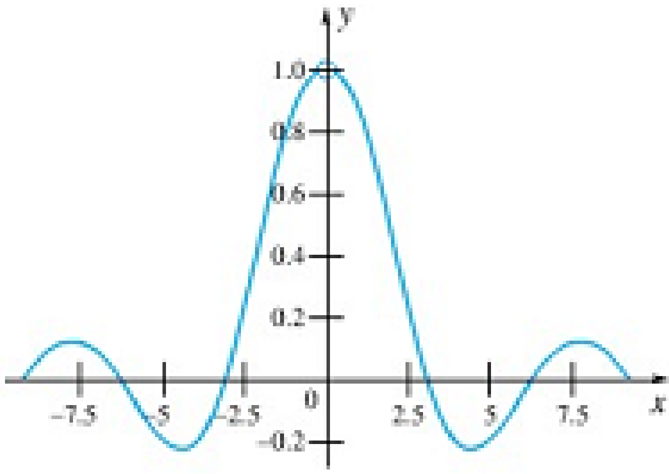
(Pengertian Intuitif Limit secara Intuitif) *Dikatakan limit fungsi* $f(x)$ *sama dengan* L *bilamana* x *mendekati* c*, ditulis*

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

jika kita dapat membuat $f(x)$ *mendekati* L *dengan cara mengambil nilai* x *dekat dengan* c *tapi tidak sama dengan* c

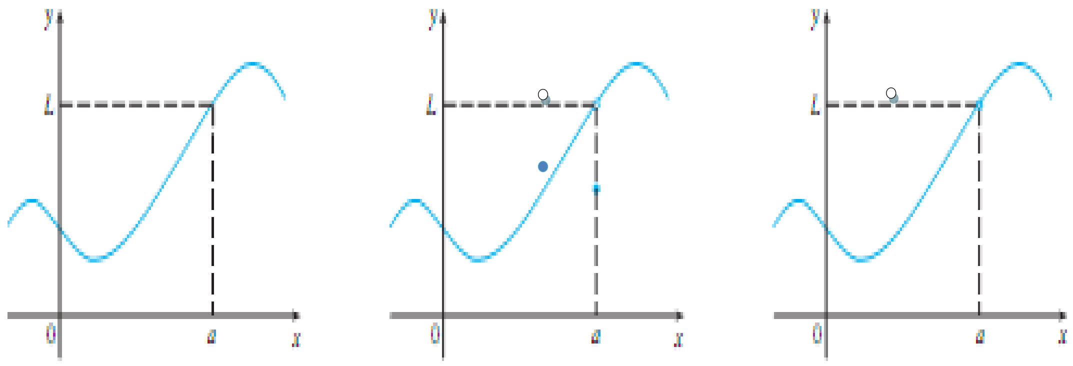
Tinjau fungsi f yang didefinisikan dengan $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Diberikan nilai $f(x)$ untuk beberapa nilai x di sekitar 0 dan sketsa grafik $y = f(x)$ seperti berikut :

x	$\dfrac{\sin x}{x}$
1.0	0.84147
0.1	0.99833
0.01	0.99998
↓	↓
0	?
↑	↑
−0.01	0.99998
−0.1	0.99833
−1.0	0.84147



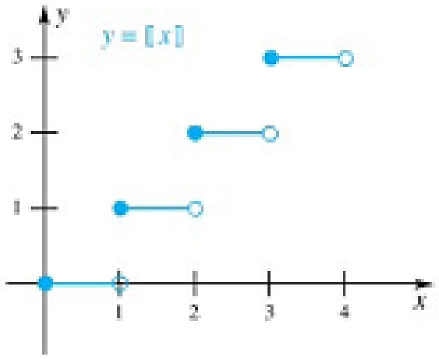
Apa yang bisa dikatakan tentang $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$?

Ungkapan “tapi tidak sama dengan c” menunjukkan bahwa dalam menentukan nilai limit $f(x)$ bilamana x mendekati c kita tidak pernah menganggap $x = c$, hal itu berarti kita tidak mempedulikan bagaimana f didefinisikan di c bahkan f tidak harus terdefinisi di . Ilustrasi berikut memperlihatkan $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ dalam tiga kasus



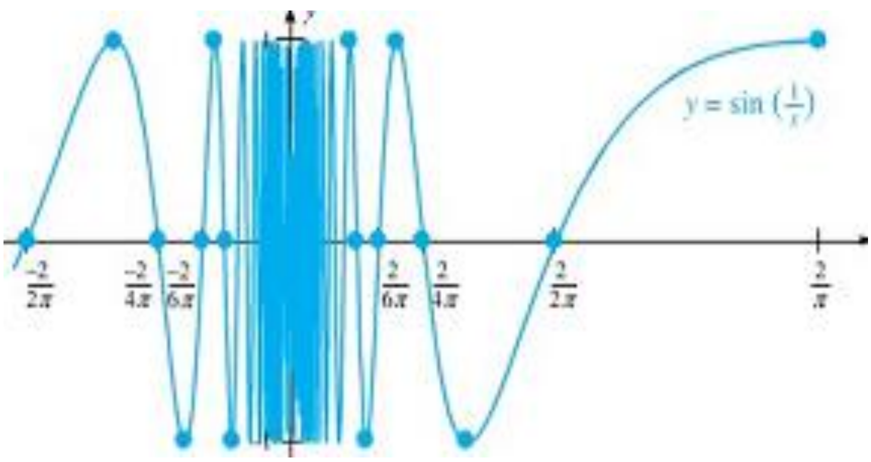
(a) (b) (c)

Apakah setiap fungsi selalu punya limit di setiap titik ? Perhatikan grafik $f(x) = [\![x]\!]$. Apakah $[\![x]\!]$ mendekati suatu bilangan riil L (yang tunggal) jika x mendekati 2 ?



Perhatikan juga yang berikut ini

x	$\sin \frac{1}{x}$
$2/\pi$	1
$2/(2\pi)$	0
$2/(3\pi)$	−1
$2/(4\pi)$	0
$2/(5\pi)$	1
$2/(6\pi)$	0
$2/(7\pi)$	−1
$2/(8\pi)$	0
$2/(9\pi)$	1
$2/(10\pi)$	0
$2/(11\pi)$	−1
$2/(12\pi)$	0
↓	↓
0	?



Apakah $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ mendekati suatu bilangan riil L (yang tunggal) jika x mendekati 0 ?

Kedua kasus di atas menunjukkan bahwa terdapat fungsi yang tidak memiliki limit di suatu titik. Kasus pertama dikenali sebagai adanya loncatan sedangkan kasus kedua sebagai terlalu banyak goyangan.

Kasus adanya loncatan seperti $[\![x]\!]$ pada setiap bilangan bulat, menyarankan pengertian limit satu sisi. Misal $x \to c^+$ menunjukkan x mendekati c dari arah kanan dan $x \to c^-$ menunjukkan x mendekati c dari arah kiri, kita dapat mencoba membuat definisi berikut

Definisi

(Pengertian Limit Kiri / Kanan secara Intuitif)

Dikatakan limit fungsi $f(x)$ sama dengan L bilamana x mendekati c dari arah kiri ditulis

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

jika kita dapat membuat $f(x)$ mendekati L dengan cara mengambil nilai x dekat dengan c dari arah kiri tapi tidak sama dengan c (analog untuk limit dari arah kanan)

Dengan definisi di atas kita bisa mengatakan $\lim_{x \to 2^-} [\![x]\!] = 1$ dan $\lim_{x \to 2^+} [\![x]\!] = 2$.

Selanjutnya teorema berikut adalah suatu hal yang logis kita terima

Teorema

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ *jika dan hanya jika* $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L$

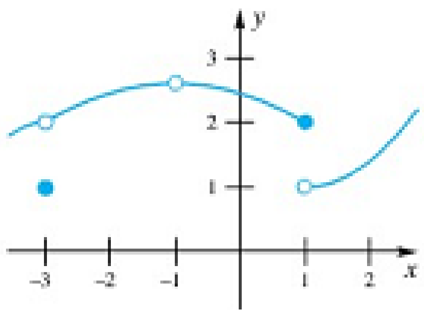
CONTOH 1 :

Untuk fungsi f yang grafiknya diberikan berikut , tentukan

(a) $\lim_{x \to -3} f(x)$ (b) $f(-3)$ (c) $f(-1)$

(d) $\lim_{x \to -1} f(x)$ (e) $f(1)$ (f) $\lim_{x \to 1} f(x)$

(g) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ (h) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$



Jawab :

1. Dengan memperhatikan gambar grafik yang diberikan di atas secara intuitif kita dapat menyimpulkan :

   (a) karena kita dapat membuat $f(x)$ mendekati 2 dengan cara mengambil x dekat dengan -3 tapi tidak sama dengan -3, maka $\lim_{x\to -3} f(x) = 2$

   (b) $f(-3) = 1$

   (c) $f(-1) = 2{,}5$

   (d) Karena kita dapat membuat $f(x)$ mendekati 2,5 dengan cara mengambil x dekat dengan -1 maka $\lim_{x\to -1} f(x) = 2{,}5$

   (e) $f(1) = 2$

   (f) Karena $f(x)$ mendekati nilai yang berbeda jika kita mengambil x dekat dengan 1 dari arah kiri dan kanan , maka $\lim_{x\to 1} f(x)$ tidak ada

   (g) Karena kita dapat membuat $f(x)$ mendekati 2 dengan cara mengambil x dekat dengan 1 dari arah kiri tapi tidak sama dengan 1, maka $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$

   (h) Karena kita dapat membuat $f(x)$ mendekati 2 dengan cara mengambil x dekat dengan 1 dari arah kanan tapi tidak sama dengan 1, maka $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

CONTOH 2 :

Gambarkan sketsa grafik contoh fungsi yang memenuhi persyaratan berikut

(a) Daerah asalnya $[0,4]$

(b) $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1$

(c) $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

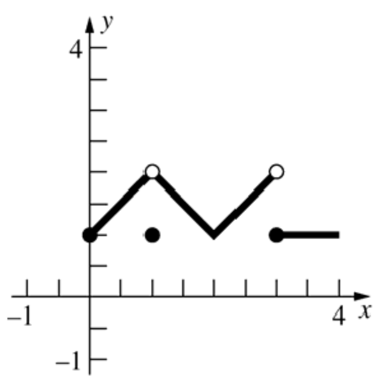
(d) $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$

(e) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$

(f) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 1$

Jawab :

Ada banyak kemungkinan grafik yang memenuhi syarat yang diberikan di atas, grafik berikut ini adalah salah satu contoh



CONTOH 3 :

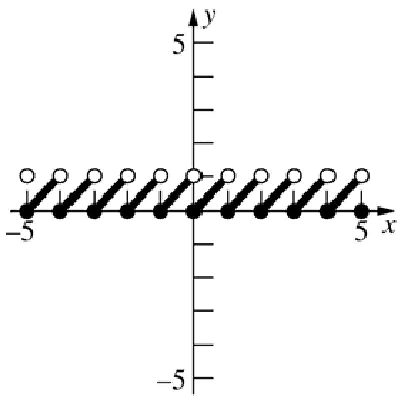
Misal $f(x) = x - [\![x]\!]$. Gunakan definisi limit secara intuitif untuk menentukan yang berikut dan nyatakan jika tidak ada

(i) $f(0)$ (ii) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(iii) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (iv) $\lim_{x \to 1/2} f(x)$

Jawab :

Grafik $f(x) = x - [\![x]\!]$ dapat kita lihat sebagai berikut



Dengan memperhatikan grafik tersebut, secara intuitif kita dapat menyimpulkan

(i) $f(0) = 0$

(ii) Karena $f(x)$ mendekati nilai yang berbeda jika kita mengambil x dekat dengan 0 dari arah kiri dan kanan maka $\lim_{x \to 0} f(x)$ tidak ada

(iii) Karena kita dapat membuat $f(x)$ mendekati 1 dengan cara mengambil x dekat dengan 0 dari arah kiri tapi tidak sama dengan 0, maka $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$

(iv) Karena kita dapat membuat $f(x)$ mendekati $\frac{1}{2}$ dengan cara mengambil x dekat dengan $\frac{1}{2}$ tapi tidak sama dengan $\frac{1}{2}$, maka $\lim_{x \to 1/2} f(x) = \frac{1}{2}$

6. Definisi Persis Limit

Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

1. Menjelaskan definisi persis limit ($\varepsilon - \delta$)
2. Membuktikan limit suatu fungsi di suatu titik dengan menggunakan definisi limit $(\varepsilon - \delta)$

Materi Ajar

Sebelum ini kita sudah pernah membicarakan definisi limit secara intuitif. Kata "mendekati" dalam definisi tersebut memunculkan pertanyaan "seberapa dekat ?". Sekarang kita perbaiki definisi tersebut , masih tidak formal tapi sedikit lebih baik :

" dikatakan limit fungsi $f(x)$ sama dengan L bilamana x mendekati c, jika kita bisa membuat nilai $f(x)$ sedekat yang kita inginkan ke L dengan mengambil x cukup dekat dengan c, tapi tidak sama dengan c "

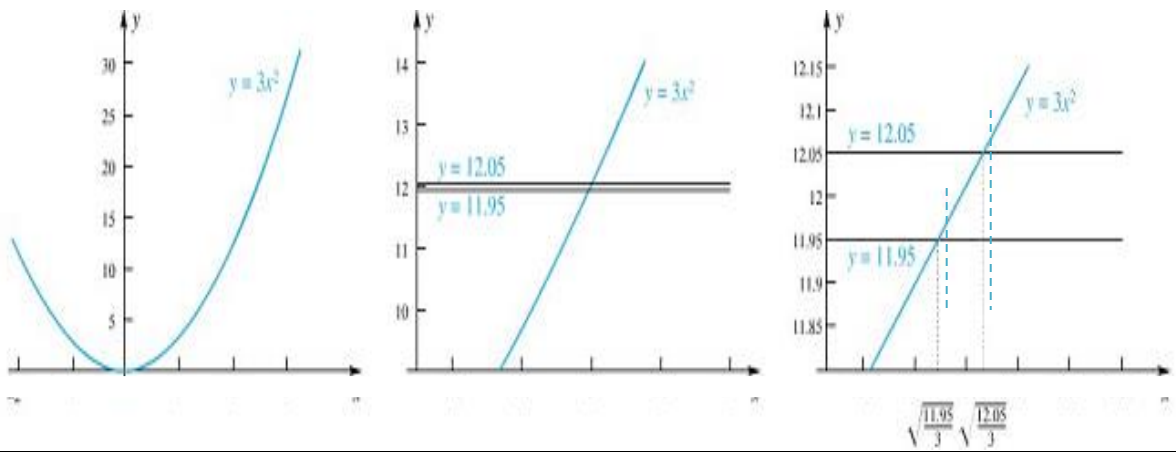
Sebagai ilustrasi perhatikan contoh berikut .

CONTOH 1 :

Gunakan grafik $y = f(x) = 3x^2$ untuk menentukan seberapa dekat x ke 2 untuk menjamin $f(x)$ jaraknya ke 12 kurang dari 0,05

Jawab :

Gambar di bawah ini menunjukkan grafik $y = f(x) = 3x^2$ di arahkan dan diperbesar disekitar $x = 2$

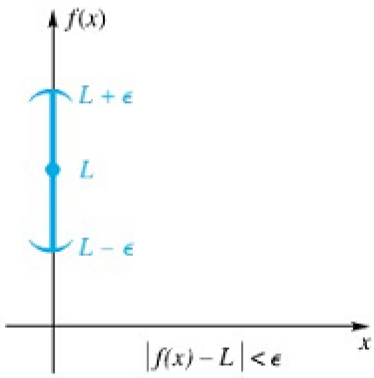


Mengatakan $f(x)$ jaraknya ke 12 kurang dari $0{,}05$, berarti $11{,}95 < f(x) < 12{,}05$. Kita buat garis $y = 11{,}25$ dan garis $y = 12{,}05$. Kedua garis tersebut memotong grafik $y = 3x^2$ masing-masing pada $x = \sqrt{\dfrac{11{,}95}{3}} \approx 1{,}99583$ dan $x = \sqrt{\dfrac{12{,}05}{3}} \approx 2{,}0416$. Sehingga kita bisa membuat jarak x dengan 2 kurang dari 0,00416 agar jarak $f(x)$ dengan 12 kurang dari $0{,}05$.

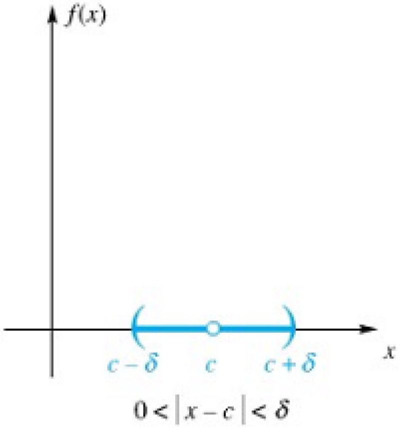
Seberapa dekat x ke 2 untuk menjamin $f(x)$ jaraknya ke 12 kurang dari $0{,}01$? Seberapa dekat x ke 2 untuk menjamin $f(x)$ jaraknya ke 12 kurang dari $0{,}001$? Pertanyaan-pertanyaan tersebut bisa kita jawab dengan cara seperti contoh di atas. Begitu seterusnya kita bisa menentukan seberapa dekat x ke 2 berapapun kita inginkan jarak $f(x)$ dengan 12.

Selanjutnya kita akan menyatakan definisi persis tentang limit secara formal matematis . Kita sepakati bahwa penggunaan simbol ε dan δ dalam definisi dimaksudkan untuk menunjukkan bilangan positif (biasanya kecil)

Mengatakan $f(x)$ jaraknya dengan L kurang dari ε berarti $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ atau $|f(x) - L| < \varepsilon$ atau $f(x)$ terletak pada interval $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.



Mengatakan x cukup dekat dengan c tapi berbeda dengan c berarti untuk suatu δ positif , x terletak pada interval $(c - \delta, c + \delta)$, dengan c dihapus atau bisa ditulis $0 < |x - c| < \delta$



Selanjutnya dituliskan definisi persis tentang limit , sebagai

Definisi

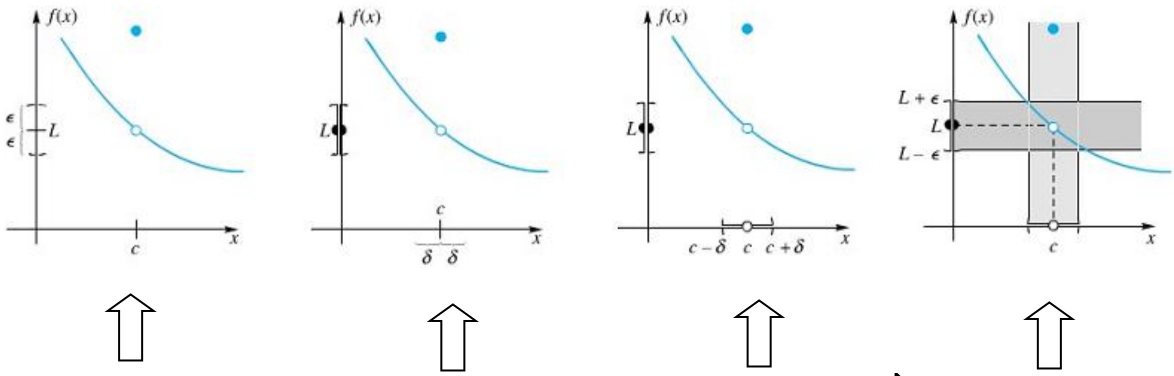
Dikatakan limit fungsi $f(x)$ *sama dengan* L *bilamana* x *mendekati* c *, ditulis*

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan yang berpadanan* $\delta > 0$ *sedemikian rupa sehingga*

$$jika\ 0 < |x - c| < \delta\ maka\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

Definisi limit ini mengatakan bahwa jika sekecil apapun selang $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ diberikan disekitar L, maka dapat kita temukan selang $(c-\delta, c+\delta)$ di sekitar c sedemikian rupa hingga f mengaitkan setiap titik dalam $(c-\delta, c+\delta)$ (kecuali mungkin c) ke dalam selang $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Definisi tersebut dapat diilustrasikan seperti berikut :



untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ $\ni$ $0 < |x - c| < \delta$ $\Rightarrow$ $0 < |f(x) - L| < \varepsilon$

CONTOH 1 :

Buktikan bahwa $\lim_{x \to 2} 3x + 4 = 10$

Jawab :

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$.

Kita akan mencari $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < |x-2| < \delta$ maka $|(3x+4)-10| < \varepsilon$

Dengan memperhatikan

$$\begin{aligned} |(3x+4)-10| < \varepsilon &\Leftrightarrow |3x-6| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow 3|x-2| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

kita bisa memilih $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ agar berlaku $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(3x+4)-10| < \varepsilon$

Bukti formal :

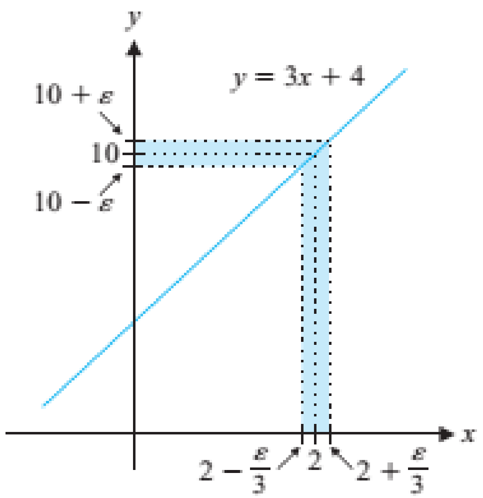
Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ maka berlaku

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(3x+4)-10| = |3x-6| = 3|x-2| < 3\delta = 3.\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ini berarti kita telah menunjukkan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ demikian sehingga berlaku $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(3x+4)-10| < \varepsilon$

Jadi $\lim_{x \to 2} 3x + 4 = 10$

Gambar berikut adalah ilustrasi untuk contoh ini



CONTOH 2 :

Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x}{5} = \frac{3}{5}$

Jawab :

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$.

Kita akan mencari $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < |x-3| < \delta$ maka $\left|\frac{x}{5} - \frac{3}{5}\right| < \varepsilon$

Dengan memperhatikan

$$\left|\frac{x}{5} - \frac{3}{5}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{5}\right||x-3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-3| < 5\varepsilon$$

kita bisa memilih $\delta = 5\varepsilon$ agar jika $0 < |x-3| < \delta$ maka $\left|\frac{x}{5} - \frac{3}{5}\right| < \varepsilon$

Bukti formal :

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = 5\varepsilon$ maka berlaku

$$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x}{5} - \frac{3}{5}\right| = \frac{1}{5}|x-3| < \frac{1}{5}\delta < \frac{1}{5}.5\varepsilon = \varepsilon$$

Ini berarti kita telah menunjukkan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga berlaku $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x}{5} - \frac{3}{5}\right| < \varepsilon$

Jadi $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x}{5} = \frac{3}{5}$

CONTOH 3 :

Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2 + 2x - 4}{x-1} = 6$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$.

Kita akan mencari $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < |x-1| < \delta$ maka

$$\left|\frac{2x^2 + 2x - 4}{x-1} - 6\right| < \varepsilon$$

Dengan memperhatikan bahwa untuk $x \neq 1$ berlaku

$$\left|\frac{2x^2+2x-4}{x-1}-6\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2x^2+2x-4-6x+6}{x-1}\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{2x^2-4x+2}{x-1}\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{2(x^2-2x+1)}{x-1}\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 2\left|\frac{(x\text{-}1)^2}{x-1}\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 2|x-1|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$$

kita bisa memilih $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ agar beraku jika $0<|x-1|<\delta$ maka $\left|\frac{2x^2+2x-4}{x-1}-6\right|<\varepsilon$

Bukti formal :

Ambil sebarang $\varepsilon>0$. Pilih $\delta=\varepsilon$ maka berlaku $0<|x-1|<\delta$ mengakibatkan

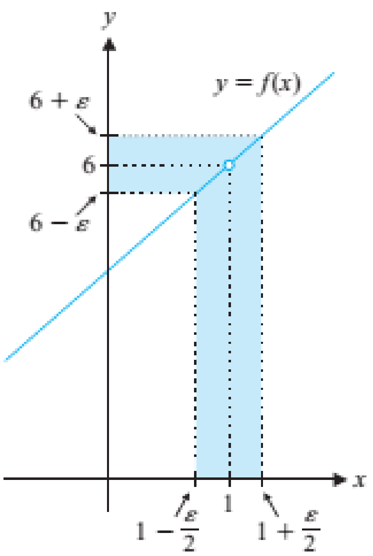
$$\left|\frac{2x^2+2x-4}{x-1}-6\right|=\left|\frac{2x^2+2x-4-6x+6}{x-1}\right|=\left|\frac{2x^2-4x+2}{x-1}\right|=\left|\frac{2(x^2-2x+1)}{x-1}\right|$$

$$=2\left|\frac{(x-1)^2}{x-1}\right|=2|x-1|<2\delta=2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Ini berarti kita telah menunjukkan untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $\delta>0$ sedemikian sehingga berlaku $0<|x-1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{2x^2+2x-4}{x-1}-6\right|<\varepsilon$.

Jadi $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+2x-4}{x-1}=6$

Gambar berikut adalah ilustrasi untuk contoh ini



CONTOH 4 :

Buktikan bahwa $\lim_{x \to 2}\left(x^2 - 4x + 5\right) = 1$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$.

Kita akan mencari $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < |x-2| < \delta$ maka $|(x^2 - 4x + 5) - 1| < \varepsilon$

Dengan memperhatikan,

$$
\begin{aligned}
|(x^2 - 4x + 5) - 1| < \varepsilon &\Leftrightarrow |x^2 - 4x + 4| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow |(x-2)^2| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow |x-2|^2 < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow |x-2| < \sqrt{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

kita bisa memilih $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ agar jika $0 < |x-2| < \delta$ maka $|(x^2 - 4x + 5) - 1| < \varepsilon$

Bukti formal :

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ maka berlaku

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(x^2 - 4x + 5) - 1| = |x^2 - 4x + 4| = |(x-2)^2| = |x-2|^2 < \delta^2 = (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon$$

Ini berarti kita telah menunjukkan untuk semua $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(x^2 - 4x + 5) - 1| < \varepsilon$

Jadi $\lim_{x \to 2}\left(x^2 - 4x + 5\right) = 1$

Selanjutnya limit dari arah kanan (limit dari arah kiri analog) , dapat kita definisikan sebagai berikut

Definisi

(limit sisi-kanan)

Dikatakan limit fungsi $f(x)$ sama dengan L bilamana x mendekati c dari arah kanan , ditulis

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan yang berpadanan $\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga

$$\textit{jika } 0 < x - c < \delta \textit{ maka } |f(x) - L| < \varepsilon$$

CONTOH 5 :

Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

Jawab :

Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$.

Kita akan mencari $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < x - 0 < \delta$ maka $\left|\sqrt{x} - 0\right| < \varepsilon$

Dengan memperhatikan,

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{x} - 0\right| < \varepsilon &\Leftrightarrow \left|\sqrt{x}\right| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow x < \varepsilon^2 \\ &\Leftrightarrow x - 0 < \varepsilon^2 \end{aligned}$$

kita bisa memilih $\delta = \varepsilon^2$ agar jika $0 < x - 0 < \delta$ maka $\left|\sqrt{x} - 0\right| < \varepsilon$

Bukti formal :

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \varepsilon^2$ maka berlaku

$$0 < x - 0 < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{x} - 0\right| = \left|\sqrt{x}\right| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

Ini berarti kita telah menunjukkan untuk semua $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < x - 0 < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{x} - 0\right| < \varepsilon$

Jadi $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

7. Teorema tentang Limit

Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

Menghitung limit suatu suatu fungsi di suatu titik dengan menggunakan teorema tentang limit yang sesuai

Materi Ajar :

Membuktikan eksistensi dan nilai limit menggunakan definisi $\varepsilon - \delta$ yang dibicarakan pada bagian sebelum ini membutuhkan waktu dan seringkali sulit untuk dilakukan. Oleh karena itu teorema-teorema yang berikut menjadi sangat berguna dalam menghitung limit.

Teorema A : Teorema Limit Utama

Jika n bilangan bulat positif , k konstanta dan f, g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di c , maka :

1. $\lim\limits_{x \to c} k = k$
2. $\lim\limits_{x \to c} x = c$
3. $\lim\limits_{x \to c} kf(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x) + g(x) \right] = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$
5. $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x) - g(x) \right] = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$
6. $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x) g(x) \right] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \lim\limits_{x \to c} g(x)$
7. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$, *asalkan* $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$
8. $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x) \right]^n = \left(\lim\limits_{x \to c} f(x) \right)^n$ *dengan* n *bilangan bulat (asalkan* $\lim\limits_{x \to c} f(x) \neq 0$ *jika* $n < 0$ *)*
9. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$ *dengan* n *bilangan bulat positif (asalkan* $\lim\limits_{x \to c} f(x) \geq 0$ *jika* n *genap)*

Walaupun teorema di atas dinyatakan untuk limit dua sisi, tapi sebenarnya berlaku juga untuk limit dari satu sisi. Selanjutnya kita memiliki teorema berikut

Teorema B : Teorema Substitusi:

Jika f *suatu fungsi polinom atau fungsi rasional, maka* $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ *asalkan dalam kasus fungsi rasional nilai penyebutnya tidak sama dengan nol di* c

Teorema C :

Jika $f(x) = g(x)$ *untuk semua* x *pada interval buka di sekitar* c *kecuali pada* c *itu sendiri, dan jika* $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ *ada maka* $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ *ada dan* $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x)$

CONTOH 1 :

Hitunglah $\lim\limits_{x \to 4} 5x^2 - 2x + 3$

Jawab :

Kita bisa hitung dengan menggunakan teorema limit utama

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 4} 5x^2 - 2x + 3 &= \lim_{x \to 4} 5x^2 - \lim_{x \to 4} 2x + \lim_{x \to 4} 3 \\
&= 5 \lim_{x \to 4} x^2 - 2 \lim_{x \to 4} x + \lim_{x \to 4} 3 \\
&= 5 \lim_{x \to 4} x \lim_{x \to 4} x - 2 \lim_{x \to 4} x + \lim_{x \to 4} 3 \\
&= 5.4.4 - 2.4 + 3 \\
&= 75
\end{aligned}$$

Tetapi mengingat $f(x) = 5x^2 - 2x + 3$ adalah polinomial maka kita bisa langsung menggunakan teorema substitusi untuk menghitung limitnya ,

$$\lim_{x \to 4} 5x^2 - 2x + 3 = 5.4^2 - 2.4 + 3 = 75$$

CONTOH 2 :

Hitunglah $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + 2x + 3} \right)$

Jawab :

Karena $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + 2x + 3}$ adalah fungsi rasional dan penyebutnya tidak bernilai nol di $x = 1$, maka kita bisa menggunakan teorema substitusi untuk menghitung limitnya,

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + 2x + 3} \right) = \frac{1^4 + 1^2 - 6}{1^4 + 2.1 + 3} = -\frac{4}{5}$$

CONTOH 3 :

Hitunglah $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^2 - x - 6}$

Jawab :

$f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - x - 6}$ adalah fungsi rasional, tetapi penyebutnya bernilai nol pada $x = -2$. sehingga kita tidak bisa menggunakan teorema substitusi untuk menghitung limitnya di $x = -2$.

Sekarang mari kita perhatikan ,

$\dfrac{x+2}{x^2 - x - 6} = \dfrac{(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \dfrac{1}{x-3}$, jika $x \neq 2$ dan $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{x-3} = -\dfrac{1}{5}$ (ada) maka

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^2 - x - 6}$ ada dan $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^2 - x - 6} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{x-3} = -\dfrac{1}{5}$

Setelah ini kita boleh menghitung langsung limit tipe ini dengan cara

$$\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \to -2} \frac{x+2}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \to -2} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{5}$$

CONTOH 4 :

Hitunglah $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$

Jawab :

Limit ini sebenarnya adalah tipe yang sama dengan contoh 3, kita bisa menghitungnya seperti ini ,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{x+3-3}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

CONTOH 5 :

Hitunglah $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$

Jawab :

Perhatikan $\frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$, penyebut bernilai 0 di $x=-1$.

Jadi meski $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$ adalah fungsi rasional, kita tidak bisa menggunakan teorema substitusi untuk menghitung limitnya di $x=-1$ dan kita juga tidak bisa menemukan fungsi lain yang sama dengan f di sekitar $x=-1$.

Mari kita cermati lebih lanjut limit ini.

- Pembilang akan mendekati -2 untuk x dekat dengan -1 dari arah kanan , sehingga untuk x dekat dengan -1 dari arah kanan kita melakukan pembagian bilangan yang dekat dengan -2 dengan bilangan positif yang dekat dengan nol dan diperoleh bilangan negatif besar.
- Pembilang akan mendekati -2 untuk x dekat dengan -1 dari arah kiri , sehingga untuk x dekat dengan -1 dari arah kiri kita melakukan pembagian bilangan yang dekat dengan -2 dengan bilangan negatif yang dekat dengan nol dan diperoleh bilangan positif besar.

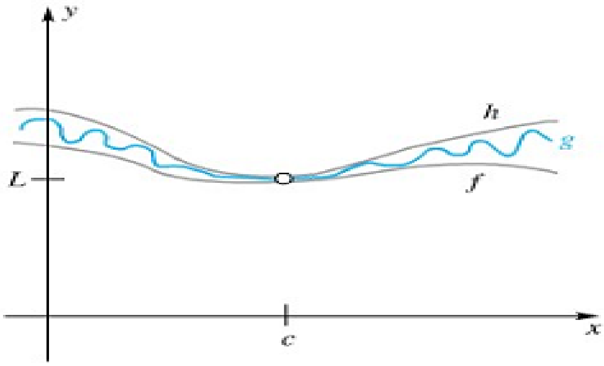
Ini berarti $\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$ tidak mendekati bilangan riil manapaun. Kita katakan

$\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$ tidak ada

Nanti kita akan membicarakan limit tipe ini lebih lanjut pada saat membicarakan limit tak hingga

Teorema D : Teorema Apit :

Jika f ,g dan h adalah fungsi-fungsi yang memenuhi $f(x) \le g(x) \le h(x)$ untuk semua x dekat c, kecuali mungkin di c. Jika $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = L$ maka $\lim\limits_{x\to\to c} g(x) = L$



CONTOH 6 :

Hitunglah $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x}$

Jawab :

Karena $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ tidak ada, kita tidak dapat menghitung $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$.

Mengingat $-1 < \cos\frac{1}{x} < 1$, maka kita punyai $-x^2 < x^2 \cos\frac{1}{x} < x^2$. Selanjutnya karena $\lim\limits_{x\to 0} -x^2 = 0 = \lim\limits_{x\to 0} x^2$ maka menurut teorema apit $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} = 0$

Teorema-teorema yang berikut adalah teorema-teorema limit yang berkaitan dengan fungsi trigonometri

Teorema E : Teorema Limit Fungsi Trigonometri

Untuk sebarang bilangan riil c pada daerah asalnya, berlaku

1. $\lim\limits_{t\to c} \sin t = \sin c$
2. $\lim\limits_{t\to c} \cos t = \cos c$
3. $\lim\limits_{t\to c} \tan t = \tan c$
4. $\lim\limits_{t\to c} \cot t = \cot c$
5. $\lim\limits_{t\to c} \sec t = \sec c$
6. $\lim\limits_{t\to c} \csc t = \csc c$

Teorema F : Teorema Limit Trigonometri Istimewa

1. $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$
2. $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = 0$

CONTOH 7 :

Hitung $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x}$

Jawab :

Perhatikan bahwa $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}$

Selanjutnya misal $y=2x$, maka $y\to 0$ jika dan hanya jika $x\to 0$.

Sehingga $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\lim\limits_{yx\to 0}\frac{\sin}{y}=1$ dan

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{2}{3}.1=\frac{2}{3}$$

CONTOH 8 :

Hitung $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x\cos x}$

Jawab :

Perhatikan bahwa $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.1=1$,

maka

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x\cos x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x\cos x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\frac{1}{\cos x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\\&=1.1+1.1\\&=2\end{aligned}$$

CONTOH 9 :

Hitung $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{\sin x}$

Jawab :

Perhatikan bahwa $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$,maka

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{\sin x}&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}x\frac{x}{\sin x}+\lim_{x\to 0}3\frac{x}{\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}x.\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}+3\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\\&=0.1+3.1=3\end{aligned}$$

8. Limit Tak Hingga dan Limit di Ketakhinggaan

Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

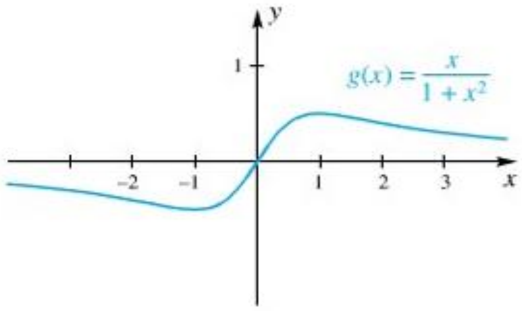
1. Menjelaskan pengertian limit tak hingga
2. Menjelaskan pengertian limit di ketakhinggaan
3. Menghitung limit tak hingga
4. Menghitung limit di ketakhinggaan

Materi Ajar

Limit di Ketakhinggaan

Tinjau grafik fungsi $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Apa yang terjadi dengan $g(x)$ jika x semakin besar ? Atau dalam simbol matematika berapa nilai $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{1+x^2}$? Perhatikan tabel dan grafik berikut :

x	$\dfrac{x}{1+x^2}$
10	0.099
100	0.010
1000	0.001
10000	0.0001
↓	↓
∞	?



Dari tabel dan grafik kita melihat bahwa jika x makin besar maka nilai $g(x)$ mendekati 0 atau dengan menggunakan simbol matematika $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$. Dengan cara yang serupa kita juga bisa menduga jika x makin kecil maka nilai $g(x)$ mendekati 0 atau dengan menggunakan simbol matematika $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$.

Definisi persis limit di ketakhinggaan diberikan sebagai berikut :

Definisi

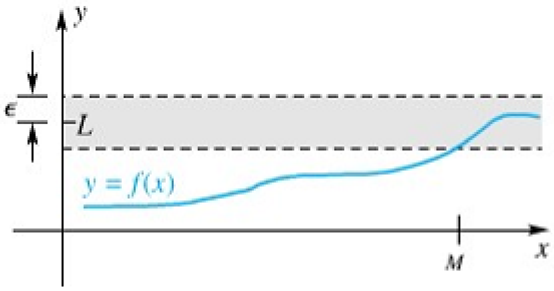
Misal f sebuah fungsi yang terdefinisi pada selang $[c,\infty)$ untuk suatu bilangan c. Dikatakan

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ (betapapun kecilnya) terdapat bilangan yang berpadanan M sedemikian rupa sehingga

$$\textit{jika } x > M \textit{ maka } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Definisi tersebut mengatakan bahwa sekecil apapun selang $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ diberikan disekitar L, maka dapat kita temukan suatu bilangan positif M sedemikian rupa hingga f mengaitkan setiap titik dalam selang (M,∞) ke dalam $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Proses tersebut diilustrasikan seperti berikut :



Selanjutnya kita mempunyai definisi berikut :

Definisi

Misal f *sebuah fungsi yang terdefinisi pada selang* $(-\infty, c]$ *untuk suatu bilangan* c. *Dikatakan*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ *(betapapun kecilnya) terdapat bilangan yang berpadanan* $M < 0$ *sedemikian rupa sehingga*

$$jika\ \ x < M\ \ maka\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

Limit di ketakhinggaan bisa jadi tidak ada , yakni (i) nilai $f(x)$ semakin besar ketika x semakin besar , dinotasikan dengan $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (ii) nilai $f(x)$ semakin kecil ketika x semakin besar , dinotasikan dengan $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ (iii) nilai $f(x)$ semakin besar ketika x semakin kecil $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ (iv) nilai $f(x)$ semakin kecil ketika x semakin kecil , dinotasikan dengan $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Definisi untuk (i) diberikan sebagai berikut (untuk (ii), (iii) dan (iv) analog)

Definisi

Misal f *sebuah fungsi yang terdefinisi pada selang* $[c, \infty)$ *untuk suatu bilangan* c. *Dikatakan*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

jika untuk setiap $M > 0$ *(betapapun besarnya) terdapat bilangan yang berpadanan* $K > 0$ *sedemikian rupa sehingga*

$$jika\ \ x > K\ \ maka\ \ f(x) > M$$

Menggunakan definisi seringkali sulit untuk menghitung limit diketakhinggaan. Tetapi untungnya teorema limit utama dan teorema apit tetap berlaku di limit ketakhinggaan . Teorema berikut ini dapat dibuktikan dengan definisi limit diketakhinggaan dan nantinya sangat berguna dalam menghitung limit diketakhinggaan

Teorema A

Jika k bilangan asli, maka

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = 0$
3 $\lim\limits_{x\to\infty} x^k = \infty$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} \infty & \text{jika} \quad k \textit{ genap} \\ -\infty & \text{jika} \quad k \textit{ ganjil} \end{cases}$

CONTOH 1 :

Hitung $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}$

Jawab :

Karena $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x^2 = \infty$, kita tidak bisa menghitung $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2}{\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x^2)}$

Perhatikan bahwa $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{1+x^2}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}$

Selanjutnya mengingat $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ maka ,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{1+x^2}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = \frac{1}{0+1} = 1$$

CONTOH 2 :

Hitung $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$

Jawab :

Karena nilai $\sin x$ berosilasi di antara 0 dan 1 , maka $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ tidak ada sehingga kita tidak bisa menghitung $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x}{\lim\limits_{x\to+\infty} x}$

Perhatikan bahwa $-1 \le \sin x \le 1$, untuk $x > 0$ kita punyai $-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$. Karena $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$, maka $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

CONTOH 3 :

Hitung $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$

Jawab :

Karena $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \infty$ kita tidak bisa menghitung $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+2} - \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x} &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x}\, \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2-x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

CONTOH 4 :

Hitung $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}$

Jawab :

Karena $\lim_{x\to-\infty} 2x+1 = \infty$, kita tidak bisa menghitung $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{\lim_{x\to-\infty} 2x+1}{\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3}}$

Untuk $x < 0$, kita punyai $|x| = -x$ sehingga

$$\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{\frac{2x+1}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2}}} = \frac{\frac{2x+1}{|x|}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{\frac{2x+1}{-x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

dan kita bisa hitung

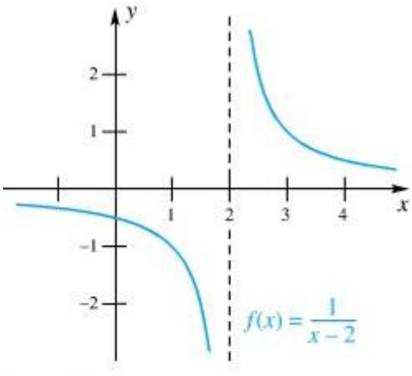
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2x+1}{-x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}-2-\dfrac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{-2}{1}$$

Limit Tak Hingga

Tinjau grafik fungsi $h(x)=\dfrac{1}{x-2}$. Apa yang terjadi dengan $h(x)$ jika x semakin dekat dengan 2 ? Atau dalam simbol matematika berapa nilai $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$? Perhatikan grafik berikut :



Jika $x\to 2^-$ maka $h(x)$ semakin kecil tanpa batas dan sementara jika $x\to 2^+$ maka $h(x)$ semakin besar tanpa batas. Dengan menggunakan simbol matematika kita katakan $\lim\limits_{x\to 2^{-=}}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$ dan $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=\infty$ sehingga menjadi tidak ada maknanya bicara tentang $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$.

Selanjutnya kita mempunyai definisi limit tak hingga seperti berikut ini :

Definisi

Dikatakan $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$ *jika untuk setiap* $M>0$ *(betapapun besarnya) terdapat* $\delta>0$ *sedemikian rupa sehingga*

$$jika\ 0<|x-c|<\delta\ maka\ f(x)>M$$

Teorema berikut ini dapat dibuktikan dengan definisi limit tak hingga

Teorema B

Jika k bilangan asli, maka

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^k} = \infty$

3. $\lim_{n\to 0^-} \frac{1}{x^k} = \begin{cases} \infty & \text{jika} \quad \text{k genap} \\ \text{tidak ada} & \text{jika} \quad \text{k ganjil} \end{cases}$

2. $\lim_{n\to 0^-} \frac{1}{x^k} = \begin{cases} \infty & \text{jika} \quad \text{k genap} \\ -\infty & \text{jika} \quad \text{k ganjil} \end{cases}$

Teorema B di atas dapat diperumum , dan dinyatakan sebagai berikut :

Teorema C

Jika $\lim_{x\to c} f(x) = L \neq 0$ *dan* $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, *maka*

(a) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ *jika* $L > 0$ *dan* $g(x) \to 0^+$ *jika* $x \to c$

(b) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ *jika* $L < 0$ *dan* $g(x) \to 0^+$ *jika* $x \to c$

(c) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ *jika* $L > 0$ *dan* $g(x) \to 0^-$ *jika* $x \to c$

(d) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ *jika* $L < 0$ *dan* $g(x) \to 0^-$ *jika* $x \to c$

Catatan :

Teorema C juga berlaku bila $x \to c^+$ atau $x \to c^-$

CONTOH 5 :

Hitung $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$

Jawab :

Misal $y = x - 1$, jika $x \to 1$ maka $y \to 0$ sehingga kita bisa menghitung

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y^2} = \infty$$

CONTOH 6 :

Hitung $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{|x-1|}$

Jawab :

Perhatikan bahwa $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{jika} \quad x>1 \\ 1-x & \text{jika} \quad x<1 \end{cases}$, maka

Meski kita bisa menentukan $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{|x-1|} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} 0 = 0$ (ada),

tetapi

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x-1} = \infty$$

Ini berarti bahwa $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{|x-1|}$ tidak ada

CONTOH 7 :

Hitung $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+3x+7}{x^2-2x+1}$

Jawab :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+3x+7}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3+3x+7}{(x-1)^2}$$

Perhatikan bahwa $\lim\limits_{x\to 1} x^3+3x+7 = 11 > 0$ dan $(x-1)^2 \to 0^+$ jika $x \to 1$, maka

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+3x+7}{x^2-2x+1} = \infty$$

CONTOH 8 :

Hitung $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2-x-2}$

Jawab :

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x-1}}{(x-2)(x-1)}$$

Perhatikan bahwa

$\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{2x-1} = \sqrt{3} > 0$ dan $(x-2)(x-1) \to 0^+$ jika $x \to 2^+$ maka $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2-x-2} = \infty$

$\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{2x-1} = \sqrt{3} > 0$ dan $(x-2)(x-1) \to 0^-$ jika $x \to 2^-$ maka $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2-x-2} = -\infty$

Jadi $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2-x-2}$ tidak ada

9. Kekontinuan

<u>Indikator Pencapaian Hasil Belajar</u>

1. Memutuskan apakah suatu fungsi kontinu atau tidak di suatu titik
2. Mengidentifikasi kasus-kasus di mana suatu fungsi tidak kontinu
3. Menentukan kekontinuan suatu fungsi pada suatu selang

<u>Materi Ajar</u> :

Dalam kehidupan sehari-hari proses kontinu sering kita artikan sebagai suatu yang berlangsung terus menerus, tanpa interupsi atau perubahan yang mendadak. Definisi matematis untuk kekontinuan sebenarnya mirip dengan itu

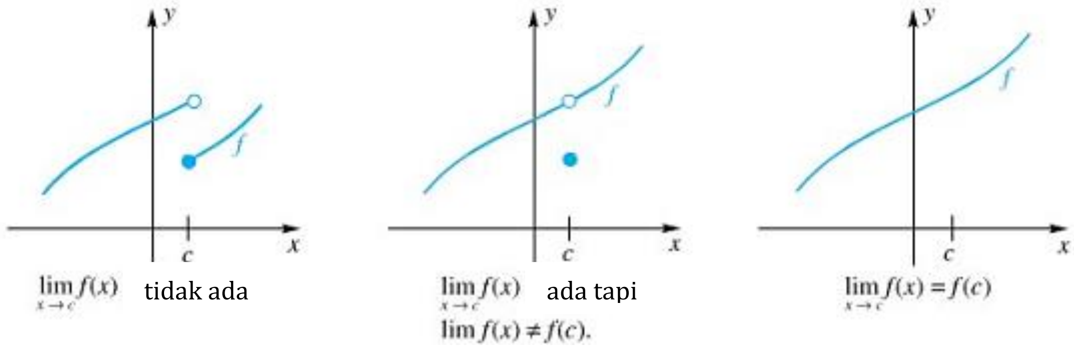
Definisi :

Sebuah fungsi dikatakan kontinu di c jika beberapa selang terbuka di sekitar c terkandung dalam daerah asal f dan $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

Secara implisit definisi tersebut menyatakan bahwa suatu fungsi f dikatakan kontinu di c jika memenuhi tiga hal berikut :

1. $f(c)$ terdefinisi (yaitu c berada di daerah asal f)
2. $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ ada (sehingga f harus terdefinisi pada suatu selang yang memuat c)
3. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

Jika salah satu dari ketiga hal di atas tidak dipenuhi, dikatakan f tidak kontinu di c. Ilustrasi berikut memberikan gambaran tentang grafik fungsi untuk kasus-kasus kontinu dan tidak kontinu di suatu titik c.



$\lim\limits_{x\to c} f(x)$ tidak ada — tidak kontinu

$\lim\limits_{x\to c} f(x)$ ada tapi $\lim f(x) \neq f(c)$. — tidak kontinu

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ — kontinu

Kekontinuan suatu fungsi di suatu titik dikatakan dapat dihapuskan jika kita dapat mendefinisikan nilai di titik tersebut sehingga fungsi menjadi kontinu.

CONTOH 1 :

Periksa kekontinuan $f(x)=|x|$ di $x=0$

Jawab :

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & jika \quad x\geq 0 \\ -x & jika \quad x<0 \end{cases}$$

Perhatikan

$f(0)=|0|=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}|x|=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$ dan $\lim\limits_{x\to 0^-}|x|=\lim\limits_{x\to 0^-}-x=0$ maka

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0=f(0)$, sehingga f kontinu di $x=0$

CONTOH 2 :

Misal $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$, hitung $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

Bagaimana f harus didefinisikan agar f kontinu di $x=1$?

Jawab :

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}x-1=0$$

Agar f kontinu di $x=1$ haruslah $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(0)$. Jadi agar $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$

kontinu di $x=1$, haruslah di definisikan $f(1)=0$

CONTOH 3 :

Periksa kekontinuan $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{|x|}{x} & \text{jika} \quad x\neq 0 \\ 1 & \text{jika} \quad x=0 \end{cases}$ di $x=0$

Jawab :

Perhatikan

$\lim\limits_{x\to 0^+}x+\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+}x+\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x+1=1$ dan $\lim\limits_{x\to 0^-}x+\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}x+\dfrac{x}{-x}=\lim\limits_{x\to 0^-}x-1=-1$, jadi

$$\lim_{x\to 0^+}x+\frac{x}{|x|}\neq\lim_{x\to 0^-}x+\frac{x}{|x|}$$

Dengan demikian f tidak kontinu di $x=0$

Teorema berikut membantu kita melihat di mana fungsi polinom, fungsi rasional, fungsi nilai mutlak dan fungsi akar kontinu

Teorema A :
Fungsi polinom kontinu di setiap bilangan riil
Fungsi rasional kontinu di setiap bilangan riil , kecuali pada titik penyebutnya nol
Fungsi nilai mutlak kontinu di setiap bilangan riil
Jika n ganjil fungsi akar ke- n kontinu disetiap bilangan riil, jika n genap fungsi akar ke- n kontinu disetiap bilangan riil positif

Operasi fungsi mengawetkan kekontinuan, hal tersebut ditunjukkan oleh teorema berikut

Teorema B :
Jika f dan g kontinu di c, maka demikian juga kf , $f+g$, $f-g$, fg, f/g (asalkan $g(c)$), f^n dan $\sqrt[n]{f}$ (asalkan $f(c)>0$ jika n genap)

CONTOH 4 :

Di titik mana saja $F(x)=\dfrac{3|x|-x^2}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ kontinu ?

Jawab :

$|x|$, x^2 dan $\sqrt[3]{x}$ kontinu di setiap bilangan riil dan $\sqrt{x}$ kontinu pada setiap bilangan riil positif , maka $F(x)=\dfrac{3|x|-x^2}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ kontinu di setiap bilangan riil positif

Fungsi-fungsi trigonometri kontinu di setiap bilangan riil di daerah asalnya, hal tersebut dinyatakan dalam teorema berikut :

Teorema C :
Fungsi $\sin x$ dan $\cos x$ kontinu di setiap bilangan riil . Fungsi $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ dan $\csc x$ kontinu di setiap bilangan riil di daerah asalnya

CONTOH 5 :

Tentukan semua titik di mana $f(x)=\dfrac{\tan x}{x(x-1)}$ tidak kontinu

Jawab :

Fungsi $\tan x$ kontinu di setiap bilangan riil , kecuali di $x=\dfrac{2k+1}{2}\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$,

$x(x-1)$ kontinu di setiap bilangan riil dan $x(x-1)=0$, jika $x=0$ dan $x=1$, maka

$f(x)=\dfrac{\tan x}{x(x-1)}$ kontinu di setiap bilangan riil kecuali di $x=\dfrac{2k+1}{2}\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots,$ $x=0$ dan $x=1$

Limit dari fungsi kontinu juga mengawetkan kekontinuan, teorema berikut yang dikenal sebagai teorema limit komposit menunjukkan hal tersebut :

Teorema D :

Jika $\lim\limits_{x\to c} g(x)=L$ *dan jika* f *kontinu di* L *, maka* $\lim\limits_{x\to c} f(g(x))=f\left(\lim\limits_{x\to c} g(x)\right)=f(L)$

Khususnya jika g *kontinu di* c *dan* f *kontinu di* $g(c)$ *maka fungsi komposit* fog *kontinu di* c

CONTOH 6 :

Gunakan teorema limit komposit untuk menghitung limit berikut :

a. $\lim\limits_{x\to1}\left|\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}\right|$

b. $\lim\limits_{x\to\pi} \sin(x+\sin x)$

Jawab :

a. Misal $g(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$ dan $f(x)=|x|$

$$\lim_{x\to1} g(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to1} x-1=0 \text{ dan}$$

$f(x)$ kontinu di $x=0$, maka

$$\lim_{x\to1}\left|\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right|=\lim_{x\to1} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to1} g(x)\right)=f\left(\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right)=f(0)=|0|=0$$

b. Misal $g(x)=x+\sin x$ dan $f(x)=\sin x$

$\lim\limits_{x\to\pi} g(x)=\lim\limits_{x\to\pi} x+\sin x=\pi=g(\pi)$ sehingga g kontinu di $x=\pi$ dan $f(x)=\sin x$ kontinu di $x=\pi$, maka fungsi fog kontinu di $x=\pi$ dan

$$\lim_{x\to\pi}\sin(x+\sin x)=\lim_{x\to\pi} f(g(x))=f(g(\pi))=f(\pi+\sin(\pi))=f(\pi)=\sin\pi=0$$

Kita sudah membicarakan kekontinuan di suatu titik, selanjutnya kita akan berbicara tentang kekontinuan di interval. Grafik suatu fungsi yang kontinu pada suatu selang dapat dibayangkan sebagai grafik fungsi yang tidak putus pada selang tersebut, grafik ini dapat digambarkan tanpa mengangkat pena dari kertas

Seharusnya jika suatu fungsi kontinu pada suatu interval maka fungsi tersebut kontinu pada setiap titik pad interval tersebut. Pengertian tersebut tidak menjadi masalah untuk interval buka. Tapi bagai mana untuk interval tutup $[a,b]$? Timbul pertanyaan tentang kekontinuan di $x=a$ dan $x=b$. Kita memerlukan definsi tentang kekontinuan dari kanan dan dari kiri seperti berikut

Definisi :

Sebuah fungsi dikatakan kontinu dari kanan a jika $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ dan kontinu dari kiri a jika $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

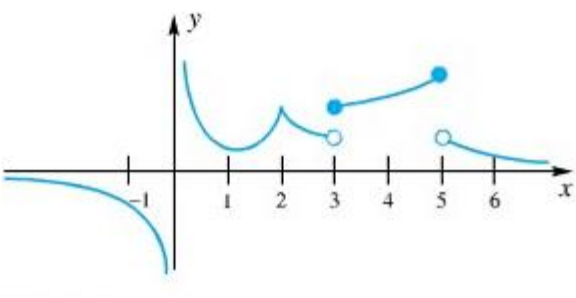
Selanjutnya definisi kekontinuan pada interval diberikan sebagai

Definisi :

f dikatakan kontinu pada selang terbuka jika f kontinu di setiap titik pada selang tersebut. f dikatakan kontinu pada selang tertutup $[a,b]$, jika f kontinu pada selang (a,b), kontinu dari kanan a dan kontinu dari kiri b

Dengan definisi ini kita mengatakan $\frac{1}{x}$ kontinu pada selang $(0,1)$ dan $\sqrt{x}$ kontinu pada selang $[0,1]$

CONTOH 7 :



Deskripsikan kekontinuan fungsi f yang grafiknya diberikan seperti di atas, dengan menggunakan definisi kekontinuan pada selang

Jawab :

Dengan mencermati grafik kita bisa melihat bahwa fungsi f tidak kontinu hanya di titik-titik $x=0$, $x=3$ dan $x=5$.

Perhatikan bahwa $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \neq f(3)$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = f(5)$ dan , $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) \neq f(5)$ sehingga menurut definisi kekontinuan pada selang, f kontinu pada selang $(-\infty,0)$, $(0,3)$ dan $[3,5]$ dan $(5,\infty)$.

CONTOH 8 :

Deskripsikan kekontinuan fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 + |x-1|}{\sqrt[3]{x+1}}$, dengan menggunakan definisi kekontinuan pada selang

Jawab :

x^2, $|x-1|$, $\sqrt[3]{x+1}$ kontinu di setiap bilangan riil dan $\sqrt[3]{x+1} = 0$ jika $x = -1$ maka

$f(x) = \dfrac{x^2 + |x-1|}{\sqrt[3]{x+1}}$ kontinu di setiap bilangan riil , kecuali $x = -1$. Perhatikan bahwa

$\lim\limits_{x\to -1} x^2 + |x-1| = (-1)^2 + |-1-1| = 3 > 0$ dan $\sqrt[3]{x+1} \to 0^-$ jika $x \to 1^-$ maka

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^2 + |x-1|}{\sqrt[3]{x+1}} = -\infty$ (tidak kontinu dari kiri)

$\lim\limits_{x\to -1} x^2 + |x-1| = (-1)^2 + |-1-1| = 3 > 0$ dan $\sqrt[3]{x+1} \to 0^+$ jika $x \to 1^+$ maka

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2 + |x-1|}{\sqrt[3]{x+1}} = \infty$ (tidak kontinu dari kanan)

Jadi f kontinu pada $(-\infty,-1)$ dan $(-1,\infty)$

10. Turunan

Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

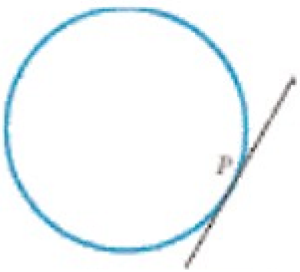
1. Memutuskan apakah suatu fungsi dapat diturunkan atau tidak di suatu titik
2. Menentukan turunan dari suatu fungsi dengan menggunakan definisi
3. Menjelaskan hubungan antara keterdiferensialan dan kekontinuan
4. Mengidentifikasi kasus-kasus di mana suatu fungsi tidak dapat diturunkan

Materi Ajar

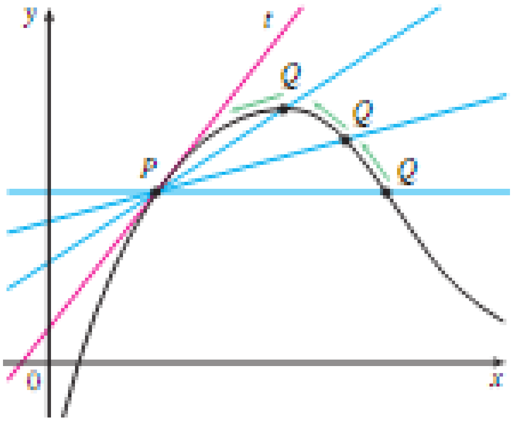
Pada pembahasan berikut kita akan melihat satu tipe limit yang muncul dari dua masalah yang berbeda.

Garis singgung

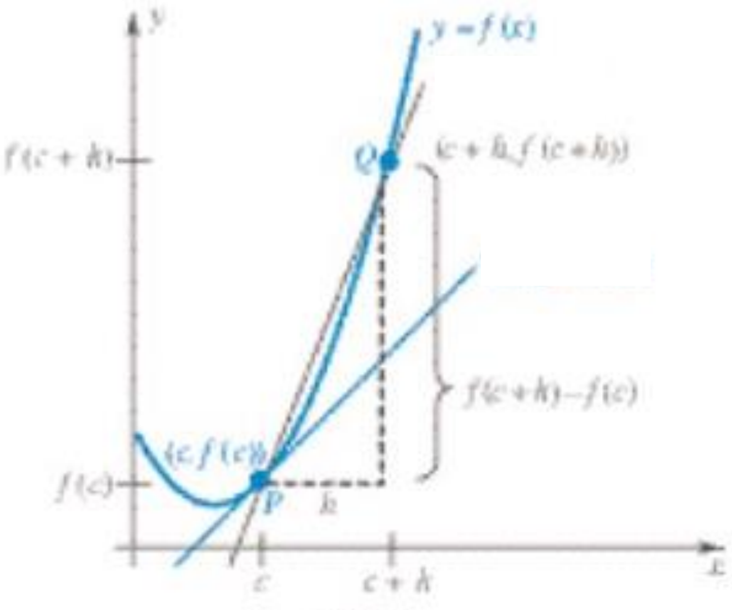
Gagasan bahwa garis singgung adalah garis yang menyentuh kurva di satu titik benar untuk lingkaran, tapi tidak untuk kebanyakan kurva (lihat ilustrasi berikut)



Gagasan garis singgung kurva pada titik P sebagai garis yang merupakan aproksimasi terbaik terhadap kurva di sekitar titik P adalah gagasan yang lebih baik, tapi masih kurang jelas secara matematis.



Konsep limit memberikan cara untuk mendapatkan deskripsi yang paling baik tentang gagasan garis singgung.



Misal suatu kurva adalah grafik fungsi dengan persamaan $y = f(x)$. Misal P memiliki koordinat $P(c, f(c))$ dan titik Q di dekatnya mempunyai koordinat $Q(c+h, f(c+h))$. Tali busur PQ memiliki gradien $m_{PQ} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$. Dengan menggunakan konsep limit, definis formal dari garis singgung diberikan sebagai

Definisi

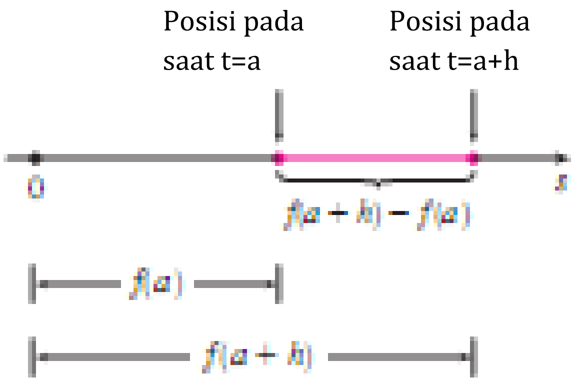
Garis singgung terhadap kurva $y = f(x)$ *pada titik* $P(c, f(c))$ *adalah garis yang melalui* P *dan dengan kemiringan*

$$m_{gsP} = \lim_{h \to 0} m_{\text{talibusur}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limitnya ada dan bukan ∞ *atau* $-\infty$

Kecepatan Sesaat

Misal suatu objek bergerak sepanjang garis lurus dengan persamaan $s = f(t)$, yang menunjukkan jarak (berarah) objek terhadap titik asal setelah waktu t dan sering disebut sebagai fungsi posisi. Pada interval $t = a$ sampai dengan $t = a + h$ perubahan posisi adalah $f(a+h) - f(a)$



Kecepatan rata-rata pada interval waktu tersebut adalah :

$$\text{kecepatan rata} - \text{rata} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Selanjutnya kita tinjau kecepatan rata-rata pada interval waktu $[a, a+h]$ yang semakin pendek, dengan kata lain h mendekati 0.

Definisi

Jika objek bergerak sepanjang garis lurus dengan posisi f(t), maka kecepatan sesaat pada saat a adalah

$$v_{\text{pada a}} = \lim_{h\to 0} v_{\text{rata-rata[a,a+h]}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

asalkan limitnya ada dan bukan ∞ *atau* $-\infty$

Turunan

Kita telah melihat bahwa gagasan kemiringan garis singgung dan kecepatan sesaat memberikan bentuk limit yang sama. Selanjutnya kita akan membahas lebih jauh bentuk limit tersebut secara khusus.

Definisi :

Turunan fungsi f *adalah fungsi lain* f' *(dibaca f aksen) yang nilainya pada sebarang bilangan riil* x *adalah* $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Jika $\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ ada untuk suatu bilangan riil c, maka kita katakan f dapat diturunkan di c dan ditulis $f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$. Pencarian turunan disebut pendiferensialan.

CONTOH 1 :

Gunakan definisi $f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ untuk menentukan $f'(3)$ jika $f(x)=x^2-x$

Jawab :

Misal $f(x)=x^2-x$. Perhatikan bahwa ,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{[(3+h)^2-(3+h)]-(3^2-3)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[3^2+2.3.h+h^2-3-h)]-(9-3)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{6+5h+h^2-6}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{5h+h^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}5+h\\ &= 5\end{aligned}$$

Jadi $f'(3)=5$

CONTOH 2 :

Gunakan $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ untuk menentukan $f'(x)$, jika $f(x)=\sqrt{3x}$

Jawab :

Misal $f(x)=\sqrt{x}$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}+\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Jadi $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

CONTOH 3 :

$\lim_{h\to 0}\frac{2(5+h)^3-2(5)^3}{h}$ adalah nilai suatu turunan dari suatu fungsi di suatu titik. Fungsi apa dan di titik mana ?

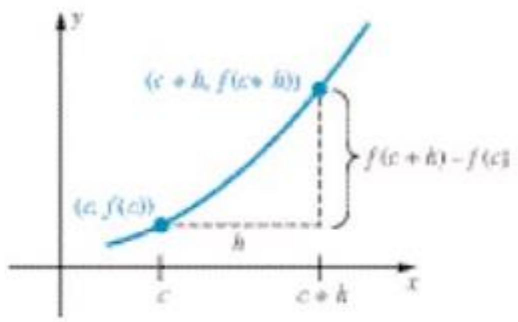
Jawab :

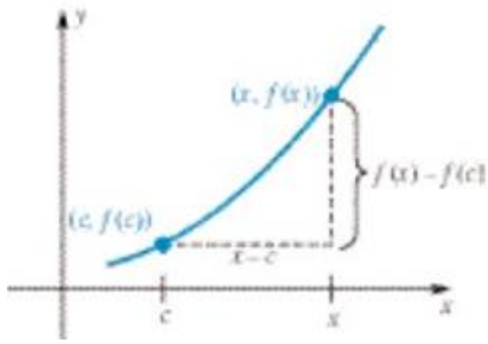
Mengingat $f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ dan memperhatikan $\lim_{h\to 0}\frac{2(5+h)^3-2(5)^3}{h}$ maka kita bisa menentukan bahwa itu adalah turunan dari fungsi $f(x)=2x^3$ di $x=5$

Penggunaan huruf h dalam definisi yang dituliskan di atas bukan sesuatu yang keramat, perhatikan yang berikut ini :

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \\ &= \lim_{p\to 0}\frac{f(c+p)-f(c)}{p} \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{f(c+s)-f(c)}{s} \end{aligned}$$

Selanjutnya perhatikan ilustrasi berikut ini





Dengan menggantikan $c+h$ dengan x dan h dengan $x-c$, maka bentuk limit di atas dapat ditulis sebagai

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

CONTOH 4 :

Gunakan definisi $f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ untuk menentukan $f'(4)$ jika $f(x)=\frac{1}{x-1}$

Jawab :

Misal $f(x)=\frac{1}{x-1}$. Perhatikan bahwa

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4-1}}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{3-(x-1)}{x-1}}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{4-x}{x-1}}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}-\frac{1}{x-1}$$

$$=-\frac{1}{3}$$

Jadi $f'(4)=-\frac{1}{3}$

CONTOH 5 :

Gunakan $f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ untuk menentukan $f'(x)$, jika $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

Jawab :

Misal $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$. Perhatikan bahwa

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{\frac{t-1}{t+1}-\frac{x-1}{x+1}}{t-x}$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{\frac{(t-1)(x+1)-(t+1)(x-1)}{(t+1)(x+1)}}{t-x}$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{\frac{tx-x+t-1-(tx+x-t-1)}{(t+1)(x+1)}}{t-x}$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{\frac{2(t-x)}{(t+1)(x+1)}}{t-x}$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{2}{(t+1)(x+1)}$$

$$=\frac{2}{(x+1)^2}$$

Jadi $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$

CONTOH 6 :

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$ adalah nilai suatu turunan dari suatu fungsi di suatu titik. Fungsi apa dan di titik mana ?

Jawab :

Mengingat $f'(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ dan memperhatikan $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$ maka kita bisa menentukan bahwa itu adalah turunan dari fungsi $f(x)=x^3$ di $x=2$

Jika kurva memiliki garis singgung pada suatu titik maka kurva tidak mungkin terdapat lompatan atau terlalu banyak goyangan pada titik tersebut. Fakta tersebut secara persis dirumuskan dalam teorema berikut :

Teorema A

Jika $f'(c)$ ada maka f kontinu di c

Tidak benar mengatakan bahwa jika suatu fungsi kontinu di suatu titik maka fungsi tersebut dapat di turunkan di titik tersebut

CONTOH 7 :

Tunjukkan bahawa $f(x)=|x|$ tidak dapat diturunkan di $x=0$

Jawab :

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{jika} \quad x\geq 0 \\ -x & \text{jika} \quad x<0 \end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

Perhatikan bahwa

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1 \quad \text{dan} \quad \lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

Ini berarti $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|0+h|-|0|}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}$ tidak ada

Jadi $f(x)=|x|$ tidak dapat diturunkan di $x=0$

Catatan :

Sebelum ini kita sudah pernah menunjukkan bahwa $f(x)=|x|$ kontinu di $x=0$

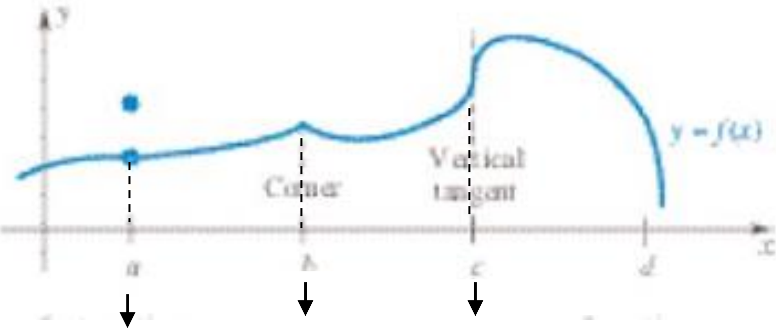
Jadi $f(x)=|x|$ kontinu di $x=0$ tetapi tidak terdiferensial di $x=0$

Kita bisa menggunakan $f(x)=|x|$ sebagai contoh penyangkal, untuk menunjukkan bahwa tidak berlaku " jika f kontinu c maka $f'(c)$ ada di c"

Pernyataan " jika f tidak kontinu di c maka $f'(c)$ tidak ada " ekivalen dengan teorema di atas dan bisa digunakan untuk menunjukkan suatu fungsi tidak dapat diturunkan di suatu titik. Selain ketidak kontinuan ada beberapa hal lain yang dapat menyebabkan suatu fungsi tidak dapat diturunkan.

$f'_{+}(c)=\lim\limits_{x\to c^{+}}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ dan $f'_{-}(c)=\lim\limits_{x\to c^{-}}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ sehingga $f'(c)$ tidak ada dapat terjadi jika $f'_{+}(c)$ dan $f'_{-}(c)$ masing-masingnya ada tapi berbeda, pada kurva hal tersebut dikenali dengan adanya pojok tajam. Selain itu $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}=\infty$ juga menyebabkan $f'(c)$ tidak ada, hal tersebut dikenali dengan garis singgung vertikal pada kurva.

Ilustrasi berikut memberikan gambaran titik-titik di mana suatu fungsi tidak dapat didiferensialkan :



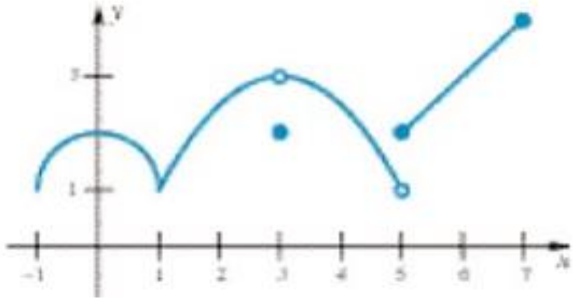
Tidak kontinu

Pojok tajam

Garis singgung vertikal

CONTOH 8 :

Tinjau fungsi $y = f(x)$ yang grafiknya diberikan seperti di bawah ini



(a) Di titik mana pada interval $-1 < x < 7$ $\lim\limits_{u \to x} f(u)$ tidak ada

(b) Di titik mana pada interval $-1 < x < 7$ f tidak kontinu

(c) Di titik mana pada interval $-1 < x < 7$ f tidak dapat diturunkan

Jawab :

Dengan mencermati grafik f pada interval $-1 < x < 7$, kita bisa melihat bahwa

(a) $\lim\limits_{u \to x} f(u)$ tidak ada pada $x = 5$ karena $\lim\limits_{u \to 5^-} f(u) = 1 \neq 2 = \lim\limits_{u \to 5^+} f(u)$

(b) f tidak kontinu pada

(i) $x = 3$, karena $\lim\limits_{u \to 5} f(u) \neq f(5)$

(ii) $x = 5$, karena $\lim\limits_{u \to 5^-} f(u) = 1 \neq 2 = \lim\limits_{u \to 5^+} f(u)$

(c) f tidak dapat diturunkan pada

(i) $x = 1,$ karena $f_-'(1) \neq f_+'(1)$

(ii) $x = 3,\ x = 5$ karena tidak kontinu

CONTOH 9 :

Tentukan titik-titik di mana fungsi $f(x) = \begin{cases} -1 - 2x^2 & \text{jika} \quad x < -1 \\ x^2 & \text{jika} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ x & \text{jika} \quad x > 1 \end{cases}$ dapat diturunkan dan di titik-titik mana tidak dapat diturunkan ? Berikan rumus untuk f'

Jawab :

Akan ditunjukkan f dapat diturunkan pada setiap titik pada selang $(-\infty, -1)$

- Ambil sebarang $x \in (-\infty, -1)$

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{-1 - 2t^2 - (-1 - 2x^2)}{t - x}$$
$$= \lim_{t \to x} \frac{2x^2 - 2t^2}{t - x}$$
$$= \lim_{t \to x} \frac{-2(t - x)(t + x)}{t - x}$$
$$= \lim_{t \to x} -2(t + x)$$
$$= -2(x + x)$$
$$= -4x$$

Jadi f dapat diturunkan pada setiap $x \in (-\infty, -1)$ dan $f'(x) = -4x$

Akan ditunjukkan f dapat diturunkan pada setiap titik pada selang $(-\infty, -1)$

- Ambil sebarang $x \in (-1, 1)$

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{t^2 - x^2}{t - x}$$
$$= \lim_{t \to x} \frac{(t - x)(t + x)}{t - x}$$
$$= \lim_{t \to x} t + x$$
$$= x + x$$
$$= 2x$$

Jadi f dapat diturunkan pada setiap $x \in (-1, 1)$ dan $f'(x) = 2x$

Akan ditunjukkan f dapat diturunkan pada setiap titik pada selang $(1, \infty)$

- Ambil sebarang $x \in (1, \infty)$

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{t - x}{t - x}$$
$$= 1$$

Jadi f dapat diturunkan pada setiap $x \in (1, \infty)$ dan $f'(x) = 1$

Selanjutnya akan kita periksa apakah f dapat diturunkan pada $x = -1$ dan $x = 1$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1^-} \frac{-1 - 2x^2 - (-1)^2}{x + 1}$$
$$= \lim_{x \to -1^-} \frac{-2 - 2x^2}{x + 1}$$

$\lim\limits_{x \to -1^-} -2-2x^2 = -4$ dan $x+1 \to 0^-$ jika $x \to -1^-$, maka $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{-2-2x^2}{x+1} = \infty$

Jadi f tidak dapat diturunkan pada $x = -1$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1^2}{x-1} \\
&= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\
&= \lim_{x \to 1^-} x+1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x-1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Karena $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$ maka $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$ tidak ada

Jadi f tidak dapat diturunkan pada $x = 1$

Rumus untuk f' adalah $f'(x) = \begin{cases} -4x & \text{jika} \quad x < -1 \\ 2x & \text{jika} \quad -1 < x < 1 \\ 1 & \text{jika} \quad x > 1 \end{cases}$

11. Pencarian Turunan

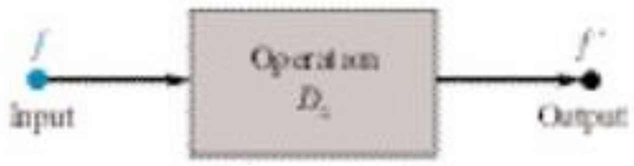
Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

1. Menentukan turunan dari suatu fungsi dengan menggunakan aturan pencarian turunan
2. Menggunakan aturan rantai dan menggunakannya untuk mencari turunan dari suatu fungsi
3. Menggunakan berbagai notasi dalam pencarian turunan
4. Menentukan turunan tingkat tinggi dari suatu fungsi
5. Mencari turunan secara implisit

Materi Ajar

Proses untuk mencari turunan suatu fungsi langsung dari definisi turunan dapat membutuhkan waktu dan menjemukan. Berikut ini kita akan membangun alat yang membantu kita untuk memotong proses tersebut , dan memungkinkan kita mencari turunan dari fungsi-fungsi yang lebih rumit.

Turunan dari fungsi f adalah fungsi lain . Kita sering menggunakan simbol D_x untuk menunjukkan operasi pencarian turunan. Simbol D_x mengatakan bahwa kita menentukan turunan terhadap variabel x. D_x adalah contoh operator.



Aturan Pencarian Turunan :

1. *Jika* $f(x) = k,\ k$ *konstanta maka* $f'(x) = 0$*, atau* $D_x k = 0$
2. *Jika* $f(x) = x$ *maka* $f'(x) = 1$*atau* $D_x x = 1$
3. *Jika* $f(x) = x^n$*,* n *bilangan positif maka* $f'(x) = nx^{n-1}$ *atau* $D_x x^n = nx^{n-1}$
4. *Jika* f *terdiferensial dan* k *konstanta maka* $(kf)'(x) = kf'(x)$ *atau* $D_x(kf(x) = kD_x f(x)$
5. *Jika* f *dan* g *terdiferensial, maka*
   (i) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ *atau* $D_x(f+g)(x) = D_x f(x) + D_x g(x)$
   (ii) $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$ *atau* $D_x(f-g)(x) = D_x f(x) - D_x g(x)$
   (iii) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ *atau* $D_x(fg)(x) = g(x)D_x f(x) + f(x)D_x g(x)$
   (iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2},\ g(x) \neq 0$ *atau*
   $$D_x\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{(g(x))^2},\ g(x) \neq 0$$

Dengan menggunakan aturan pencarian turunan di atas kita dapat menunjukkan bahwa fungsi polinomial dapat diturunkan di mana-mana dan fungsi rasional juga dapat diturunkan di mana-mana kecuali di titik-titik di mana penyebutnya bernilai 0.

CONTOH 1 :

Tentukan $D_x y$

a. $y = (x^2 + 17)(x^3 - 3x + 1)$

b. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$

Jawab :

a. $y = (x^2 + 17)(x^3 - 3x + 1)$

Misal $f(x) = x^2 + 17$ dan $g(x) = x^3 - 3x + 1$

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x(fg)(x) \\ &= [D_x f(x)]g(x) + f(x)[D_x g(x)] \\ &= (2x)(x^3 - 3x + 1) + (x^2 + 17)(3x^2 - 3) \end{aligned}$$

Setelah ini untuk keperluan menghitung kita boleh menghitung secara langsung seperti berikut ini,

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x[(x^2 + 17)(x^3 - 3x + 1)] \\ &= [D_x(x^2 + 17)](x^3 - 3x + 1) + (x^2 + 17)[D_x(x^3 - 3x + 1) \\ &= (2x)(x^3 - 3x + 1) + (x^2 + 17)(3x^2 - 3) \end{aligned}$$

b. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$

$$\begin{aligned} D_x y &= \frac{[D_x(x^2 - x + 1)](x^2 + 1) - (x^2 - x + 1)[D_x(x^2 + 1)]}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{(2x - 1)(x^2 + 1) - (x^2 - x + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

CONTOH 2 :

Tunjukkan bahwa aturan pangkat berlaku untuk pangkat bilangan bulat negatif, yakni $D_x(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$, n bilangan bulat positif

Jawab :

Telah kita ketahui bahwa untuk n bilangan bulat positif berlaku $D_x x^n = nx^{n-1}$

$$D_x x^{-n} = D_x\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{[D_x(1)]x^n - (1)[D_x(x^n)]}{(x^n)^2}$$

$$= \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= -nx^{n-1-2n}$$

$$= -nx^{-n-1}$$

Turunan Fungsi Trigonometri

Kita bisa menemukan rumus turunan dari fungsi $\sin x$ dan $\cos x$ langsung dari definisi . Perhatikan yang berikut ini :

$$\begin{aligned} D_x(\sin x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(-\sin x \frac{1-\cos h}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}\right) \\ &= (-\sin x)\left[\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}\right] + (\cos x)\left[\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right] \end{aligned}$$

Telah kita ketahui bahwa

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} = 0$$

Maka

$$D_x(\sin x) = (-\sin x)\cdot 0 + (\cos x)\cdot 1 = \cos x$$

dan $\sin x$ dapat diturunkan di mana-mana. Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan bahwa $D_x \cos x = -\sin x$ dan $\cos x$ juga dapat diturunkan di mana-mana.

Selanjutnya dengan menggunakan aturan pencarian turunan kita dapat menunjukkan yang berikut ini :

$$D_x \tan x = \sec^2 x \qquad D_x \cot x = -\csc^2 x$$
$$D_x \sec x = \sec x \tan x \qquad D_x \csc x = -\csc x \cot x$$

CONTOH 3 :

Tentukan $D_x y$

a. $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

b. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x \sin x}$

Jawab :

a. $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

$$D_x y = D_x\left(\frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\right)$$

$$= \frac{[D_x(\sin x)](\sin x + \cos x) - (\sin x)[D_x(\sin x + \cos x)]}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x)(\sin x + \cos x) - (\sin x)(\sin x - \cos x)]}{(\sin x + \cos x)^2}$$

b. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x \sin x}$

$$D_x y = Dx\left(\frac{x^2 + 1}{x \sin x}\right)$$

$$= \frac{[D_x(x^2 + 1)](x \sin x) - (x^2 + 1)[D_x(x \sin x)]}{(x \sin x)^2}$$

$$= \frac{(2x)(x \sin x) - (x^2 + 1)[(D_x x)\sin x + x(D_x \sin x)])}{x^2 \sin^2 x}$$

$$= \frac{2x^2 \sin x - (x^2 + 1)(\sin x + x \cos x)}{x^2 \sin^2 x}$$

CONTOH 4 :

Misal $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{jika} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{jika} \quad x = 0 \end{cases}$

a. Tunjukkan f terdiferensial di $x = 0$ dan tentukan $f'(0)$

b. Cari $f'(x)$ untuk $x \neq 0$

Jawab :

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin x - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin x$

Karena $-1 \leq \sin x \leq 1$, maka

$-x \leq x \sin x \leq x$, untuk $x > 0$ dan $-x \geq x \sin x \geq x$, untuk $x < 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} -x = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} x$ maka $\lim\limits_{x \to 0^+} x \sin x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} x = 0 = \lim\limits_{x \to 0-} -x$ maka $\lim\limits_{x \to 0^+} x \sin x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x \sin x = 0$ dan $\lim\limits_{x \to 0^+} x \sin x = 0$ maka $\lim\limits_{x \to 0} x \sin x = 0$

Jadi f dapat diturunkan 0 dan $f'(0) = 0$

b. Untuk $x \neq 0$, $D_x(x^2 \sin x) = [D_x x^2]\sin x + (x^2)[D_x \sin x] = 2x \sin x + x^2 \cos x$

Aturan Rantai

Aturan pencarian turunan dan rumus turunan fungsi trigonometri yang telah kita punya dalam banyak kasus sulit untuk digunakan. Misalnya untuk mendapatkan turunan dari $f(x)=(3x^2-4x+1)^{50}$ maka kita harus melakukan perkalian sebanyak 50 kali faktor $(3x^2-4x+1)$. Untuk mencari turunan dari $\sin 3x$, kita harus menggunakan identitas-identitas trigonometrik untuk mendapatkan sesuatu yang bergantung pada $\sin x$ dan $\cos x$. Untungnya terdapat cara yang lebih baik, yang memudahkan kita untuk menentukan turunan suatu fungsi, yang di kenal dengan aturan rantai

Teorema:

Misal $y=f(u)$ *dan* $u=g(x)$ *menentukan fungsi komposit* $y=f(g(x))=fog(x)$. *Jika* g *terdiferensialkan di* x *dan* f *terdiferensialkan di* $u=g(x)$ *maka* fog *terdiferensialkan di* x *dan* $fog'(x)=f'(g(x))'g'(x)$ *atau* $D_x y = D_u y D_x u$

CONTOH 5 :

Tentukan $D_x y$ jika

(i) $y=\dfrac{1}{(3x^2+x-3)^9}$ (ii) $y=\cos\left(\dfrac{3x^2}{x+2}\right)$ (iii) $y=x\sin^2 2x$

Jawab :

(i) $y=\dfrac{1}{(3x^2+x-3)^9}$

Misal $u=g(x)=3x^2+x-3$ dan $y=f(u)=\dfrac{1}{u^9}$

$$\begin{aligned} D_x y &= f'(u)g'(x) \\ &= -\frac{9}{u^{10}}(6x+1) \\ &= -\frac{9}{(3x^2+x-3)^{10}}(6x+1) \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} D_x y &= D_u y D_x u \\ &= -\frac{9}{(u)^{10}}(6x+1) \\ &= -\frac{9}{(3x^2+x-3)^{10}}(6x+1) \end{aligned}$$

Setelah ini untuk keperluan menghitung kita boleh menghitung langsung seperti berikut

$$D_x y = -\frac{9}{(3x^2+x-3)^{10}} D_x(3x^2+x-3) = -\frac{9}{(3x^2+x-3)^{10}}(6x+1)$$

(ii) $y = \cos\left(\frac{3x^2}{x+2}\right)$

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x \cos\left(\frac{3x^2}{x+2}\right) \\ &= -\sin\left(\frac{3x^2}{x+2}\right) D_x\left(\frac{3x^2}{x+2}\right) \\ &= -\sin\left(\frac{3x^2}{x+2}\right)\left(\frac{(D_x 3x^2)(x+2)-3x^2(D_x(x+2))}{(x+2)^2}\right) \\ &= -\sin\left(\frac{3x^2}{x+2}\right)\left(\frac{6x(x+2)-3x^2(1)}{(x+2)^2}\right) \end{aligned}$$

(iii) $y = x\sin^2 2x$

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x x\sin^2 2x \\ &= (D_x x)(\sin^2 2x) + (x)(D_x \sin^2 2x) \\ &= (1)\sin^2 2x + (x)(2\sin 2x) D_x(\sin 2x) \\ &= \sin^2 2x + 2x\sin 2x\cos 2x D_x 2x \\ &= \sin^2 2x + (x)(2\sin 2x)(\cos 2x)(2) \end{aligned}$$

CONTOH 6 :

Tentukan $D_x y$

a. $y = \left[(x^2+1)\sin x\right]^3$ b. $y = \frac{(x^3+2x)^4}{x^4+1}$

Jawab :

a. $y = \left[(x^2+1)\sin x\right]^3$

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x\left[(x^2+1)\sin x\right]^3 \\ &= 3\left[(x^2+1)\sin x\right]^2 D_x(x^2+1)\sin x \\ &= 3\left[(x^2+1)\sin x\right]^2\left[(D_x(x^2+1))\sin x + (x^2+1)D_s \sin x\right] \\ &= 3\left[(x^2+1)\sin x\right]^2\left[2x\sin x + (x^2+1)\cos x\right] \end{aligned}$$

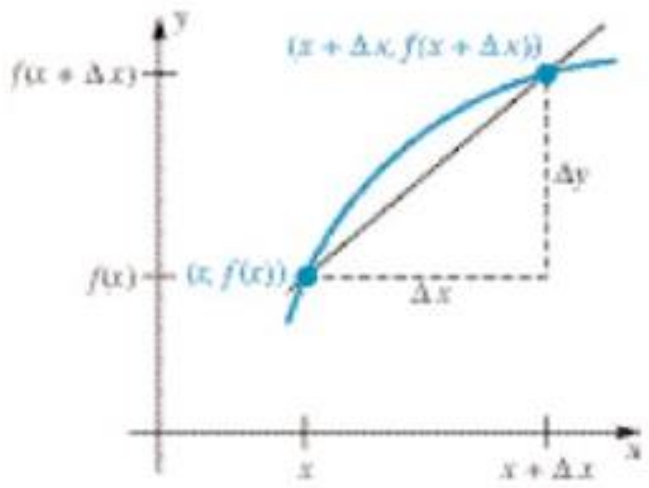
b. $y = \frac{(x^3+2x)^4}{x^4+1}$

$$D_x y = D_x \frac{(x^3+2x)^4}{x^4+1}$$
$$= \frac{[D_x(x^3+2x)^4](x^4+1)-(x^3+2x)^4 D_x(x^4+1)}{(x^4+1)^2}$$
$$= \frac{4(x^3+2x)^3[D_x(x^3+2x)](x^4+1)-(x^3+2x)^4(4x^3)}{(x^4+1)^2}$$
$$= \frac{4(x^3+2x)^3(3x^2+2)(x^4+1)-(x^3+2x)^4(4x^3)}{(x^4+1)^2}$$

Notasi Leibniz

Misal $y = f(x)$ menyatakan suatu fungsi dalam peubah x. Misal peubah bebas x berubah dari x ke $x+\Delta x$, maka perubahan yang berpadanan dalam peubah tak bebas y adalah $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ dan $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ adalah kemiringan talibusur yang melalaui $(x, f(x))$. Jika $\Delta x \to 0$ maka kemiringan tali busur akan mendekati kemiringan garis singgung. Leibniz menggunakan lambang $\frac{dy}{dx}$ untuk menyatakan $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$



Selanjutnya pandang $\frac{d}{dx}$ sebagai lambang operator yang sama dengan D_x. Semua teorema tentang turunan tetap berlaku, hanya penulisannya berbeda.

Turunan Tingkat Tinggi

Operasi pendiferensialan terhadap f mengahasilkan sebuah fungsi baru f'. Jika operasi pendiferensialan dilakukan pada f' akan diperoleh f'' (dibaca f dua aksen) dan disebut turunan kedua. Jika operasi pendiferensialan dilakukan pada f'' akan diperoleh fungsi f''' dan disebut turunan ketiga. Cara penulisan untuk turunan dari $y = f(x)$ adalah sebagai berikut :

Turunan-ke	Notasi f'	Notasi y'	Notasi D_x	Notasi Leibniz
1	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
2	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$
3	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3 y}{dx^3}$
4	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4 y}{dx^4}$
. . .				
n	$f^n(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\frac{d^n y}{dx^n}$

CONTOH 7 :

Cari $\frac{d^3 y}{dx^3}$

a. $y = \frac{x}{2x+1}$

b. $y = x \cos \pi x$

Jawab :

a. $y = \dfrac{x}{2x+1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{x}{2x+1}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{d}{dx}(x)\right](2x+1) - x\left[\dfrac{d}{dx}(2x+1)\right]}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{1(2x+1) - x(2)}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(2x+1)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(2x+1)^2}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(2x+1)^{-2}$$

$$= (-2)(2x+1)^{-3}\frac{d}{dx}(2x+1)$$

$$= (-2)(2x+1)^{-3}(2)$$

$$= -4(2x+1)^{-3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}[-4(2x+1)^{-3}]$$

$$= 12(2x+1)^{-3}D_x(2x+1)$$

$$= 12(2x+1)^{-3}(2)$$

b. $y = x\cos \pi x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x\cos\pi x$$

$$= \left(\frac{d}{dx}x\right)\cos\pi x + x\left(\frac{d}{dx}\cos\pi x\right)$$

$$= 1.\cos\pi x + x(-\sin\pi x)\frac{d}{dx}\pi x$$

$$= \cos\pi x + x(-\sin\pi x)\pi$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\cos\pi x + x(-\sin\pi x)\pi\right)$$

$$= -\sin\pi x\frac{d}{x}\pi x + \left(\frac{d}{dx}\pi x\right)(-\sin\pi x) + \pi x\frac{d}{dx}(-\sin\pi x)$$

$$= (-\sin\pi x)(\pi) + (\pi)(-\sin\pi x) + \pi x(-\cos\pi x)\frac{d}{dx}\pi x$$

$$= (-\sin\pi x)(\pi) + (\pi)(-\sin\pi x) + \pi x(-\cos\pi x)(\pi)$$

$$= -2\pi\sin\pi x - \pi^2 x\cos\pi x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(-2\pi\sin\pi x - \pi^2 x\cos\pi x\right)$$

$$= -2\pi\frac{d}{dx}\sin\pi x - \pi^2\frac{d}{dx}x\cos\pi x$$

$$= -2\pi\cos\pi x\frac{d}{dx}\pi x + \pi^2\left[\left(\frac{d}{dx}x\right)\cos\pi x + x\left(\frac{d}{dx}\cos\pi x\right)\right]$$

$$= -2\pi^2\cos\pi x + \pi^2\cos\pi x + \pi^2 x(-\sin\pi x)\frac{d}{dx}\pi x$$

$$= -2\pi^2\cos\pi x + \pi^2\cos\pi x + \pi^3 x(-\sin\pi x)$$

CONTOH 8 :

Tentukan $f''(0)$ jika $f(x) = \sin 3x + \sin^2 3x$

Jawab :

$$f(x) = \sin 3x + \sin^2 3x$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\sin 3x + \sin^2 3x)$$

$$= \cos 3x\frac{d}{dx}3x + (2\sin 3x)\frac{d}{dx}\sin 3x$$

$$= (\cos 3x)(3) + (2\sin 3x)(\cos 3x)\frac{d}{dx}3x$$

$$= (\cos 3x)(3) + (2\sin 3x)(\cos 3x)(3)$$

$$= 3\cos 3x + 6\sin 3x\cos 3x$$

$$= 3\cos 3x + 3\sin 6x$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(3\cos 3x + 3\sin 6x)$$
$$= 3\frac{d}{dx}\cos 3x + 3\frac{d}{dx}\sin 6x$$
$$= (3)(-\sin 3x)\frac{d}{dx}3x + (3)(\cos 6x)\frac{d}{dx}6x$$
$$= (3)(-\sin 3x)(3) + (3)(\cos 6x)(6)$$
$$= -9\sin 3x + 18\cos 6x$$
$$f''(0) = -9\sin 3.0 + 18\cos 6.0 = 0 + 18 = 18$$

Turunan Implisit

Misal $y^3 + 7y = x^3$, bagaimana menentukan $\frac{dy}{dx}$? Kita mengalami kesulitan untuk secara eksplisit menyatakan y dalam peubah x dan kemudian menghitung $\frac{dy}{dx}$. Masalah tersebut dapat diatasi dengan mendiferensialkan kedua ruas terhadap x. Mencari $\frac{dy}{dx}$ dengan tanpa menyatakan y secara eksplisit dalam x terlebih dahulu disebut pencarian turunan secara implisit.

CONTOH 9 :

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika diketahui y adalah fungsi dari x

a. $y^5 + x^2y^3 = 1 + x^4y$ b. $\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} = 6$ c. $\cos(x-y) = y\sin x$

Jawab :

a. $y^5 + x^2y^3 = 1 + x^4y$

$$\frac{d}{dx}(y^5 + x^2y^3) = \frac{d}{dx}(1 + x^4y)$$
$$\frac{d}{dx}y^5 + \frac{d}{dx}(x^2y^3) = \frac{d}{dx}1 + \frac{d}{dx}(x^4y)$$
$$5y^4\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d}{dx}x^2\right)y^3 + x^2\left(\frac{d}{dx}y^3\right) = 0 + \left(\frac{d}{dx}x^4\right)y + x^4\frac{dy}{dx}$$
$$5y^4\frac{dy}{dx} + 2xy^3 + x^2(3y^2)\frac{dy}{dx} = 4x^3y + x^4\frac{dy}{dx}$$
$$(5y^4 + 3x^2y^2 - x^4)\frac{dy}{dx} = 4x^3y - 2xy^3$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3y - 2xy^3}{5y^4 + 3x^2y^2 - x^4}$$

b. $\sqrt{x+y}+\sqrt{xy}=6$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{xy}\right)=\frac{d}{dx}(6)$$
$$\frac{d}{dx}\sqrt{x+y}+\frac{d}{dx}\sqrt{xy}=0$$
$$\frac{d}{dx}(x+y)^{1/2}+\frac{d}{dx}(xy)^{1/2}=0$$
$$\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}\frac{d}{dx}(x+y)+\frac{1}{2}(xy)^{-1/2}\frac{d}{dx}(xy)=0$$
$$\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}\left[\frac{d}{dx}x+\frac{dy}{dx}\right]+\frac{1}{2}(xy)^{-1/2}\left[\left(\frac{d}{dx}x\right)y+x\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]=0$$
$$\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}\left[1+\frac{dy}{dx}\right]+\frac{1}{2}(xy)^{-1/2}\left[(1)y+x\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]=0$$
$$\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}+\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}(xy)^{-1/2}y+\frac{1}{2}(xy)^{-1/2}x\frac{dy}{dx}=0$$
$$\left[\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}+\frac{1}{2}x(xy)^{-1/2}\right]\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}y(xy)^{-1/2}+\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{1}{2}y(xy)^{-1/2}+\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}}{\frac{1}{2}x(xy)^{-1/2}+\frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}}$$
$$=-\frac{\frac{y}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{x+y}}}{\frac{x}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{x+y}}}$$

c. $\cos(x-y)=y\sin x$

$$\frac{d}{dx}\cos(x-y)=\frac{d}{dx}y\sin x$$
$$-\sin(x-y)\frac{d}{dx}(x-y)=\left(\frac{dy}{dx}\right)\sin x+y\frac{d}{dx}\sin x$$
$$-\sin(x-y)\left[\frac{d}{dx}x-\frac{dy}{dx}\right]=\sin x\left(\frac{dy}{dx}\right)+y\cos x$$
$$-\sin(x-y)+\sin(x-y)\frac{dy}{dx}=\sin x\left(\frac{dy}{dx}\right)+y\cos x$$
$$[\sin(x-y)-\sin x]\frac{dy}{dx}=y\cos x+\sin(x-y)$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$$

12. Maksimum dan Minimum , Kemonotonan dan Kecekungan

<u>Indikator Pencapaian Hasil Belajar</u>

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

1. Menentukan nilai maksimum dan minimum global dari suatu fungsi pada suatu interval tutup
2. Menjelaskan kemonotonan dan kecekungan suatu fungsi pada daerah asalnya

<u>Materi Ajar</u>

Dalam kehidupan sehari-hari seringkali kita bertemu dengan masalah-masalah seperti bagaimana dokter harus menentukan dosis minimum untuk suatu obat yang dapat menyembuhkan penyakit tertentu, bagaimana perusahaan harus menentukan biaya pendistribusian barang agar keuntungan maksimum atau bagaimana petani harus memilih kadar pupuk yang pas agar hasil panen maksimum . Masalah tersebut biasanya dirumuskan sebagai masalah menentukan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi. Kalkulus menyediakan alat yang bisa digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut.

Maksimum dan minimum fungsi

Jika diberikan sebuah fungsi $f(x)$ dengan daerah asal S, beberapa pertanyaan berikut mungkin muncul : Apakah $f(x)$ memiliki nilai maksimum dan minimum pada S, di mana nilai maksimum dan minimum dicapai, dan berapa nilai maksimum dan minimumnya ?

Definisi

Misal S daerah asal dari f dan memuat titik c. Dikatakan bahwa

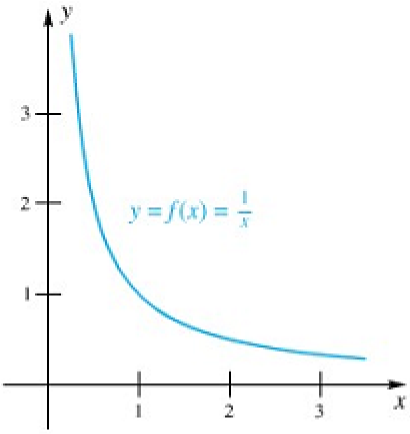
(1) $f(c)$ nilai maksimum dari f pada S jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x pada S

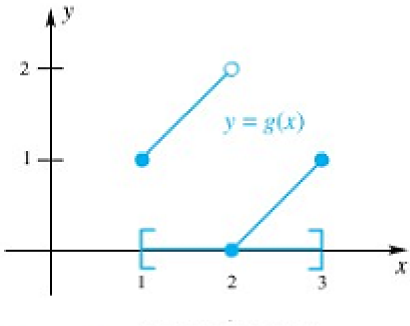
(2) $f(c)$ nilai minimum dari f pada S jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x pada S

(3) $f(c)$ nilai ekstrim dari f pada S jika $f(c)$ adalah nilai maksimum atau minimum

(4) Fungsi yang akan dicari nilai maksimum dan minimumnya dikatakan fungsi objektif

Perhatikan grafik fungsi $f(x) = \dfrac{1}{x}$ dan $g(x) = \begin{cases} x & \text{jika } 1 \leq x < 2 \\ x-2 & \text{jika } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ berikut ini.





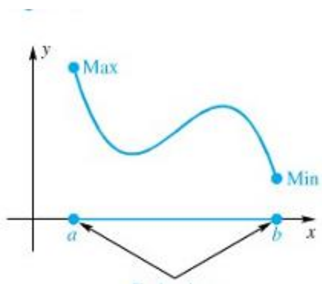
Fungsi f tidak memiliki nilai maksimum dan minimum pada selang buka $(0,\infty)$, tapi pada selang tutup $[1,3]$ nilai maksimum dari f adalah $f(1)=1$ dan nilai minimum adalah $f(3)=\frac{1}{3}$. Sedangkan fungsi g - yang tidak kontinu pada selang tutup $[1,3]$ - tidak memiliki nilai maksimum pada selang tersebut. Kita bisa membuat dugaan bahwa ada kaitan antara selang dan kekontinuan fungsi dengan eksistensi nilai maksimum dan minimum.

Berikut adalah teorema yang secara intuisi bisa diterima kebenarannya, tapi bukti yang lebih ketat tidak akan kita bahas di sini.

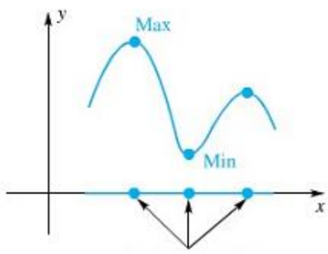
Teorema

Jika f kontinu pada selang tutup $[a,b]$ maka f mencapai nilai maksimum dan minimum di selang tersebut

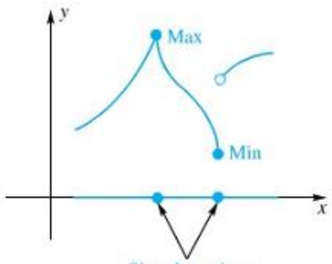
Gambar berikut adalah ilustrasi yang menunjukkan tempat-tempat di mana sustu fungsi mungkin mencapai nilai maksimum dan minimum



titik ujung
selang



titik di mana
turunann sama
dengan 0



titik di mana
fungsi tidak dapat
diturunkan

Selanjutnya titik di mana fungsinya bernilai nol di namakan titik stasioner, sedangkan titik di mana fungsinya tidak dapat diturunkan dinamakan titik singular. Titik ujung selang, titik stasioner dan titik singular dinamakan titik-titik kritis.

Titik-titik kritis memegang peran penting dalam menentukan nilai maksimum dan minimum, seperti yang ditunjukkan dalam teorema berikut :

Teorema
(Teorema Titik Kritis)
Misal f didefinisikan pada interval I yang memuat c. Jika $f(c)$ adalah nilai ekstrim, maka c haruslah titik kritis, yakni
(1) Titik ujung dari I
(2) Titik stasioner dari f, yakni $f'(c) = 0$
(3) Titik singular dari f, yakni $f'(c)$ tidak ada

Berdasarkan kedua teorema di atas, untuk mencari nilai maksimumdan minimum dari suatu fungsi kontinu di selang tutup kita dapat melakukan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Cari titik-titik kritis dari f pada selang tutup yang diberikan
2. Cari nilai f pada titik-titik kritis
3. Nilai yang paling besar pada langkah ke 2 menjadi nilai maksimum dan yang paling kecil menjadi nilai minimum

CONTOH 1:

Carilah nilai maksimum dan minimum mutlak f pada selang yang diberikan

a. $f(x) = x|x|$ pada $-2 \le x \le 1$

b. $f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$ pada $-1 \le x \le 5$

Jawab :

a. $f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{jika} \quad x \ge 0 \\ -x^2 & \text{jika} \quad x < 0 \end{cases}$

Akan ditentukan nilai maksimum dan minimum mutlak f pada selang $-2 \le x \le 1$ dengan langkah-langkah sebagai berikut :

- Menentukan titik-titik kritis dari f

  $x = -2$ dan $x = 1$ adalah titik-titik ujung selang

  $f(x) = x^2$ dapat diturunkan pada setiap $x \in (0,1)$ dan $f'(x) = 2x$

Dalam kasus ini $f'(x)=2x=0 \Leftrightarrow x=0$, tetapi $0 \notin (0,1)$

$f(x)=-x^2$ dapat diturunkan pada setiap $x \in (-2,0)$ dan $f'(x)=-2x$

Dalam kasus ini $f'(x)=-2x=0 \Leftrightarrow x=0$, tetapi $0 \notin (-2,0)$

Perhatikan

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^=} \frac{-x^2-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} -x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Ini berarti f dapat diturunkan di $x=0$ dan $f'(0)=0$, sehingga 0 adalah titik stasioner

Karena f dapat diturunkan di setiap titik pada selang $-2 \le x \le 1$, sehingga f tidak punya titik singular pada selang $-2 \le x \le 1$,

- Titik-titk kritis dari f adalah , $x=-2$, $x=1$ dan $x=0$

  Nilai f pada titik-titik tersebut adalah :

  $f(-2)=-(-2)^2=-4$, $f(0)=0$ dan $f(1)=1^2=1$

- Berdasarkan nilai f pada titik kritis, bisa ditentukan pada selang $-2 \le x \le 1$,

  nilai maksimum global f adalah 1, dicapai pada saat $x=1$

  nilai minimum global f adalah -4, dicapai pada saat $x=-2$

b. $f(x)=5x^{2/3}-x^{5/3}$ pada $-1 \le x \le 5$

Akan ditentukan nilai maksimum dan minimum mutlak f pada selang $-1 \le x \le 5$ dengan langkah-langkah sebagai berikut :

- Menentukan titik-titik kritis dari f

  $x=-1$ dan $x=5$ adalah titik-titik ujung selang

  $f(x)=5x^{2/3}-x^{5/3}$

  Perhatikan ,

  $$f'(x)=5\frac{2}{3}x^{-1/3}-\frac{5}{3}x^{2/3}=\frac{5}{3}x^{-1/3}(2-x)$$

  f' terdefinisi di seluruh bilangan riil kecuali $x=0$ dan $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

Jadi $x=0$ adalah titik singular dan $x=2$ adalah titik stasioner

- Titik-titk kritis dari f adalah , $x=-1$, $x=5$, $x=0$ dan $x=2$

  Nilai f pada titik-titik tersebut adalah :

  $f(-1)=5(-1)^{2/3}-(-1)^{5'3}=5-(-1)=6$

  $f(0)=5(0)^{2/3}-(0)^{5'3}=0$

  $f(2)=5(2)^{2/3}-(2)^{5'3}=5(2)^{2/3}-2(2)^{2/3}=3.2^{2/3}$

  $f(5)=5(5)^{2/3}-(5)^{5/3}=0$

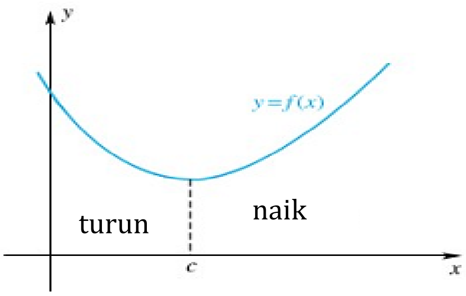
- Berdasarkan nilai f pada titik kritis, bisa ditentukan pada selang $-1\le x\le 5$,

  nilai maksimum global f adalah 6, dicapai pada saat $x=-1$

  nilai minimum global f adalah 0 , dicapai pada saat $x=0$ dan $x=5$

Kemonotonan dan Kecekungan

Jika kita mengamati grafik berikut , adalah suatu yang natural jika kita mengatakan f turun di kiri c dan naik di kanan c



Definisi persis tentang naik dan turunnya suatu fungsi diberikan sebagai berikut :

Definisi

Misal f didefinisikan pada interval I (buka, tutup atau bukan keduanya). Kita katakan bahwa

(i) f naik pada I jika untuk setiap pasangan bilangan x_1 dan x_2 dalam I

$$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

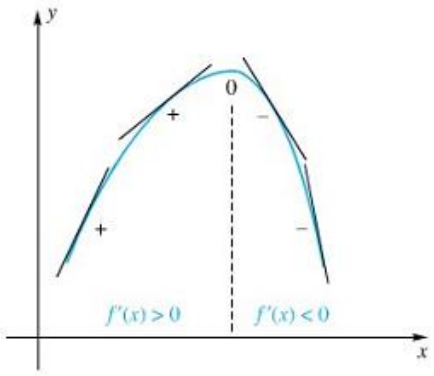
(i) f turun pada I jika untuk setiap pasangan bilangan x_1 dan x_2 dalam I

$$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

(ii) f monoton murni pada I jika f naik pada I atau turun pada I

Bagaimana kita memutuskan grafik suatu fungsi adalah naik ? Kita dapat saja menggambar grafiknya. Tapi biasanya grafik digambarkan dengan memplot beberapa titik dan menghubungkannya dengan suatu kurva mulus. Siapa yang bisa menjamin bahwa grafik tidak bergoyang diantara titik-titik tersebut ? Kita membutuhkan cara yang lebih baik.

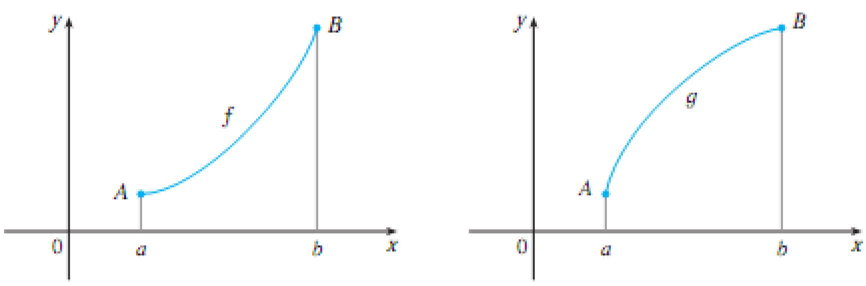
Turunan pertama $f'(x)$ memberikan informasi tentang kemiringan garis singgung terhadap kurva $y = f(x)$ pada titik x. Pada interval di mana $f'(x) > 0$, garis singgungnya bergerak naik dan jika $f'(x) < 0$ garis singgungnya bergerak turun.



Ini bukan bukti tetapi paling tidak membuat teorema berikut masuk akal :

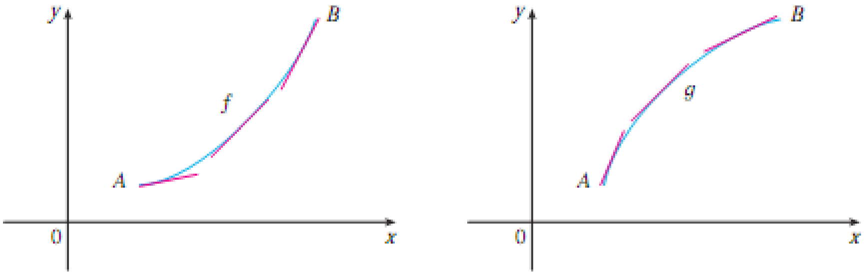
Teorema
(***Teorema Kemonotonan***)
Misal f dapat didiferensialkan pada titik dalam selang I
(i) Jika $f'(x) > 0$ untuk semua titik dalam x dari I maka f naik pada I
(ii) Jika $f'(x) < 0$ untuk semua titik dalam x dari I maka f turun pada I

Dengan teorema di atas kita dapat menentukan di mana suatu di mana suatu fungsi naik dan dimana suatu fungsi turun. Selanjutnya misal kita mengetahui dua titik yang dilalui suatu fungsi, dan kita tahu bahwa pada selang tersebut fungsinya naik. Bagaimana kita menghubungkan kedua titik ? Perhatikan ilustrasi berikut :



Ilustrasi tersebut menyarankan kita untuk memperhatikan kecekungan grafik.

Perhatikan gambar berikut :



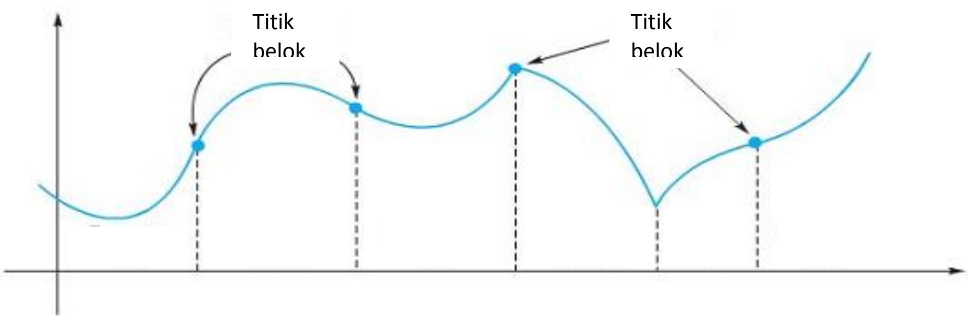
Pada grafik yang cekung ke atas garis singgung bergerak searah jarum jam (kemiringan bertambah) dan pada grafik yang cekung ke bawah garis singgung bergerak berlawanan jarum jam (kemiringan berkurang) . Intuisi kita tentunya dapat menerima definisi berikut :

Definisi :
Misal f dapat didiferensialkan pada selang selang buka I . Jika f' naik pada I dikatakan f cekung ke atas di I dan jika f' turun pada I dikatakan f cekung ke bawah di I

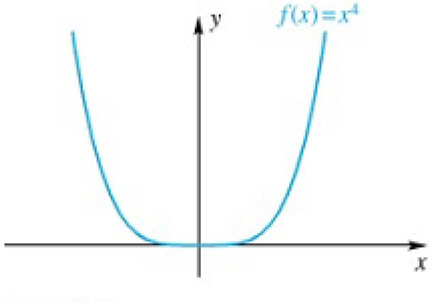
Karena f'' adalah turunan dari f', maka dengan mengingat teorema kemonotonan, maka masuk akal jika kemudian kita bisa menerima teorema berikut (bukti yang lebih ketat tidak akan kita bahas di sini)

Teorema :
(Teorema Kecekungan)
Misal f dapat didiferensialkan dua kali pada selang buka I
(i) Jika $f''(x) > 0$ untuk semua titik dalam x dari I maka f cekung ke atas pada I
(ii) Jika $f''(x) < 0$ untuk semua titik dalam x dari I maka f cekung ke bawah pada I

Misal f kontinu pada c . Titik $(c, f(c))$ dikatakan titik belok dari grafik f jika f cekung ke atas di satu sisi dari c dan f cekung ke bawah di sisi lainnya. Gambar berikut menunjukkan beberapa kemungkinan :



Dengan mempertimbangkan teorema kecekungan dan ilustrasi di atas maka kita bisa menduga bahwa titik-titik dimana $f''(x)=0$ dan dimana $f''(x)$ tidak adalah calon titik dimana terjadi perubahan kecekungan. Apakah selalu berlaku demikian ?



Perhatikan untuk $f(x)=x^4$ kita punyai $f''(0)=0$ tetapi titik $(0,0)$ bukan titik belok. Ini menyarankan kita dalam menentukan titik belok langkah-langkah yang bisa dilakukan adalah : menentukan semua titik dimana $f''(x)=0$ atau $f''(x)$ tidak ada kemudian pada titik yang demikian, dilihat apakah dikiri kanan titik tersebut $f''(x)$ berbeda tanda.

CONTOH 2 :

Tentukan dimana fungsi-fungsi berikut naik, turun, cekung ke atas atau cekung ke bawah dan titik beloknya (jika ada)

a. $g(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ b. $f(x)=x+2\sin x$

Jawab :

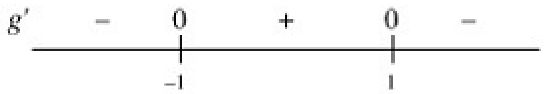
a. $g(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

Daerah asal g adalah himpunan bilangan riil :

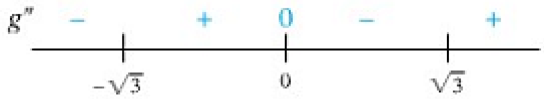
$$g'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(1+x^2)^2(-2x)-(1-x^2)(2)(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{(1+x^2)[(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)(4x)]}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ atau } x = 1$$



Jadi g naik pada selang (-1,1) dan turun pada selang $(-\infty,-1)$ dan $(1,\infty)$



Jadi g cekung ke atas pada selang $(-\sqrt{3},0)$ dan $(\sqrt{3},\infty)$ dan cekung ke bawah pada selang $(-\infty,-\sqrt{3})$ dan $(0,\sqrt{3})$

karena pada kiri -kanan $-\sqrt{3}$, 0 dan $\sqrt{3}$ terjadi perbedaan kecekungan maka $(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{4})$, $(0,0)$ dan $(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4})$ adalah titik belok

b. $f(x) = x + 2\sin x$ pada interval $[0,2\pi]$

$f'(x) = 1 + 2\cos x$ dan $f''(x) = -2\sin x$

$f'(x) = 1 + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$, pada selang $[0,2\pi]$ dipenuhi oleh $x = \frac{2\pi}{3}$ dan $x = \frac{4\pi}{3}$

+++++++++ - - - - - - - - --- ++++++++ f'

$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{4\pi}{3}$

Jadi f naik pada selang $\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$ dan $\left(\frac{4\pi}{3},2\pi\right)$ dan f turun pada selang $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$

$f''(x) = -2\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$, pada selang $[0,2\pi]$ dipenuhi oleh $x = 0$, $x = \pi$ dan $x = 2\pi$

+++++++++ - - - - - - - - --- f''

π

Jadi f cekung ke atas pada selang $(0,\pi)$ dan f cekung ke bawah pada selang $(\pi,0)$

13. Ekstrim Lokal dan Menggambar Grafik

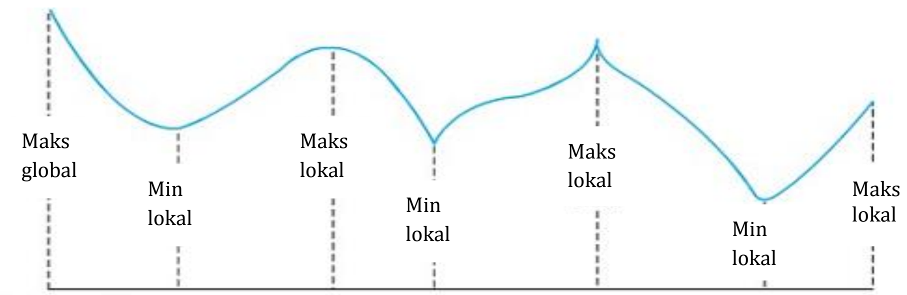
<u>Indikator Pencapaian Hasil Belajar</u>

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

1. Menentukan jenis ekstrim lokal dengan menggunakan uji turunan pertama ekstrim lokal
2. Menentukan jenis ekstrim lokal dengan menggunakan uji turunan kedua ekstrim lokal
3. Menggambar grafik fungsi dengan terlebih dahulu menentukan di mana fungsi naik, turun, cekung ke atas dan cekung ke bawah, titik ekstrim lokal, titik belok dan asimtot

Uji Ekstrim lokal

Terkadang kita tidak hanya tertarik pada nilai ekstrim dari suatu fungsi pada suatu interval, tapi juga pada nilai ekstrim di suatu lingkungan pada interval tersebut . Selain itu seperti yang telah pernah kita bicarakan pada interval yang bukan tutup, bisa jadi fungsi tidak mencapai nilai maksimum global atau minimum global tapi masih memiliki nilai maksimum atau minimum pada suatu lingkungan pada interval tersebut. Ini membawa kita pada istilah ekstrim global dan ekstrim lokal. Sebagai ilustrasi perhatikan gambar berikut :



Berikut adalah definisi formal dari pengertian maksimum lokal dan minimum lokal

Definisi :

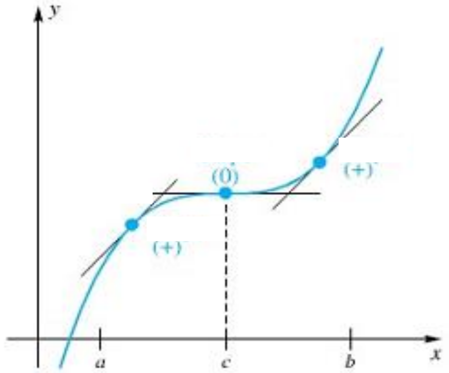
Misal S adalah daerah asal f dan $c \in S$. Kita katakan bahwa

(i) $f(c)$ nilai maksimum lokal f pada S jika terdapat selang buka I yang memuat c sedemikian sehingga $f(c) \geq f(x)$, $\forall x \in I \cap S$

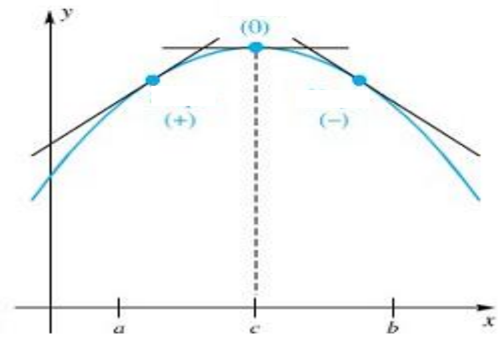
(ii) $f(c)$ nilai minimum lokal f pada S f pada S jika terdapat selang buka I yang memuat c sedemikian sehingga $f(c) \leq f(x)$, $\forall x \in I \cap S$

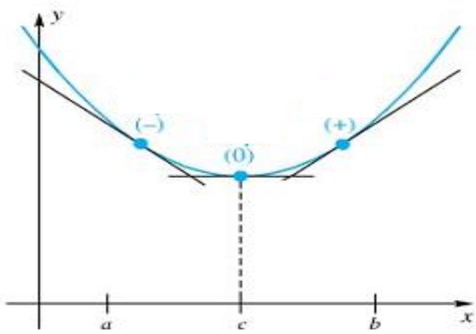
(iii) $f(c)$ nilai ekstrim lokal f pada S jika $f(c)$ nilai maksimum lokal atau nilai minimum lokal

Teorema titik kritis juga berlaku pada nilai ekstrim lokal , yakni nilai ekstrim lokal hanya dapat dicapai di titik-titik kritis . Jadi titik-titik kritis adalah calon di mana nilai ekstrim lokal muncul. Kita katakan calon, karena pada suatu titik kritis fungsi belum tentu mencapai nilai ekstrim. Sebagai ilustrasi dapat dilihat gambar berikut yang menunjukkan suatu titik stasioner belum tentu menjadi titik di mana nilai ekstrim dicapai



Gambar di bawah ini menyarankan kita untuk menggunakan nilai turunan pada interval di kiri dan kanan suatu titik esktrim untuk menentukan nilai maksimum lokal atau nilai minimum lokal





Teorema berikut tidak akan kita buktikan, tapi dari apa yang dibicarakan di atas secara intuisi kita bisa menerimanya .

Teorema :
(Uji Pertama Untuk Ekstrim Lokal)

Misal f *dapat didiferensialkan pada selang buka* (a,b) *yang memuat titik kritis* c

(i) Jika $f'(x) > 0$ *untuk semua* $x \in (a,c)$ *dan* $f'(x) < 0$ *untuk semua titik* $x \in (a,c)$ *maka* $f(c)$ *adalah nilai maksimum lokal*

(ii) Jika $f'(x) < 0$ *untuk semua* $x \in (a,c)$ *dan* $f'(x) > 0$ *untuk semua titik* $x \in (a,c)$ *maka* $f(c)$ *adalah nilai minimum lokal*

(iii) Jika $f'(x)$ *bertanda sama untuk kedua belah pihak, maka* $f(c)$ *bukan nilai ekstrim*

Terdapat uji ekstrim lokal yang lain yang bisa digunakan, tapi dalam uji ini titik yang diperiksa adalah titik stasioner dan yang ditinjau adalah turunan kedua fungsi pada titik tersebut

Teorema :
(Uji Kedua Untuk Ekstrim Lokal)
Misal f dan f' dapat didiferensialkan pada selang buka (a,b) yang memuat titik c dengan $f'(c)=0$
(i) Jika $f''(c)>0$ maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal
(ii) Jika $f''(c)<0$ maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal

Uji turunan kedua untuk ekstrim lokal ini mungkin lebih mudah digunakan tetapi di sisi lain uji ini juga mungkin gagal untuk memberikan kesimpulan , yakni jika $f''(x)=0$ pada titik stasioner.

CONTOH 1 :

Gunakan uji turunan pertama dan uji turunan kedua pada fungsi berikut untuk menentukan titik-titik kritis yang mana yang memberikan nilai maksimum dan minimum :

a. $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$ b. $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

Jawab :

a. $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$

Daerah asal f adalah $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

$f'(x)=2x+\dfrac{1}{x^2}$ dan $f''(x)=2-\dfrac{2}{x^3}$

$$f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \frac{2x^3+1}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=\left(-\frac{1}{2}\right)^{1/3}=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

- - - - - - - +++++++ ---------- f'

$-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 0

f turun pada selang $\left(-\infty,-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ dan f naik pada selang $\left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},0\right)$

Berdasar uji turunan pertama, f mencapai nilai minimum lokal pada $x=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$$f''\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=2-\frac{2}{\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3}=2+\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)}=6>0$$

Berdasar uji turunan kedua, f mencapai nilai minimum lokal pada $x=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

b. $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

Daerah asal f adalah $\Re \setminus \{x \mid x=k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\ldots\}$

$$f'(x)=\frac{(-\sin x)(1+\sin x)-\cos x(\cos x)}{1+\sin x}$$
$$=\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$
$$=\frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$
$$=-\frac{1}{1+\sin x}$$

$$f''(x)=\frac{1}{(1+\sin x)^2}D_x(1+\sin x)=\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

f' tidak terdefinisi pada $x=k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, di mana dan $f'(x)<0$ untuk semua $x\in\ \Re \setminus \{x \mid x=k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\ldots\}$

Jadi f tidak punya titik singular maupun titik stasioner, sehingga tidak memiliki nilai maksimum dan minimum lokal

Kita tidak bisa menggunakan uji turunan kedua karena $f'(x)\neq 0$ untuk setiap $x\in\ \Re \setminus \{x \mid x=k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\ldots\}$

Menggambar Grafik Fungsi

Cara yang paling sederhana untuk menggambar grafik fungsi adalah dengan menghubungkan titik-titik sedemikian sehingga kita mendapatkan gambaran umum tentang grafiknya. Mengetahui sumbu simetri juga membantu kita dalam menggambar grafik. Tetapi informasi tersebut seringkali belum cukup untuk mendapatkan suatu gambar yang benar-benar akurat.

Kalkulus menyediakan alat yang bisa digunakan untuk menganalisa struktur grafik, terutama mengidentifikasi tempat-tempat dimana perilaku grafik berubah. Kita dapat menentukan lokasi titik maksimum lokal,mimimum lokal, titik belok. Kita juga dapat menentukan pada interval mana fungsi naik atau turun, di mana cekung ke atas atau ke bawah. Selain turunan , kita juga memanfaatkan limit tak hingga dan limit di ketak hinggaan. Terkait dengan ini kita mengenal istilah asimtot tegak, asimtot datar dan asimtot miring seperti berikut ini

Definisi

Garis $x = c$ dikatakan asimtot tegak dari kurva $y = f(x)$ jika paling sedikit satu dari pernyataan berikut benar :

(i) $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \infty$

(ii) $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \infty$

(iii) $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = -\infty$

(iv) $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = -\infty$

Definisi

Garis $y = b$ dikatakan asimtot datar dari kurva $y = f(x)$ jika syarat berikut dipenuhi

1. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ *atau* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

2. Setelah batas tertentu grafik fungsi f tidak memotong lagi garis $y = b$

Definisi

Garis $y = mx + c$ dikatakan asimtot miring dari kurva $y = f(x)$ jika syarat berikut dipenuhi

1. $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (mx + c)] = 0$ *atau* $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + c)] = 0$

2. Setelah batas tertentu grafik fungsi f tidak memotong lagi gais $y = mx + c$

CONTOH 2 :

Buat sketsa grafik berikut : a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ b. $F(x) = \dfrac{\sqrt{x}(x-5)^2}{4}$

Jawab :

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

Daerah asal f adalah $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

$$f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2} \qquad f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ atau $x = 4$, maka 0 dan 4 adalah titik stasioner

$$\begin{array}{c} ++++++\;\bullet\; ------- \circ ------ \;\bullet\; ++++++ \quad f' \\ 0 \qquad\qquad 2 \qquad\qquad 4 \end{array}$$

f naik pada selang selang $(-\infty,0)$ dan $(4,\infty)$

f turun pada selang selang $(0,2)$ dan $(2,4)$

$f''(x)=\dfrac{8}{(x-2)^3}\neq 0$, untuk setiap x di daerah asal

$$\begin{array}{c} ------- \;------ \circ +++++++++++++ \quad f'' \\ 0 \end{array}$$

f cekung ke bawah pada selang $(-\infty,0)$, cekung ke atas pada selang $(0,\infty)$ dan tidak memiliki titik belok

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-2x+4}{x-2}=-\infty \qquad \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-2x+4}{x-2}=\infty$$

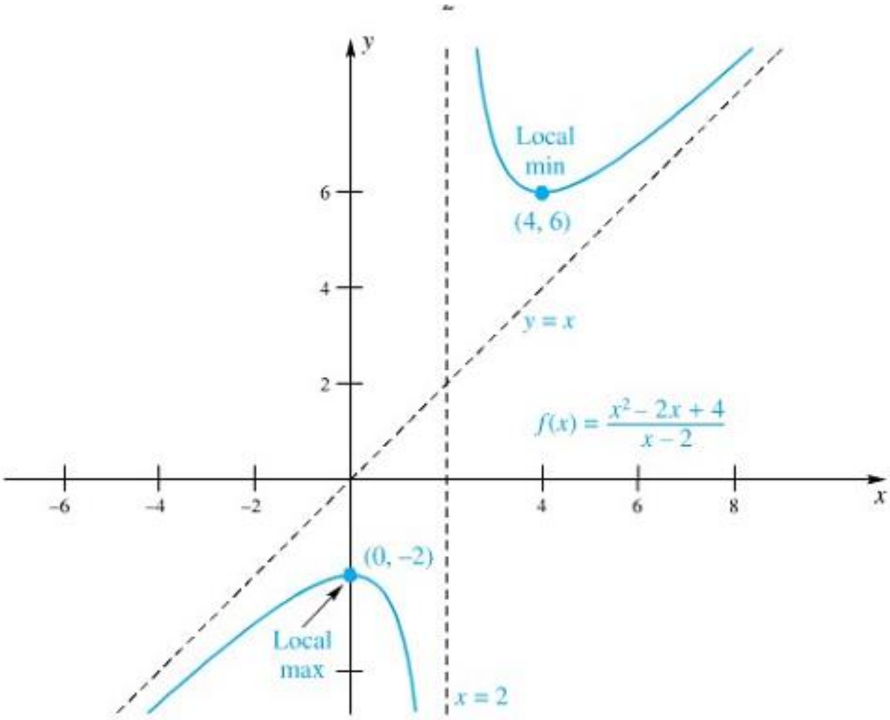
Jadi f memiliki asimtot tegak di $x=2$

$$f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x-2}=x+\frac{4}{x-2}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)-x=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x-2}=0$$

Jadi f memiliki asimtot miring garis $y=x$

Selanjutnya grafik fungsi f dapat disajikan seperti berikut :



b. $F(x) = \dfrac{\sqrt{x}(x-5)^2}{4}$

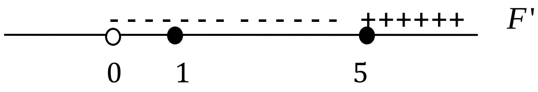
Daearah asal F adalah $[0,\infty)$

$$F'(x) = \frac{5(x-1)(x-5)}{8\sqrt{x}}, \qquad x > 0$$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ dan $x = 5$

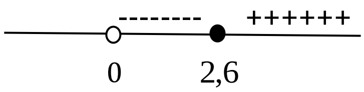
$F'(x)$ tidak terdefinisi pada $x = 0$

Jadi $x = 1$ dan $x = 5$ adalah titik stasioner dan $x = 0$ adalah titik singular



$$F''(x) = \frac{5(3x^2 - 6x - 5)}{16x^{3/2}}, \qquad x > 0$$

Pada $x > 0$, $F''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 + \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \approx 2{,}6$



F cekung ke bawah pada selang $(0,\ 2{,}6)$, cekung ke atas pada selang $(2{,}6, \infty)$ dan titik $(2{,}6\,,\, 2{,}3)$ adalah titik belok

Selanjutnya grafik fungsi F dapat disajikan seperti berikut :