PARTISI HIMPUNAN

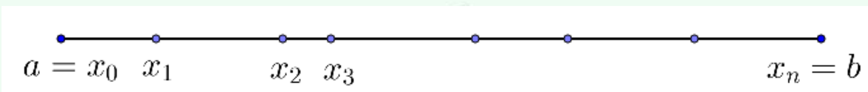
Oleh:
Dr. RIYADI, M.Si.

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SEBELAS MARET

Partisi Himpunan

Definisi 1

Misal $[a,b]$ interval tertutup dan terbatas di dalam **R**, himpunan terurut dan berhingga $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ sehingga $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ disebut partisi pada $[a,b]$.



Titik-titik pada partisi P dapat digunakan untuk membagi interval $[a,b]$ ke dalam interval-interval bagian yang tidak saling tumpang tindih (*non overlapping sub intervals*):

$[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, . . . , $[x_{n-1}, x_n]$

Partisi Himpunan

Perhatikan bahwa interval-interval bagian mempunyai panjang secara berturut-turut:

$\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, . . . , $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$

Contoh 1

Misal $[0,1]$ interval tertutup dan terbatas di dalam **R**, dan himpunan-himpunan

$P_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$, $P_2 = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ dan $P_3 = \left\{0, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, 1\right\}$

adalah contoh-contoh partisi pada $[0,1]$.

Partisi Himpunan

Definisi 2

Misal $[a,b]$ interval tertutup dan terbatas di dalam **R**, dan $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ partisi pada $[a,b]$.

Pada partisi P didefinisikan bilangan $\|P\| = \text{maks}\ \{x_k - x_{k-1} : k = 1,2,\cdots,n\}$ yang disebut norma dari partisi P.

Contoh 2

Misal $[0,1]$ interval tertutup dan terbatas di dalam **R**, dan $P_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$,

dan $P_2 = \left\{0, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, 1\right\}$ adalah beberapa contoh partisi pada $[0,1]$.

Norma-norma dari P_1 dan P_2, secara berturut-turut adalah:

Partisi Himpunan

$$\|P_1\| = \text{maks}\left\{\frac{1}{3}-0, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}, \quad \text{dan}$$

$$\|P_2\| = \text{maks}\left\{\frac{2}{5}-0, \frac{3}{4}-\frac{2}{5}, \frac{5}{6}-\frac{3}{4}, \frac{11}{12}-\frac{5}{6}, 1-\frac{11}{12}\right\} = \frac{2}{5}.$$

Berdasarkan Contoh 2, nampak bahwa jika partisinya berbeda maka normanya pun pada umumnya berbeda.

Definisi 3 (Partisi Penghalus)

Misal $[a,b]$ interval tertutup dan terbatas, dan P dan Q masing-masing merupakan partisi pada $[a,b]$.

Partisi Q disebut **penghalus** (***refinement***) dari partisi P pada $[a, b]$ jika $P \subseteq Q$.

Partisi Himpunan

Contoh 3

Misal $[0,1]$ interval tertutup dan terbatas di dalam **R**, dan himpunan-himpunan $P_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$, $P_2 = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$, dan $P_3 = \left\{0, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, 1\right\}$ adalah contoh-contoh partisi pada $[0,1]$.

Partisi P_2 merupakan penghalus dari partisi P_1 sebab $P_1 \subseteq P_2$, tetapi P_3 bukan penghalus dari P_1 sebab $P_1 \not\subset P_3$.

Untuk suatu interval tertutup dan terbatas $[a,b]$, terdapat tak berhingga banyak partisi yang dapat dibuat.

Koleksi semua partisi pada interval tertutup dan terbatas $[a,b]$ dinotasikan dengan $\mathcal{P}[a,b]$.

Partisi Himpunan

Teorema 1

Jika $[a,b]$ interval tertutup dan terbatas dan P, $Q \in \mathcal{P}[a,b]$ dengan partisi Q penghalus dari partisi P, maka $\|Q\| \le \|P\|$.

Bukti:

Misal $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n = b\}$ partisi pada $[a,b]$, maka norma dari P adalah $\|P\| = \text{maks } \{ x_i - x_{i-1} : i = 1,2,\cdots,n\}$.

Menurut yang diketahui Q merupakan partisi penghalus dari P atau $P \subseteq Q$, maka Q dapat ditulis sebagai berikut:

$Q =$

$$\{a = x_0 = x_{10}, x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1k_1}, x_1 = x_{20}, x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2k_2}, \cdots, x_{n-1} = x_{n0}, x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{nk_n}, x_n = b\}$$

Partisi Himpunan

Oleh karena itu diperoleh:

$\|Q\| = \text{maks}$

$$\left\{ \{ x_{ij} - x_{i(j-1)} : i = 1,2,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots,k_i \} \cup \{ x_i - x_{ik_i} : i = 1,2,\cdots,n \} \right\}$$

Jelas bahwa $x_{ij} - x_{i(j-1)} \le x_i - x_{i-1}$ untuk setiap $i = 1,2,\cdots,n$; $j = 1,2,\cdots,k_i$ dan $x_i - x_{ik_i} \le x_i - x_{i-1}$ untuk setiap $i = 1,2,\cdots,n$.

Oleh karena itu diperoleh:

$\|Q\| = \text{maks}$

$$\left\{ \{ x_{ij} - x_{i(j-1)} : i = 1,2,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots,k_i \} \cup \{ x_i - x_{ik_i} : i = 1,2,\cdots,n \} \right\}$$

$$\le \text{ maks } \{x_i - x_{i-1} : i = 1,2,\cdots,n\} = \|P\|.$$

Jadi terbukti bahwa $\|Q\| \le \|P\|$.

Partisi Himpunan

Teorema 2

Misal $[a,b]$ suatu interval tertutup dan terbatas $[a,b]$, dan $\mathcal{P}[a,b]$ menyatakan koleksi semua partisi pada $[a,b]$.

Jika P_1, $P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$, maka $P_1 \cup P_2$ merupakan penghalus dari P_1 dan P_2.

Teorema 3

Jika $[a,b]$ suatu interval tertutup dan terbatas, maka untuk setiap bilangan $\delta > 0$ terdapat partisi P pada $[a,b]$ sehingga $\|P\| < \delta$.

Bukti:

Diberikan $[a,b]$ suatu interval tertutup dan terbatas dan bilangan $\delta > 0$.

Partisi Himpunan

Karena $a < b$, maka $b - a > 0$, oleh karena itu menurut sifat Archimides terdapat bilangan asli n sehingga $\frac{b-a}{n} < \delta$.

Selanjutnya dibuat partisi $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n = b\}$ pada $[a,b]$ dengan sifat untuk setiap interval bagian $[x_{k-1}, x_k]$ berlaku $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ untuk setiap $k = 1,2,\cdots,n$.

Oleh karena itu diperoleh $\|P\|$ = maks $\{x_k - x_{k-1} : k = 1,2,\cdots,n\} = \frac{b-a}{n} < \delta$.


TERIMA KASIH