

# Aplikasi Persamaan Diferensial Ordiner (PDO)

Tika Paramitha, S.T., M.T.



**Program Studi Teknik Kimia**

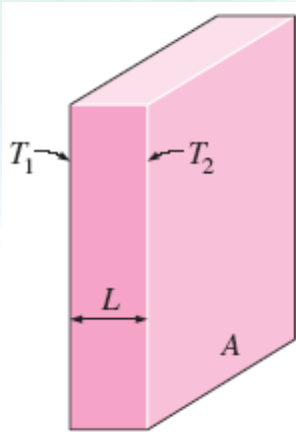
**Fakultas Teknik Universitas Sebelas Maret 2019**

## PDO ORDER 1 DISELESAIKAN DENGAN *SEPARATION OF VARIABLE*



**Contoh 1.** Perpindahan panas konduksi *steady state* pada dinding datar.

Ditinjau: Permukaan bagian dalam dinding bersuhu  $T_1$ . Suhu di permukaan luar dinding dijaga  $T_2$ . Nilai  $T_1$  lebih besar daripada  $T_2$ , sehingga terjadi perpindahan panas. Jika tebal dinding =  $L$  dan koefisien perpindahan panas dinding (konduktivitas bahan dinding) =  $k$ . Berapa panas yang ditransfer pada dinding itu?



## Penyelesaian

$T_1 > T_2$ , sehingga panas berpindah dari  $T_1$  ke  $T_2$ .

**Tahap 1** : Penentuan kondisi batas

$$x = 0 ; T = T_1$$

$$x = L ; T = T_2$$

**Tahap 2** : Rumus perpindahan panas secara konduksi

Hukum Fourier

$$q = -k A \frac{dT}{dx}$$

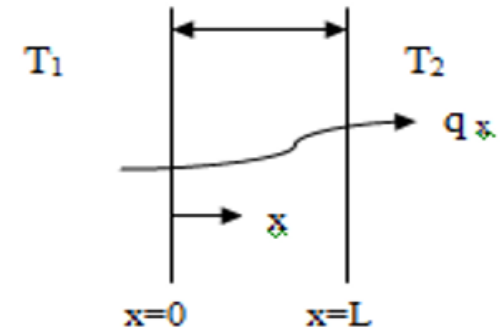
$q$  : panas yang ditransfer (Btu/jam)

$k$  : konduktivitas media perpindahan panas (Btu/jam.°F.ft)

$A$  : luas permukaan perpindahan panas (ft<sup>2</sup>)

$T$  : suhu (°F)

$x$  : panjang media perpindahan panas (ft)



**Tahap 3** : Masukkan luas perpindahan panas

A = luas perpindahan panas yang tegak lurus dengan arah perpindahan panas.

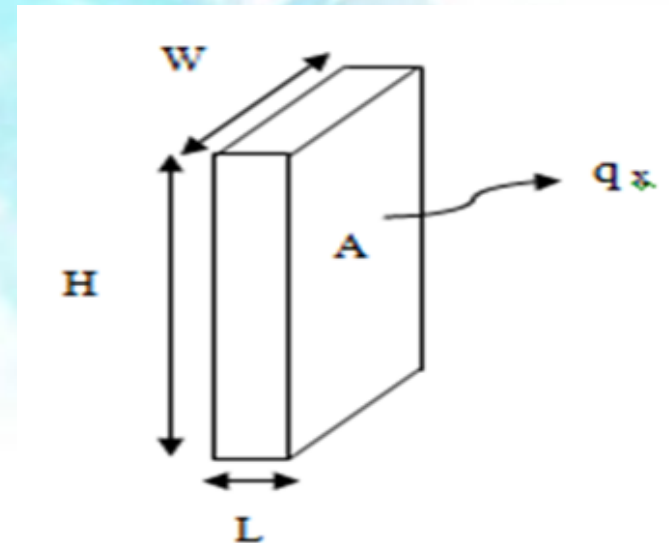
Luas permukaan perpindahan panas = luas persegi panjang.

Luas ini fungsi dari panjang perpindahan panas atau  $A = f(x)$ .

$$A = W H$$

$$q = -k A \frac{dT}{dx}$$

$$q = -k W H \frac{dT}{dx}$$



#### Tahap 4 : Penyelesaian dengan PDO

$$q = -k W H \frac{dT}{dx}$$

$$q dx = -k W H dT$$

masukkan kondisi batas.

$$q \int_{x=0}^{x=L} dx = -k W H \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$q(x) \Big|_0^L = -k W H(T) \Big|_{T_1}^{T_2}$$

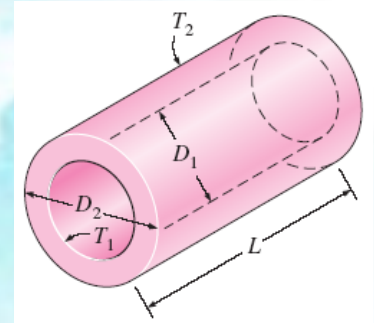
$$q(L - 0) = -k W H(T_2 - T_1)$$

$$q = -\frac{k W H}{L} (T_2 - T_1)$$

$$q = \frac{k W H}{L} (T_1 - T_2)$$

## PDO ORDER 1 DISELESAIKAN DENGAN *SEPARATION OF VARIABLE*

**Contoh 2.** Di banyak proses industri, panas ditransfer melalui dinding pipa dengan ketebalan tertentu ( $r_2 - r_1$ ) dan panjang pipa  $L$  (pipa ~ silinder). Suhu di permukaan dalam pipa adalah  $T_1$ . Suhu di permukaan luar pipa adalah  $T_2$ . Konduktivitas pipa adalah  $k$ . Berapa panas yang ditransfer?



## Penyelesaian

$T_1 > T_2$ , sehingga panas berpindah dari  $T_1$  ke  $T_2$ .

**Tahap 1** : Penentuan kondisi batas

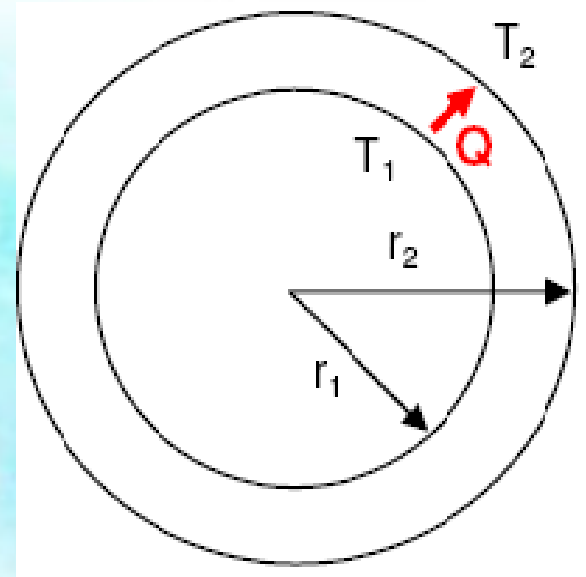
$$r = r_1 ; T = T_1$$

$$r = r_2 ; T = T_2$$

**Tahap 2** : Rumus perpindahan panas secara konduksi

Hukum Fourier

$$q = -k A \frac{dT}{dr}$$



**Tahap 3** : Masukkan luas perpindahan panas

$A$  = luas perpindahan panas yang tegak lurus dengan arah perpindahan panas.

Luas permukaan perpindahan panas = luas selimut silinder.

Luas ini fungsi dari jari-jari atau  $A = f(r)$ .

Artinya jika  $r$  berubah, maka luas permukaan juga berubah :

$$A = 2 \pi r L$$

$$q = -k 2 \pi r L \frac{dT}{dr}$$



#### Tahap 4 : Penyelesaian dengan PDO

$$q = -k 2 \pi r L \frac{dT}{dr}$$

$$q \frac{1}{r} dr = -k 2 \pi L dT$$

masukkan kondisi batas.

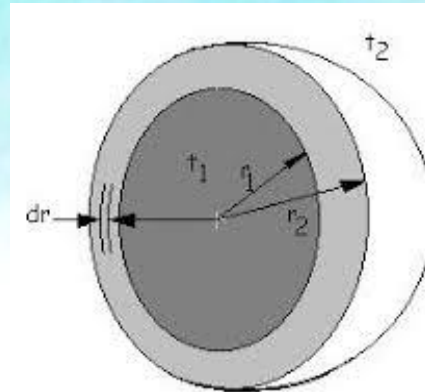
$$\int_{r=r_1}^{r=r_2} q \cdot \frac{1}{r} dr = \int_{T=T_1}^{T=T_2} -2 \pi L k dT$$

$$q (\ln r_2 - \ln r_1) = -2\pi L k (T_2 - T_1)$$

$$q = k \frac{2\pi L}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (T_1 - T_2)$$

## PDO ORDER 1 DISELESAIKAN DENGAN *SEPARATION OF VARIABLE*

**Contoh 3.** Suatu tangki bola seperti skema di bawah. Bagaimana kecepatan perpindahan panas di dinding tangki?



## Penyelesaian

$T_1 > T_2$ , sehingga panas berpindah dari  $T_1$  ke  $T_2$ .

**Tahap 1** : Penentuan kondisi batas

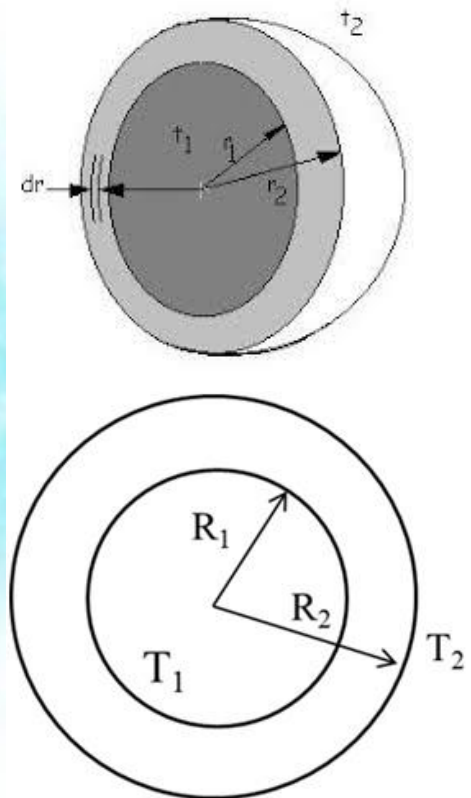
$r = r_1 ; T = T_1$

$r = r_2 ; T = T_2$

**Tahap 2** : Rumus perpindahan panas secara konduksi

Hukum Fourier

$$q = -k A \frac{dT}{dr}$$



**Tahap 3** : Masukkan luas perpindahan panas

$A$  = luas perpindahan panas yang tegak lurus dengan arah perpindahan panas.

Luas permukaan perpindahan panas = luas permukaan bola.

Luas ini fungsi dari jari-jari atau  $A = f(r)$ .

Artinya jika  $r$  berubah, maka luas permukaan juga berubah :

$$A = 4 \pi r^2$$

$$q = -k A \frac{dT}{dr}$$

$$q = -k 4 \pi r^2 \frac{dT}{dr}$$

#### Tahap 4 : Penyelesaian dengan PDO

$$q = -k 4 \pi r^2 \frac{dT}{dr}$$

$$q \frac{dr}{r^2} = -k 4 \pi dT$$

masukkan kondisi batas.

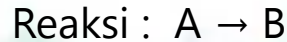
$$q \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -4 k \pi \int_{T_1}^{T_2} dT$$
$$q \int_{r_1}^{r_2} \left( -\frac{1}{r} \right) = -4 k \pi \int_{T_1}^{T_2} (T)$$

$$q \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = -4 k \pi (T_2 - T_1)$$
$$q = \frac{4k\pi(T_1 - T_2)}{\left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

Bidang	q
Datar (plane)	$q = \frac{kWH}{L} (T_1 - T_2)$
Silinder	$q = k \frac{2\pi L}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (T_1 - T_2)$
Bola	$q = \frac{4k\pi(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$

## PDO ORDER 1 DISELESAIKAN DENGAN *SEPARATION OF VARIABLE*

**Contoh 4.** Reaksi dijalankan dalam reaktor batch dengan volume tetap.



Mula-mula (saat  $t=0$ ), reaktor hanya berisi A dengan konsentrasi  $C_{A0}$  (mol A/L).

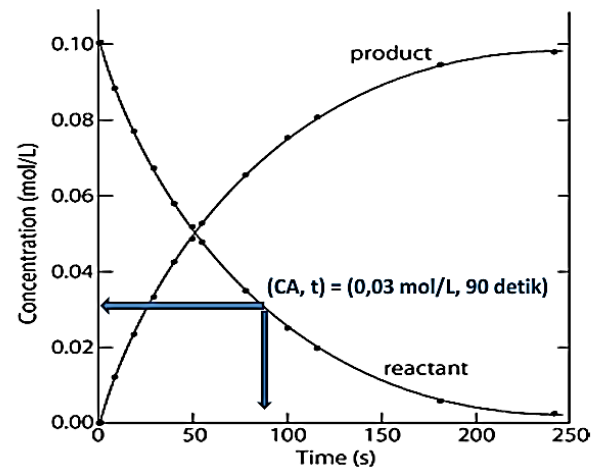
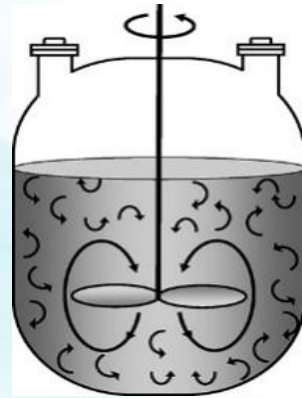
Bahan A (reaktan) berkurang karena bereaksi membentuk B. Kecepatan reaksi (pengurangan) A:

$$-r_A = k C_A$$

Satuan  $r_A$  adalah mol A yang bereaksi per satuan volum per satuan waktu.

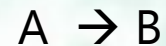
Ingin dicari hubungan:

- konsentrasi A sebagai fungsi waktu reaksi ( $t$ ).
- konversi A sebagai fungsi waktu reaksi ( $t$ ).



## Penyelesaian

**Tahap 1** : Skema proses :



Kecepatan pengurangan A :

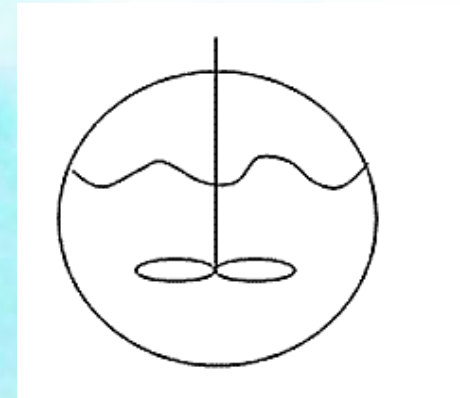
$$-r_A = k C_A$$

Kondisi batas :

$$t = 0; C_A = C_{A0}$$

$$t = t; C_A = C_A$$

Dicari  $C_A = f(t)$  dan  $X_A = f(t)$  ?





**Tahap 2** : Penyusunan PD atau hubungan konsentrasi A terhadap waktu reaksi dalam reaktor *batch*.

Neraca massa A di dalam reaktor

(mol A masuk ke reaktor) – (mol A keluar dari reaktor) - (mol A yang bereaksi) =  
(mol A yang terakumulasi dalam reaktor)

$$0 - 0 - (-r_A) V = \frac{d}{dt} (C_A V)$$

Volum tetap, sehingga:

$$\frac{dC_A}{dt} = -k C_A$$

### Tahap 3 : Penyelesaian persamaan diferensial

$$\frac{dC_A}{dt} = -k C_A$$

$$\frac{dC_A}{C_A} = -k dt$$

$$\ln C_A = -k t + c$$

Nilai c dievaluasi menggunakan kondisi batas. Substitusi pada  $t=0$  nilai  $C_A=C_{A0}$ .

$$\ln C_{A0} = -k \cdot 0 + c$$

$$c = \ln C_{A0}$$

**Maka hubungan  $C_A$  dengan waktu reaksi :**

$$\ln C_A = \ln C_{A0} - kt$$

#### Tahap 4 : Penyusunan hubungan konversi A terhadap waktu reaksi

Hubungan konsentrasi  $C_A$  dan konversi:

$$x_A = \frac{A_{\text{bereaksi}}}{A_{\text{mula-mula}}} = \frac{C_{A0} - C_A}{C_{A0}}$$

$$x_A \cdot C_{A0} = C_{A0} - C_A$$

$$C_A = C_{A0} - C_{A0} \cdot x_A$$

$$C_A = C_{A0}(1 - x_A)$$

Diferensialkan:

$$dC_A = d(C_{A0}(1 - x_A))$$

$$dC_A = C_{A0}(-dx_A)$$

$$dC_A = -C_{A0} dx_A$$

Substitusi ke persamaan kecepatan reaksi A:

$$\frac{dC_A}{dt} = -k C_A$$

$$C_{A0} \frac{dx_A}{dt} = k C_{A0}(1 - x_A)$$

**Tahap 5** : Pemisahan variabel

$$C_{A0} \frac{dx_A}{dt} = k C_{A0} (1 - x_A)$$

$$\frac{dx_A}{(1 - x_A)} = k dt$$

Penyelesaian dengan pemisahan variabel.

## Tahap 6 : Penyelesaian dengan integrasi

$$\int \frac{dx_A}{(1 - x_A)} = k \int dt$$

$$-\ln(1 - x_A) = k t + c_2$$

Evaluasi  $c_2$  dengan kondisi batas. Pada saat mula-mula ( $t=0$ ), konsentrasi  $A = C_{A0}$  dan  $x_A = 0$ . Evaluasi  $c_2$ :

$$-\ln(1 - 0) = k \cdot 0 + c_2$$

$$c_2 = 0$$

Maka hubungan konversi A dengan waktu reaksi:

$$-\ln(1 - x_A) = k t$$

$$(1 - x_A) = \exp(-k t)$$

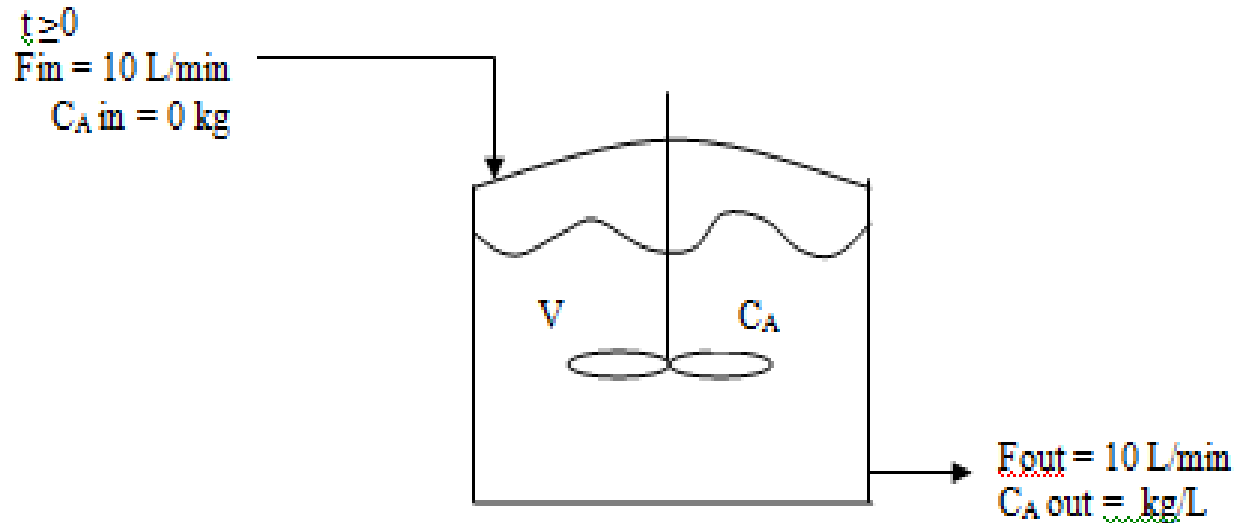
$$x_A = 1 - \exp(-k t)$$

## PDO ORDER 1 DISELESAIKAN DENGAN *SEPARATION OF VARIABLE*

**Contoh 5.** Suatu tangki berpengaduk kapasitas 1000 L dengan 15 kg A garam terlarut. Air murni masuk ke dalam tangki dengan laju 10 L/min. Berapakah konsentrasi A dalam tangki setelah 't' menit? Berapakah konsentrasi A dalam tangki setelah 60 menit? Berapakah konsentrasi A dalam tangki setelah pengadukan yang sangat lama?

## Penyelesaian

Tahap 1 : Skema proses :



Kondisi batas :

$$t = 0; C_A = C_{A0} \approx \frac{\text{gram A}}{\text{Volume larutan}} = \frac{15 \text{ kg A}}{1000 \text{ L}}$$

Tangki berpengaduk, sehingga dapat diasumsikan konsentrasi garam dalam tangki seragam dan konsentrasi garam yang keluar tangki ( $C_{A \text{ out}}$ ) sama dengan konsentrasi garam di dalam tangki ( $C_A$ ).

Dicari  $C_A = f(t)$  ?

**Tahap 2** : Penyusunan hubungan  $C_A$  dengan  $t$

Neraca massa garam A di dalam tangki :

(kec. A masuk tangki) – (kec. A keluar tangki) = (Perubahan massa A dlm tangki)

$$C_{Ain} \cdot F_{in} - C_A \cdot F_{out} = \frac{d}{dt}(C_A \cdot V)$$

$$\frac{d}{dt}(C_A \cdot V) = 0 - C_A \cdot F_{out}$$

$V \neq f(t)$  volume larutan dalam tangki dijaga konstan.

$$V \frac{dC_A}{dt} = -C_A \cdot F_{out}$$

$$1000 \frac{dC_A}{dt} = -C_A \cdot 10$$

$$\frac{dC_A}{C_A} = -\frac{1}{100} dt$$



**Tahap 3** : Penyelesaian dengan integrasi

$$\frac{dC_A}{C_A} = -\frac{1}{100} dt$$

$$\ln C_A = -\frac{1}{100} t + c$$

#### Tahap 4 : Menentukan konstanta c

$t = 0$  ;  $C_A$  = Konsentrasi A dalam tangki pada  $t = 0$

$$C_A = C_{A0} = \frac{15 \text{ Kg}}{1000 \text{ L}}$$

Substitusi:

$$\ln C_{A0} = -0 + c$$

$$c = \ln C_{A0} = \ln \frac{15}{1000}$$

Maka hubungan  $C_A$  dengan (t) :

$$\ln C_A = -\frac{1}{100}t + \ln \frac{15}{1000}$$

$$\ln \left( \frac{C_A}{\frac{15}{1000}} \right) = -\frac{t}{100}$$

$$\frac{C_A}{\frac{15}{1000}} = \exp \left( -\frac{t}{100} \right)$$

$$C_A = C_{A0} \exp \left( -\frac{t}{100} \right)$$

**Tahap 5** : Hubungan  $C_A$  dengan  $t$  tertentu

Setelah 1 jam = 60 menit :

$$C_A = C_{A0} \exp\left(-\frac{60}{100}\right) = \dots???$$

Setelah waktu yang lama sekali =  $t = \infty$

$$C_A = C_{A0} \exp\left(-\frac{\infty}{100}\right) = 0$$