MPF1204, FISIKA KUANTUM (3 SKS)
Program Studi S2 Pendidikan Fisika

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS SEBELAS MARET (UNS)
SURAKARTA

e Learning :

Review : FUNGSI GELOMBANG, OPERATOR, KOMUTATOR, DAN PERS. GERAK HEISENBERG

Pertemuan ke-10 : Juma’t, 1 Mei 2020 TM online Pk. 13.00 – 14.00 wib

DR. Suharno, M.Si

1. Fungsi Gelombang

Untuk fungsi gelombang partikel yang tidak bergantung waktu, ψ(x),

$|\psi(x)|^2 dx$ disebut peluang menemukan partikel di antara x dan x+dx.

$|\psi(x)|^2$ rapat peluang partikel berada di x

Total peluang untuk menemukan partikel itu disepanjang sumbu-x adalah:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\,dx = 1$$ ψ^* adalah konjugasi dari ψ.

Fungsi ψ(x) yang memenuhi persamaan di atas disebut fungsi yang dinormalisasi, sedangkan disebut rapat peluang.

Fungsi Gelombang…

Contoh: $\psi(x) = C\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^{2}\,dx = C^{2}\int_{0}^{L}\sin^{2}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = 1$$

$\sin^2\theta=(1-\cos 2\theta)/2$, maka hasil integral di atas adalah $C^2(L/2)=1$ sehingga $C=\sqrt{2/L}$

Jadi secara lengkap fungsi yang dinormalisasi adalah

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Jika $\psi(x)$ adalah kombinasi linier dari sekumpulan fungsi-fungsi $\{\varphi_n(x)\}$, maka penulisannya secara umum adalah seperti:

$$\psi(x) = \sum_{n} c_n\varphi_n(x)$$

c_n adalah koefisien bagi fungsi $\varphi_n(x)$ yang bisa ril atau kompleks.

$$c_m = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m^{*}(x)\psi(x)\,dx$$

Jika $\varphi_n(X)$ adalah fungsi-fungsi yang dinormalisasi dan ortogonal satu sama lain.

Fungsi Gelombang…

Jika fungsi-fungsi $\{\varphi_n(x)\}$ selain ternormalisasi juga ortogonal (disebut ortonormal) satu sama lain maka berlaku

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m^*(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \delta_{mn} \begin{cases} =1; & m=n \\ =0; & \text{lainnya} \end{cases}$$

δ disebut kronecker delta

Jika $\psi(x)$ fungsi yang dinormalisasi, maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = 1 \longrightarrow \sum_{m,n} c_m^* c_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m^*(x)\varphi_n(x)dx = 1 \longrightarrow \sum_{m,n} c_m^* c_n \delta_{mn} = 1$$

Jadi, $\sum_n c_n^* c_n = 1$

Untuk memudahkan penulisan, fungsi-fungsi dituliskan dalam ket seperti $|\varphi_n\rangle$ dan konjugasinya dalam bra seperti $\langle\varphi_n|$

Integral overlap dituliskan seperti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^*(x)\,\varphi_l(x)\,dx = \langle\varphi_k|\varphi_l\rangle$$

Fungsi Gelombang…

<u>Ortogonalisasi Schmidt</u>

Andaikan ϕ_1 dan ϕ_2 adalah fungsi-fungsi yang non-ortogonal satu terhadap lainnya.

Misalkan $\varphi_1=\phi_1$, lalu pilih $\varphi_2=\phi_2+\alpha\phi_1$. Besarnya α dihitung atas dasar φ_1 dan φ_2 yang ortogonal satu sama lain.

$$\int \varphi_1^* \varphi_2 \, dx = \int \phi_1^* \phi_2 \, dx + \alpha \int \phi_1^* \phi_1 \, dx = 0$$

$$\alpha = -\frac{\int \phi_1^* \phi_2 \, dx}{\int \phi_1^* \phi_1 \, dx}$$

2. Operator Fisis

Setiap besaran fisis suatu partikel dikaitkan dengan operatornya; misalnya operator bagi energi total adalah $\hat{H}$ seperti diperlihat dalam persamaan:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$$

Operator energi potensial

Operator energi kinetik

Bagi suatu operator besaran fisis berlaku istilah matematik berikut:

1. Harga suatu besaran fisis adalah *nilai eigen* dari *operatornya*;
2. Setiap *nilai eigen* dari suatu *operator* berkaitan dengan suatu *fungsi eigen*; nilai eigen adalah ril.

Operator Fisis…

Persamaan harga eigen:

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$$

fungsi eigen partikel

nilai eigen; energi partikel

operator energi total; disebut hamiltonian partikel

3. Secara umum harga rata-rata suatu besaran fisis pada fungsi keadaannya memenuhi persamaan

operator besaran fisis

$$A_{av} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\hat{A}\psi(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)\,dx}$$

fungsi keadaan partikel

harga rata-rata besaran fisis

3. Operator Momentum

Menurut de Broglie, sebuah partikel yang bergerak sepanjang sumbu-x mempunyai momentum linier $p_x = \hbar k$ dengan $k = 2\pi/\lambda$. Fungsi gelombang partikel itu adalah .

$$\varphi(x) = ae^{ikx}$$

Bagaimanakah bentuk operator momentum yang memiliki harga eigen $p_x = \hbar k$?
Untuk itu berlaku persamaan nilai eigen:

$$\hat{p}_x \varphi(x) = \hbar k \, \varphi(x)$$

Operator Momentum…

$$\varphi(x) = ae^{ikx} \longrightarrow \hbar k\varphi(x) = -i\hbar\frac{d\varphi(x)}{dx}$$

$$\hat{p}_x\varphi(x) = \left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)$$

Jadi operator momentum linier adalah:

$$\hat{p}_x \equiv -i\hbar\frac{d}{dx}$$

Ingat, energi kinetik:

Secara umum, operator momentum:

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla$$

$$\hat{K} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$$

4. Komutator

Tinjau dua buah operator: $\hat{A}$ dan $\hat{B}$

Jika keduanya merupakan operator besaran fisis maka didefinisikan komutatornya seperti

$$[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Jika $[\,\hat{A}\,,\,\hat{B}\,] = 0 \longrightarrow$ Kedua operator disebut komut.

Contoh, tentukan komutator operator-operator *x* dan *d/dx* ! Gunakan fungsi $\varphi(x)$ sebagai alat bantu:

$$\begin{aligned}[x,\frac{d}{dx}]\varphi(x) &= x[\frac{d\varphi(x)}{dx}] - \frac{d}{dx}[x\varphi(x)] \\ &= x\frac{d\varphi(x)}{dx} - \varphi(x) - x\frac{d\varphi(x)}{dx} \\ &= -\varphi(x)\end{aligned}$$

Jadi: $\left[x,\frac{d}{dx}\right] = -1$ Buktikan: $\left[\frac{d}{dx},x\right] = 1$

4. Persamaan gerak Heisenberg

Secara umum jika A_{av} adalah harga rata-rata operator $\hat{A}$ besaran fisis dengan fungsi gelombang $\psi(x,t)$ maka:

$$A_{av} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)\,\hat{A}\psi(x,t)\,dx$$

Variasi harga rata-rata itu terhadap waktu adalah

$$\frac{dA_{av}}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi^* \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\psi + \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\hat{A}\psi + \psi^* \hat{A}\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dx$$

Mengingat: $\hat{H}\psi(x) = i\hbar \dfrac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$ dan $\left[\hat{H}\psi(x)\right]^* = -i\hbar \dfrac{\partial \psi^*(x,t)}{\partial t}$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\hat{A}\psi + \psi^*\hat{A}\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar}\psi^*\hat{H}\hat{A}\psi + \frac{1}{i\hbar}\psi^*\hat{A}\hat{H}\psi = \frac{1}{i\hbar}\psi^*\left[\hat{A}\hat{H} - \hat{H}\hat{A}\right]\psi = \frac{1}{i\hbar}\psi^*\left[\hat{A},\hat{H}\right]\psi$$

maka $$\frac{dA_{av}}{dt} = \int \psi^* \left(\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{A},\hat{H}] \right) \psi\, dx$$

Persamaan gerak Heisenberg…

Jadi, $\frac{dA_{av}}{dt} = \int \psi^* \frac{d\hat{A}}{dt} \psi \, dx$ dengan $\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}, \hat{H}\right]$

Persamaan gerak Heisenberg

$\frac{d\hat{A}}{dt}$ Operator turunan dari $\hat{A}$

$\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$ Turunan dari $\hat{A}$

Jika operator $\hat{A}$ komut dengan $\hat{H}$, maka $\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$

Jika operator $\hat{A}$ selain komut dengan $\hat{H}$, juga tak bergantung waktu: $\frac{d\hat{A}}{dt} = 0$

Besaran fisis seperti itu disebut tetapan gerak dari partikel (kekal dalam pengertian klasik).

Latihan soal: Review (di kertas),

1. Penyelesaian persamaan Schrodinger tak gayut waktu dari suatu sistem tertentu adalah: $\boldsymbol{\psi}(x) = Ae^{-bx}$, tentukan Braket dari persamaan di atas!

2. Penyelesaian persamaan Schrodinger tak gayut waktu dari suatu sistem tertentu adalah
$$\boldsymbol{\psi}_n(x) = A \sin \frac{n\pi}{a} x, \qquad 0 \leq x \leq a$$
dengan A adalah sebuah nilai konstan tertentu yang masih belum diketahui. Jika menggunakan konsep normalisasi gelombang, tentukan nilai A!

3. Dalam persamaan ([redacted]) $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$; tunjukkan bahwa $[\hat{y}, \hat{p}_x] = 0$ dan $[\hat{z}, \hat{p}_x] = 0$.

4. Dengan menggunakan persamaan Schrödinger yang bergantung waktu, buktikan komutator posisi dan energi $[\hat{x}, \hat{H}] = i\hbar \dfrac{\hat{p}_x}{m}$.

Terima Kasih