INTEGRAL RIEMANN

Definisi 1

Misal $[a,b]$ interval tertutup dan terbatas di dalam $\mathbb{R}$, himpunan terurut dan berhingga $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ sehingga $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ disebut partisi pada $[a,b]$.

Titik-titik pada partisi P dapat digunakan untuk membagi interval $[a,b]$ ke dalam interval-interval bagian yang tidak saling tumpang tindih (*non overlapping sub intervals*)

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \cdots, [x_{n-1}, x_n].$$

Perhatikan bahwa interval-interval bagian mempunyai panjang secara berturut-turut:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \Delta x_3 = x_3 - x_2, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

Contoh 1

Misal $[0,1]$ interval tertutup dan terbatas di dalam **R**, dan himpunan-himpunan $P_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$, $P_2 = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$, dan $P_3 = \left\{0, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, 1\right\}$ adalah contoh-contoh partisi pada $[0,1]$.

Definisi 2

Misal $[a,b]$ interval tertutup dan terbatas di dalam **R**, dan $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n = b\}$ partisi pada $[a,b]$. Pada partisi P didefinisikan bilangan $\|P\|$ = maks $\{\, x_i - x_{i-1} : i = 1,2,\cdots,n\}$ yang disebut norma dari partisi P.

Contoh 2

Misal $[0,1]$ interval tertutup dan terbatas di dalam **R**, dan $P_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$, dan $P_2 = \left\{0, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, 1\right\}$ adalah beberapa contoh partisi pada $[0,1]$. Norma-norma dari P_1 dan P_2, secara berturut-turut adalah:

$\|P_1\|$ = maks $\left\{ \frac{1}{3} - 0, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$, dan

$\|P_2\|$ = maks $\left\{ \frac{2}{5} - 0, \frac{3}{4} - \frac{2}{5}, \frac{5}{6} - \frac{3}{4}, \frac{11}{12} - \frac{5}{6}, 1 - \frac{11}{12} \right\} = \frac{2}{5}$, Berdasarkan Contoh 2, nampak bahwa jika partisinya berbeda maka normanya pun pada umumnya berbeda.

Definisi 3 (Partisi Penghalus)

Misal $[a,b]$ interval tertutup dan terbatas, dan P dan Q masing-masing merupakan partisi pada $[a,b]$. Partisi Q disebut **penghalus** (***refinement***) dari partisi P pada $[a, b]$ jika $P \subseteq Q$.

Contoh 3

Misal $[0,1]$ interval tertutup dan terbatas di dalam **R**, dan himpunan-himpunan $P_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$, $P_2 = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$, dan $P_3 = \left\{0, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, 1\right\}$ adalah contoh-contoh partisi pada $[0,1]$.

Partisi P_2 merupakan penghalus dari partisi P_1 sebab $P_1 \subseteq P_2$, tetapi P_3 bukan penghalus dari P_1 sebab $P_1 \subseteq P_3$.

Untuk suatu interval tertutup dan terbatas $[a,b]$, terdapat tak berhingga banyak partisi yang dapat dibuat. Koleksi semua partisi pada interval tertutup dan terbatas $[a,b]$ dinotasikan dengan $\mathcal{P}[a,b]$.

Teorema 1

Jika $[a,b]$ interval tertutup dan terbatas dan P, $Q \in \mathcal{P}[a,b]$ dengan Q partisi penghalus dari P, maka $\|Q\| \leq \|P\|$.

Bukti:

Misal $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n = b\}$ partisi pada $[a,b]$, maka norma dari P adalah $\|P\|$ = maks $\{ x_i - x_{i-1} : i = 1,2,\cdots,n\}$. Menurut yang diketahui Q merupakan partisi penghalus dari P atau $P \subseteq Q$, maka Q dapat ditulis sebagai berikut:

$Q = \{a = x_0 = x_{10}, x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1k_1}, x_1 = x_{20}, x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2k_2}, \cdots, x_{n-1} = x_{n0}, x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{nk_n}, x_n = b\}$,

maka $\|Q\|$ = maks $\left\{\{ x_{ij} - x_{i(j-1)} : i = 1,2,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots,k_i \} \cup \{ x_i - x_{ik_i} : i = 1,2,\cdots,n\}\right\}$.

Jelas bahwa $x_{ij} - x_{i(j-1)} \leq x_i - x_{i-1}$ untuk setiap $i = 1,2,\cdots,n$; $j = 1,2,\cdots,k_i$ dan

$x_i - x_{ik_i} \leq x_i - x_{i-1}$ untuk setiap $i = 1,2,\cdots,n$. Oleh karena itu diperoleh:

$\|Q\|$ = maks $\{ x_{ij} - x_{i(ji1)} : i = 1,2,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots,k_i \} \cup \{ x_i - x_{ik_i} : i = 1,2,\cdots,n\}$

$\leq$ maks $\{x_i - x_{i-1} : i = 1,2,\cdots,n\}$ = $\|P\|$.

Jadi terbukti bahwa $\|Q\| \leq \|P\|$.

Teorema 2

Misal $[a,b]$ suatu interval tertutup dan terbatas $[a,b]$, dan $\mathcal{P}[a,b]$ menyatakan koleksi semua partisi pada $[a,b]$. Jika P_1, $P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$, maka $P_1 \cup P_2$ merupakan penghalus dari P_1 dan P_2.

Teorema 3

Jika $[a,b]$ suatu interval tertutup dan terbatas, maka untuk setiap bilangan ¢ > 0 terdapat partisi P pada $[a,b]$ sehingga $\|P\|$ < ¢.

Bukti:

Diberikan $[a,b]$ suatu interval tertutup dan terbatas dan bilangan ¢ > 0. Karena $a < b$, maka $b - a > 0$, oleh karena itu menurut sifat Archimides terdapat bilangan asli n sehingga $\frac{b-a}{n} <$ ¢. Selanjutnya dibuat partisi $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n = b\}$ pada $[a,b]$ dengan sifat untuk setiap interval bagian $[x_{k-1}, x_k]$ berlaku $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ untuk setiap $k = 1,2,\cdots,n$. Oleh karena itu diperoleh $\|P\|$ = maks $\{x_k - x_{k-1} : k = 1,2,\cdots,n\}$ = $\frac{b-a}{n} <$ ¢ .

Definisi 4

Misal $[a,b]$ interval tertutup dan terbatas, dan $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ partisi pada $[a,b]$. Jika untuk setiap interval bagian $[x_{k-1}, x_k]$, dipilih titik ¶$_k \in [x_{k-1}, x_k]$ untuk $k = 1,2,3,\cdots,n$, maka koleksi $\mathcal{P}$ = $\{ ([x_{k-1}, x_k];$ ¶$_k) : k = 1,2,\cdots,n \}$ disebut partisi tag dari interval $[a,b]$, atau pada umumnya hanya disebut partisi dari interval $[a,b]$ saja, dan titik ¶$_k$ disebut titik tag (titik terkait) dari subinterval $[x_{k-1}, x_k]$.

Definisi 5

Misal $[a,b]$ interval tertutup dan terbatas, dan $f : [a,b] \to R$ fungsi bernilai real. Jika P = $\{ ([x_{k-1}, x_k];$ ¶$_k) : k = 1,2,\cdots,n \}$ partisi dari $[a,b]$, maka bilangan $S(f;P)$ = ($\mathcal{P}$) $\sum_{k=1}^{n} f($¶$_k)(x_k - x_{k-1})$ disebut jumlahan Riemann fungsi *f* pada $[a,b]$ terkait partisi P.

Contoh 4

Misal $[0,1]$ interval tertutup dan terbatas, $f:[0,1]\to R$ fungsi bernilai real yang didefinisikan dengan $f(x)=x^2$ dan $P=\left\{\left(\left[0,\frac{1}{5}\right];\frac{1}{10}\right),\left(\left[\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right];\frac{9}{40}\right),\left(\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right];\frac{7}{24}\right),\left(\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right];\frac{5}{12}\right),\left(\left[\frac{1}{2},1\right];\frac{3}{4}\right)\right\}$ partisi tag dari $[0,1]$. Jumlahan Riemann fungsi *f* pada $[a,b]$ terkait partisi *P* yaitu:

$$S(f;P) = \frac{1}{500} + \frac{81}{32000} + \frac{49}{6912} + \frac{25}{864} + \frac{9}{32} = 0{,}330.$$

Contoh 5

Misal $[a,b]$ interval tertutup dan terbatas, $f:[0,1]\to R$ fungsi bernilai real yang didefinisikan dengan $f(x)=c$ untuk suatu bilangan real *c*, dan $P = \{\, ([x_{k-1},x_k];\P_k): k=1,2,\cdots,n \,\}$ partisi tag dari $[a,b]$. Jumlahan Riemann fungsi *f* pada $[a,b]$ terkait partisi *P* yaitu:

$$S(P;f) = \sum_{k=1}^{n} f(\P_k)(x_k - x_{k-1}) = c\ \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = c(b-a).$$

Definisi 6

Misal $[a,b]$ interval tertutup dan terbatas, dan $f:[a,b]\to R$ fungsi bernilai real. Fungsi *f* dikatakan terintegral Riemann pada $[a,b]$, jika terdapat bilangan real *L* sehingga untuk setiap £ >0, terdapat ¢ >0 sehingga jika $P = \{\, ([x_{k-1},x_k];\P_k): k=1,2,\cdots,n \,\}$ sebarang partisi tag dari $[a,b]$, dengan ||*P*|| < ¢ , maka $|S(f;P)-L|$ < £ .

Himpunan semua fungsi yang terintegral Riemann pada $[a,b]$ disimbolkan dengan $\mathcal{R}[a,b]$.

Jika $f \in \mathcal{R}[a,b]$, maka *L* disebut **integral Riemann** dari *f* pada $[a,b]$ dan dinotasikan dengan:

$$L = \int_a^b f \ = \int_a^b f(x)dx$$

Perhatikan bahwa bilangan *L* pada definisi integral Riemann di atas sering disebut dengan "**limit**" dari jumlahan Riemann $S(P;f)$, dan untuk mendapatkan nilai *L* tersebut memang dapat ditempuh dengan cara mengambil nilai limit dari jumlahan Riemann $S(P;f)$ untuk ||*P*|| → 0. Tetapi perlu hati-hati, karena $S(P;f)$ bukan fungsi dari ||*P*||.

Contoh 6

Misal $[a,b]$ interval tertutup dan terbatas, $f:[0,1]\to R$ fungsi bernilai real yang didefinisikan dengan $f(x)=c$ untuk suatu bilangan real *c*, dan $P = \{\, ([x_{k-1},x_k];\P_k): k=1,2,\cdots,n \,\}$ sebarang partisi tag dari $[a,b]$. Berdasarkan contoh di atas jumlahan Riemann fungsi *f* pada $[a,b]$ terkait partisi *P* yaitu $S(P;f) = \sum_{k=1}^{n} f(¶_k)(x_k - x_{k-1}) = c \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = c(b-a)$.

Diambil sebarang £ > 0, dan dipilih ¢ = £ . Jika $P = \{ ([x_{k-1}, x_k]; ¶_k) : k = 1,2,\cdots,n \}$ sebarang partisi tag dari $[a,b]$, dengan ||*P*|| < ¢ , maka $|S(f;P) - c(b-a)| = 0 <$ £ .

Hal ini berarti *f* terintegral Riemann pada $[a,b]$ dan $\int_a^b f = c(b-a)$.

Contoh 6

Misal $[0,1]$ interval tertutup dan terbatas, $f : [0,1] \to R$ fungsi bernilai real yang didefinisikan dengan $f(x) = x$. Tunjukkan bahwa *f* terintegral Riemann pada $[0,1]$.

Pembahasan:

Diberikan sebarang £ > 0 dan pilih ¢ = £ .

Diambil $P = \{ ([x_{k-1}, x_k]; ¶_k) : k = 1,2,\cdots,n \}$ sebarang partisi tag dari $[a,b]$ dengan ||*P*|| < ¢ . Kemudian dibentuk pula partisi $Q = \{ ([x_{k-1}, x_k]; t_k) : k = 1,2,\cdots,n \}$ sedemikan hingga partisi *P* dan *Q* sama kecuali di titik-titik tagnya. Titik-titik tag pada partisi Q dipilih sedemikian hingga $t_k = \dfrac{x_{k-1} + x_k}{2}$. Selanjutnya perhatikan jumlahan Riemann pada partisi Q, yaitu:

$$S(f;Q) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right)(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2 - x_{k-1}^2)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1^2 - x_0^2 + x_2^2 - x_1^2 + x_3^2 - x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n-1}^2) = \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}.$$

Karena partisi *P* dan *Q* sama kecuali di titik-titik tagnya, maka $t_k, ¶_k \in [x_{k-1}, x_k]$ untuk setiap $k = 1,2,\cdots,n$, akibatnya diperoleh $|¶_k - t_k| \le |x_k - x_{k-1}| = x_k - x_{k-1} \le \|P\| <$ ¢ . Lebih lanjut diperoleh:

$$|S(f;P) - S(f;Q)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(¶_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})\right|$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} ¶_k (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} t_k (x_k - x_{k-1})\right|$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} (¶_k - t_k)(x_k - x_{k-1})\right| \le \sum_{k=1}^{n} |¶_k - t_k||x_k - x_{k-1}| = \sum_{k=1}^{n} |¶_k - t_k|(x_k - x_{k-1})$$

$$< \sum_{k=1}^{n} ¢ \left(x_k - x_{k-1}\right) = ¢ \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - x_{k-1}\right) = ¢ \left(x_n - x_0\right) = ¢.$$

Karena $S(f;Q) = \dfrac{1}{2}$, maka $\left|S(f;P) - \dfrac{1}{2}\right| < ¢ = £$.

Jadi untuk sebarang £ > 0, maka terdapat ¢ > 0 sehingga jika $P = \left\{ \left([x_{k-1}, x_k]; ¶_k\right) : k = 1,2,\cdots,n \right\}$

sebarang partisi tag dari $[a,b]$ dengan $\|P\| <$ ¢ , maka $\left|S(f;P) - \dfrac{1}{2}\right| < £$. Dengan demikian fungsi

f terintegral Riemann pada $[0,1]$ dan $\int_0^1 f = \dfrac{1}{2}$.

Contoh 7

Misal a dan b bilangan real dengan $0 \le a < b$ dan $[a,b]$ interval tertutup dan terbatas, $f:[a,b] \to R$ fungsi bernilai real yang didefinisikan dengan $f(x) = x^2$. Tunjukkan bahwa *f* terintegral Riemann pada $[a,b]$.

Pembahasan:

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ dan pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2b(b-a)} > 0$, sebab $b - a > 0$.

Diambil $P = \{([x_{k-1}, x_k]; \xi_k) : k = 1, 2, 3, \cdots, n\}$ sebarang partisi *tag* dari $[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$. Kemudian dibentuk pula partisi $Q = \{([x_{k-1}, x_k]; t_k) : k = 1, 2, 3, \cdots, n\}$ sedemikan hingga partisi *P* dan *Q* sama kecuali di titik-titik *tag*-nya. Titik-titik *tag* pada partisi Q dipilih sedemikian hingga $t_k = \sqrt{\frac{1}{3}(x_{k-1}^2 + x_k x_{k-1} + x_k^2)}$. Perhatikan bahwa $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ untuk setiap $k = 1, 2, 3, \cdots, n$. Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut.

$$3x_{k-1}^2 = x_{k-1}^2 + x_{k-1}^2 + x_{k-1}^2 \le x_{k-1}^2 + x_{k-1}x_k + x_k^2 \le x_k^2 + x_k^2 + x_k^2 = 3x_k^2$$

$$x_{k-1}^2 \le \frac{x_{k-1}^2 + x_{k-1}x_k + x_k^2}{3} \le x_k^2$$

$$x_{k-1} \le \sqrt{\frac{x_{k-1}^2 + x_{k-1}x_k + x_k^2}{3}} \le x_k$$

Hal ini berarti $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ untuk setiap $k = 1, 2, 3, \cdots, n$.

Selanjutnya perhatikan jumlahan Riemann pada partisi Q, yaitu:

$$\begin{aligned} S(f:Q) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{\frac{1}{3}(x_{k-1}^2 + x_k x_{k-1} + x_k^2)}\right)^2 (x_k - x_{k-1}). \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}(x_{k-1}^2 + x_k x_{k-1} + x_k^2)\right)(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(x_{k-1}^2 + x_k x_{k-1} + x_k^2)(x_k - x_{k-1})$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(x_k x_{k-1}^2 + x_k^2 x_{k-1} + x_k^3 - x_{k-1}^3 - x_k x_{k-1}^2 - x_k^2 x_{k-1})$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(x_k x_{k-1}^2 - x_k x_{k-1}^2 + x_k^2 x_{k-1} - x_k^2 x_{k-1} + x_k^3 - x_{k-1}^3)$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(x_k^3 - x_{k-1}^3) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

Karena partisi P dan Q sama kecualí di titik-titik *tag*-nya, maka $\xi_k, t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ untuk setiap $k = 1, 2, 3, \cdots, n$, akibatnya diperoleh $|\xi_k - t_k| \leq |x_k - x_{k-1}| = x_k - x_{k-1} \leq \|P\| < \delta$. Lebih lanjut diperoleh:

$$\begin{aligned}
|S(f;P) - S(f;Q)| &= \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} t_k^2(x_k - x_{k-1})\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}(\xi_k^2 - t_k^2)(x_k - x_{k-1})\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}(\xi_k + t_k)(\xi_k - t_k)(x_k - x_{k-1})\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}|\xi_k + t_k||\xi_k - t_k||x_k - x_{k-1}| \\
&< \sum_{k=1}^{n}(|\xi_k| + |t_k|)\delta|x_k - x_{k-1}| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}(b + b)\delta|x_k - x_{k-1}| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} 2b\delta(x_k - x_{k-1}) \\
&= 2b\delta\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \\
&= 2b\delta(b - a) \\
&= 2b(b - a)\frac{\varepsilon}{2b(b-a)} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Karena $S(f:Q) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$, maka $\left|S(f:Q) - \frac{1}{3}(b^3 - a^3)\right| < \varepsilon$

Jadi untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga jika $P = \{([x_{k-1}, x_k]; \xi_k): k = 1, 2, 3, \cdots, n\}$ sebarang partisi *tag* dari $[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta$, maka $\left|S(f:Q) - \frac{1}{3}(b^3 - a^3)\right| < \varepsilon$. Dengan demikian fungsi *f* terintegral Riemann pada $[a, b]$ dan $\int_a^b f = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$.