PROBABILITAS

RUANG SAMPEL DAN PERISTIWA (SAMPLE SPACE & EVENT)

- *Eksperimen*: proses observasi yang memiliki hasil yang tidak pasti.
- *Event*: hasil eksperimen yang mungkin atau tidak mungkin terjadi.
- *Probabilitas* suatu event: bilangan yang merupakan ukuran kesempatan, atau kecenderungan event tersebut akan terjadi jika eskperimen dilakukan.

Properti Probabilitas P(A)

- Lebih besar atau sama dengan nol dan lebih kecil atau sama dengan satu.
- Jika event A tidak pernah terjadi, maka P(A) sama dengan nol - yaitu, P(A) = 0.
- Jika event A pasti terjadi, maka P(A) sama dengan satu - yaitu, P(A) = 1.

Ruang sampel suatu eksperimen adalah himpunan semua hasil yang mungkin dari eksperimen tersebut. Setiap hasil yang berbeda disebut *hasil ruang sampel* (atau *titik sampel*, atau *event elementer*).

Contoh 1:

Suatu perusahaan akan memilih Chief Executive Officer (CEO) yang baru dari empat kandidat: Adams, Duncan, Hill, dan Rankin. Dengan demikian, ruang sampel terdiri dari empat hasil yang mungkin:

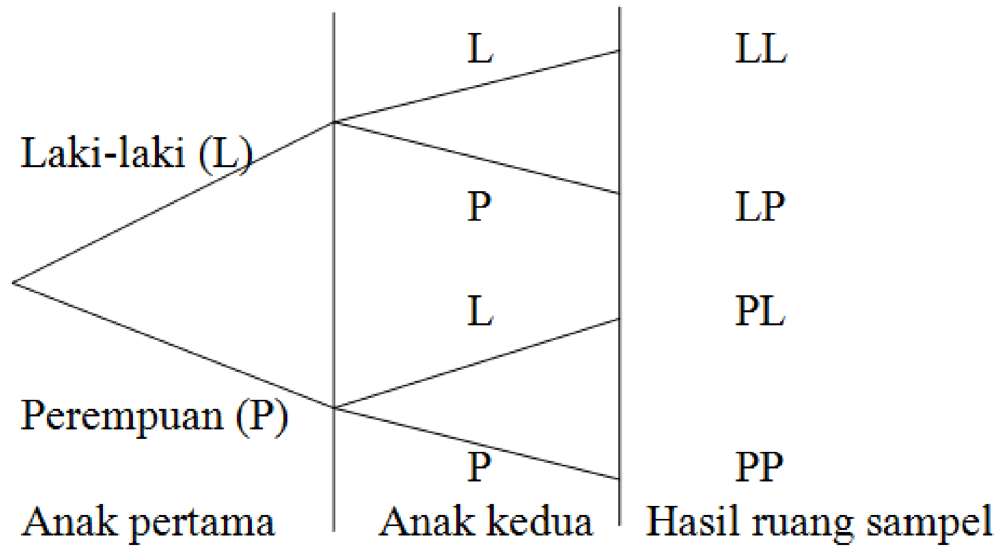
A	$\equiv$	Adams terpilih sebagai CEO
D	$\equiv$	Duncan terpilih sebagai CEO
H	$\equiv$	Hill terpilih sebagai CEO
R	$\equiv$	Rankin terpilih sebagai CEO

Misalkan analis industri menilai bahwa kemungkinan Adams, Duncan, Hill, dan Rankin terpilih secara berturut-turut adalah 0.1, 0.2, 0.5, dan 0.2 berturut-turut. Maka, dalam notasi probabilitas:

$P(A) = 0.1 \quad P(D) = 0.2 \quad P(H) = 0.5 \quad P(R) = 0.2$

Contoh 2:

Sepasang mempelai merencanakan memiliki dua anak. Jika kemungkinan laki-laki dan perempuan sama besarnya, maka diagramnya :



Berapa probabilitas masing2 ?

P(LL) = P(LP) = P(PL) = P(PP) = 1/4

Jumlah probabilitas semua hasil ruang sampel selalu sama dengan 1.

Probabilitas suatu event adalah jumlah probabilitas hasil ruang sampel yang membentuk event tersebut.

Misalkan, dari Contoh 1, Adams dan Hill adalah kandidat internal, sedangkan Duncan dan Rankin bukan. Jika I adalah event di mana terpilih seorang kandidat internal, maka probabilitas I adalah:

diket : ($P(A) = 0.1$ $P(D) = 0.2$ $P(H) = 0.5$ $P(R) = 0.2$)

$$P(I) = P(A) + P(H) = 0.1 + 0.5 = 0.6$$

Jika semua hasil ruang sampel sama mungkinnya, probabilitas terjadinya suatu event adalah rasio

Jumlah hasil ruang sampel yang membentuk event tsb

Jumlah total hasil ruang sampel

Aturan-aturan dasar probabilitas

Irisan dan Gabungan (intersection & union) dari dua event)

- Jika ada dua event A dan B
- *Irisan* A dan B adalah event yang terdiri dari hasil ruang sampel yang termasuk A dan B keduanya.
- Irisan dilambangkan dengan $A \cap B$.
- $P(A \cap B)$ menyatakan probabilitas bahwa baik A maupun B akan terjadi secara simultan.

- Gabungan A dan B adalah event yang terdiri dari hasil ruang sampel yang termasuk A atau B.
- Gabungan dilambangkan dengan $A \cup B$.
- $P(A \cup B)$ menyatakan probabilitas bahwa A atau B akan terjadi.

Aturan Penjumlahan

Jika ada dua event A dan B, maka probabilitas *A atau B* akan terjadi adalah

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Mutually Exclusive Event (event yang saling eksklusif)

- Dua event A dan B adalah mutually exclusive jika tidak memiliki hasil ruang sampel yang sama. Pada kasus ini, event A dan B tidak dapat terjadi secara simultan, dengan demikian

$$P(A \cap B) = 0$$

Aturan Penjumlahan untuk Dua Mutually Exclusive Event

- Jika A dan B adalah mutually exclusive event, maka probabilitas *A atau B* akan terjadi adalah

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Aturan Penjumlahan untuk N Mutually Exclusive Event

- Jika A1, A2, ..., AN adalah mutually exclusive event, maka

$$P(A1 \cup A2 \cup \ldots \cup AN) = P(A1) + P(A2) + \ldots + P(AN)$$

Komplemen suatu event

Komplemen event A adalah event yang terdiri dari semua hasil ruang sampel yang tidak berhubungan dengan terjadinya A. Komplemen A dilambangkan dengan $\bar{A}$.

- **Aturan Komplemen**
- Probabilitas event A tidak akan terjadi adalah

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

PROBABILITAS BERSYARAT DAN INDEPENDENSI

Probabilitas event A, dengan syarat event B telah terjadi, dinyatakan dengan P(A|B) - disebutkan sebagai “probabilitas A jika ada B”. Kita sering menyebut probabilitas ini sebagai probabilitas bersyarat A jika ada B.

Probabilitas bersyarat bahwa A akan terjadi jika B terjadi, didefinisikan

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Di sini diasumsikan bahwa P(B) lebih besar dari nol.

Probabilitas bersyarat bahwa B akan terjadi jika A terjadi, didefinisikan

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Di sini diasumsikan bahwa P(A) lebih besar dari nol.

Aturan Perkalian Umum - Dua cara untuk menghitung $P(A \cap B)$

- $P(A \cap B) = \quad P(A)P(B|A)$

  $= \quad P(B)P(A|B)$

Independent Events

Dua event A dan B independen jika dan hanya jika

1. $P(A|B) = P(A)$ atau, secara ekivalen
2. $P(B|A) = P(B)$

- **Aturan Perkalian untuk dua independent events**

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- **Aturan Perkalian untuk N independent events**

Event A1, A2, ..., AN independen jika tidak ada dari event-event ini yang berhubungan satu sama lain, maka

$$P(A1 \cap A2 \cap ... \cap AN) = P(A1)P(A2)...P(AN)$$

VARIABEL ACAK DAN FUNGSI DISTRIBUSI PROBABILITAS

- **Variabel acak (random variable):**

  variabel yang nilainya ditentukan oleh hasil sebuah eksperimen. Yaitu, variabel acak merepresentasikan hasil yang tidak pasti..

- **Variabel acak diskrit:**

  variabel acak yang nilainya dapat dicacah (dihitung).

  Contoh:

  - Jumlah pembeli yang memasuki sebuah toko.
  - Jumlah televisi yang terjual pada periode tertentu.

- **Variabel acak kontinu:**

  Variabel acak yang nilainya tidak dapat dicacah.

  Contoh:

  - Perpanjangan pegas jika ditarik.
  - Berat segenggam strawberry.

Distribusi probabilitas dari variabel acak diskrit adalah tabel, grafik, atau rumus yang menyatakan probabilitas setiap nilai yang mungkin dimiliki variabel acak.

Contoh:

Ada sebuah kuis dengan tiga pertanyaan dengan kemungkinan jawaban benar/salah. Ruang sampel kuis ini terdiri dari hasil

CCC	CCI	CIC	ICC
CII	ICI	IIC	III

dengan C = benar dan I = salah.

Karena probabilitas C dan I masing-masing 1/2, maka

P(CCC) = (1/2)(1/2)(1/2) = 1/8

demikian juga dengan kombinasi lainnya.

Jika x menyatakan jumlah jawaban yang benar, maka didapat nilai $p(x)$:

p(0) = 1/8

p(1) = 3/8

p(2) = 3/8

p(3) = 1/8

Distribusi probabilitas diskrit $p(x)$ harus sedemikian sehingga

1. $p(x) \geq 0$ untuk setiap nilai x
2. $\Sigma p(x) = 1$

Mean atau **Nilai Ekspektasi** dari variabel acak diskrit *x* adalah

$$\mu_x = \Sigma x p(x)$$

Varians dari variabel acak diskrit *x* adalah

$$\sigma_x^2 = \Sigma(x-\mu_x)^2 p(x)$$

Standard deviasi dari x adalah akar kuadrat positif dari varians x. Yaitu,

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

VARIABEL ACAK DISKRIT

Variabel Acak Binomial

- Contoh:

Dilakukan survey terhadap pengunjung mal, dan ditemukan bahwa 40% dari melakukan transaksi pembelian. Berapa probabilitas bahwa 2 dari 3 pengunjung akan melakukan pembelian?

- Eksperimen ini memiliki karakteristik:

  1. Eksperimen ini terdiri dari tiga rangkaian percobaan yang identik, di mana setiap percobaan berupa keputusan pengunjung untuk membeli/tidak.

  2. Ada dua hasil yang mungkin dari tiap percobaan: pengunjung membeli (disebut sukses, dinyatakan dengan *S*), atau tidak membeli (disebut gagal, dinyatakan dengan *G*).

  3. Karena 40 persen dari seluruh pengunjung melakukan pembelian, adalah masuk akal jika ditentukan bahwa *P*(*S*), probabilitas pengunjung membeli, adalah 0.4 dan konstan untuk semua pengunjung. Hal ini berarti bahwa *P*(*G*), probabilitas pengunjung tidak membeli, adalah 0.6 dan konstan untuk semua pengunjung.

  4. Kita anggap para pengunjung membuat keputusan yang independen. Yaitu, hasil tiga percobaan independen satu sama lain.

Ruang sampel eksperimen:

SSS	SSG	SGS	SGG
GGG	GGS	GSG	GSS

Dua dari tiga pengunjung melakukan pembelian pada hasil SSG, SGS, atau GSS. Karena setiap keputusan independen, kita dapat mengalikan probabilitas S dan G untuk mencari probabilitas setiap hasil di atas:

$$P(SSG) = P(S)P(S)P(G) = (0.4)(0.4)(0.6) = (0.4)^2(0.6)$$

$$P(SGS) = P(S)P(G)P(S) = (0.4)(0.6)(0.4) = (0.4)^2(0.6)$$

$$P(GSS) = P(G)P(S)P(S) = (0.6)(0.4)(0.4) = (0.4)^2(0.6)$$

- **Probabilitas 2 dari 3 pengunjung melakukan pembelian adalah:**

$$\begin{aligned} P(SSG) + P(SGS) + P(GSS) &= (0.4)^2(0.6) + (0.4)^2(0.6) + (0.4)^2(0.6) \\ &= 3(0.4)^2(0.6) \\ &= 0.288 \end{aligned}$$

Dari ekspresi $3(0.4)^2(0.6)$ dinyatakan bahwa:

1. Angka 3 menyatakan jumlah hasil ruang sampel yang memenuhi syarat “dua dari tiga pengunjung melakukan pembelian”.
2. 0.4 dinyatakan dengan *p*, probabilitas pengunjung membeli.
3. 0.6 adalah $q = 1 - p$, probabilitas pengunjung tidak membeli.

- Secara umum:

Probabilitas terjadinya *x* sukses dari *n* percobaan adalah:

$$\left(\begin{array}{c} \text{jumlah cara terjadinya } x \\ \text{sukses dari } n \\ \text{percobaan} \end{array} \right) \cdot p^x q^{n-x}$$

Jumlah cara terjadinya x sukses di antara n percobaan sama dengan

$$\frac{n!}{x!(n-x)!}$$

di mana n! disebut “n faktorial” dan dihitung sebagai

n! = n(n-1)(n-2)···(1) dengan 0!=1.