Misal $I = [a, b]$ interval tertutup dan terbatas, $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fungsi bernilai real dan terbatas, dan $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ partisi pada $[a, b]$. Untuk setiap $k = 1, 2, \cdots, n$ didefinisikan bilangan-bilangan:

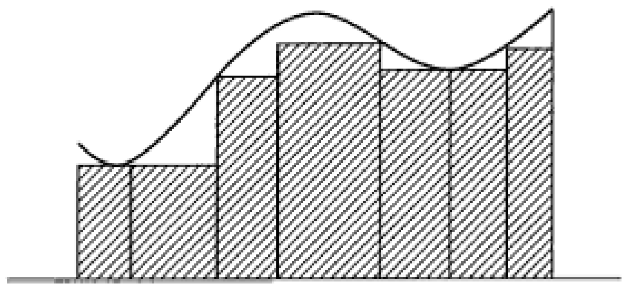
$$m_k = \inf \{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\} \text{ dan } M_k = \sup \{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Lebih lanjut, untuk sebarang $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ partisi pada *I*, didefinisikan bilangan-bilangan $L(f; \mathcal{P})$ dan $U(f; \mathcal{P})$ sebagai berikut.

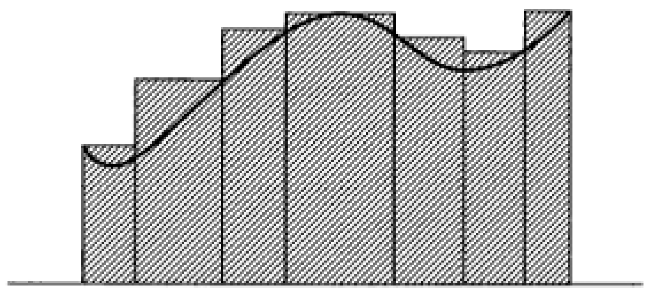
$L(f; \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$, disebut jumlah bawah dari *f* pada $[a, b]$ yang bersesuaian dengan partisi *P*, dan

$U(f; \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$, disebut jumlah atas dari *f* pada $[a, b]$ yang bersesuaian dengan partisi $\mathcal{P}$.

Perhatikan ilustrasi gambar jumlah bawah dari *f* pada $[a, b]$ yang bersesuaian dengan partisi $\mathcal{P}$ berikut.



Perhatikan ilustrasi gambar jumlah atas dari *f* pada $[a, b]$ yang bersesuaian dengan partisi $\mathcal{P}$ berikut.



Lemma 1

Jika $I = [a, b]$ interval tertutup dan terbatas, $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fungsi bernilai real dan terbatas dan $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ sebarang partisi pada *I*, maka $L(f; \mathcal{P}) \leq U(f; \mathcal{P})$.

Bukti:

Misal $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ sebarang partisi pada *I*. Berdasarkan definisinya jelas bahwa $m_k \leq M_k$ untuk setiap $k = 1, 2, \cdots, n$, dan karena $x_k - x_{k-1} > 0$ untuk setiap $k = 1, 2, \cdots, n$, maka diperoleh

$$m_k(x_k - x_{k-1}) \leq M_k(x_k - x_{k-1})$$

untuk setiap $k = 1, 2, \cdots, n$. Akibatnya diperoleh:

$$L(f; \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = U(f; \mathcal{P}).$$

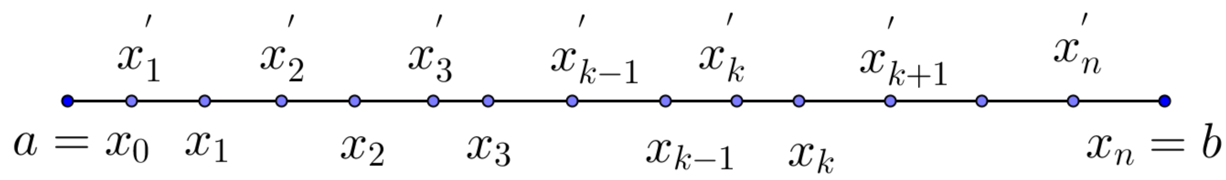
Jadi terbukti bahwa $L(f; \mathcal{P}) \leq U(f; \mathcal{P})$.

Lemma 2

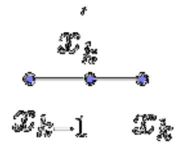
Jika $I = [a, b]$ interval tertutup dan terbatas, $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fungsi bernilai real dan terbatas, $\mathcal{P}$ dan $\mathcal{Q}$ masing-masing partisi pada I dengan $\mathcal{Q}$ penghalus dari $\mathcal{P}$, maka $L(f; \mathcal{P}) \leq L(f; \mathcal{Q})$ dan $U(f; \mathcal{Q}) \leq U(f; \mathcal{P})$.

Bukti:

Misal $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ sebarang partisi pada *I*, dan misal $\mathcal{Q}$ sebarang partisi penghalus dari $\mathcal{P}$. Misal $\mathcal{Q}$ diperoleh dari $\mathcal{P}$ dengan cara menyisipkan paling sedikit satu titik x'_k pada setiap subinterval *k* dari partisi $\mathcal{P}$. Perhatikan gambar di bawah ini.



Sekarang perhatikan subinterval ke-*k* dari $\mathcal{P}$.



dan perhatikan bilangan-bilangan:

$$m_k = \inf \quad \{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\},\ m'_k = \inf \quad \{f(x): x \in [x_{k-1}, x'_k]\}, \text{ dan}$$
$$m''_k = \inf \quad \{f(x): x \in [x'_k, x_k]\}.$$

Jelas bahwa $m_k \leq m'_k$ dan $m_k \leq m''_k$, dan oleh karena itu diperoleh:

$$\begin{aligned} m_k(x_k - x_{k-1}) &= m_k(x_k - x_{k-1} + x'_k - x'_k) = m_k(x'_k - x_{k-1} + x_k - x'_k) \\ &= m_k(x'_k - x_{k-1}) + m_k(x_k - x'_k) \leq m'_k(x'_k - x_{k-1}) + m''_k(x_k - x'_k) \end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh

$$L(f; P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} m'_k(x'_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} m''_k(x_k - x'_k) = L(f; \mathcal{Q}).$$

Jadi terbukti bahwa $L(f;\mathcal{P}) \leq L(f;Q)$. Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa $U(f;Q) \leq U(f;\mathcal{P})$.

Lemma 3

Jika $I=[a,b]$ interval tertutup dan terbatas, $f: I \to R$ fungsi terbatas, P dan Q masing-masing sebarang partisi pada I, maka $L(f;\mathcal{P}) \leq U(f;Q)$.

Bukti:

Misal $R = P \cup Q$, maka R merupakan partisi pada I dan R merupakan penghalus dari P dan juga penghalus dari Q. Oleh karena itu berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2 diperoleh:

$$L(f;P) \leq L(f;R) \leq U(f;R) \leq U(f;Q).$$

Jadi terbukti bahwa $L(f;P) \leq U(f;Q)$.

Definisi

Misal $I=[a,b]$ interval tertutup dan terbatas, $f: I \to R$ fungsi terbatas, dan $\mathcal{P}(I)$ koleksi semua partisi pada I. Integral bawah dari f pada I adalah bilangan

$$L(f) = \sup \{L(f;P): P \in \mathcal{P}(I)\}$$

dan integral bawah dari f pada I adalah bilangan

$$U(f) = \inf \{U(f;P): P \in \mathcal{P}(I)\}.$$

Lemma 4

Misal $I=[a,b]$ interval tertutup dan terbatas, $f: I \to R$ fungsi terbatas dan P sebarang partisi pada I. Jika $m = \inf\{f(x): x \in [a,b_k]\}$ dan $M = \sup\{f(x): x \in [a,b]\}$, maka

$$m(b-a) \leq L(f;P) \leq U(f;P) \leq M(b-a).$$

Lebih lanjut berlaku $m(b-a) \leq L(f)$ dan $U(f) \leq M(b-a)$.

Bukti:

Misal $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ sebarang partisi pada I dan perhatikan bahwa $Q = \{a, b\}$ juga merupakan partisi pada I. Jelas bahwa P merupakan partisi penghalus dari Q, oleh karena itu menurut Lemma 2 diperoleh:

$$L(f;Q) \leq L(f;P) \Leftrightarrow m(b-a) \leq L(f;P)$$

dan

$$U(f;P) \leq U(f;Q) \Leftrightarrow U(f;P) \leq M(b-a).$$

Di samping itu, berdasarkan Lemma 1 diperoleh $L(f;P) \leq U(f;P)$. Oleh karena itu, berdasarkan ketiga pertidaksamaan tersebut diperoleh $m(b-a) \leq L(f;P) \leq U(f;P) \leq M(b-a)$.

Teorema 5

Jika $I=[a,b]$ interval tertutup dan terbatas, dan $f:I\to R$ fungsi terbatas, maka $L(f)$, integral bawah fungsi *f* pada *I*, dan $U(f)$, integral atas fungsi *f* pada *I* masing-masing ada, dan berlaku $L(f)\le U(f)$.

Bukti:

Diberikan P_1 dan P_2 masing-masing sebarang partisi pada *I*. Berdasarkan Lemma 3 diperoleh:

$$L(f;P_1)\le U(f;P_2).$$

Karena $L(f;P_1)\le U(f;P_2)$ dan P_1 sebarang partisi pada *I*, maka $U(f;P_2)$ merupakan batas atas dari himpunan $\{L(f;P):P\in\mathcal{P}(I)\}$. Karena *f* terbatas pada *I*, maka $\{L(f;P):P\in\mathcal{P}(I)\}$ terbatas pada $\mathbb{R}$, oleh karena itu:

$$L(f)=\sup\quad\{L(f;P):P\in\mathcal{P}(I)\}.$$

ada nilainya dan berlaku $L(f)\le U(f;P_2)$.

Di lain pihak karena $L(f)\le U(f;P_2)$ dan P_2 sebarang partisi pada *I*, maka $L(f)$ merupakan batas bawah dari himpunan $\{U(f;P):P\in\mathcal{P}(I)\}$. Dan karena *f* terbatas pada *I*, maka $\{U(f;P):P\in\mathcal{P}(I)\}$ terbatas pada $\mathbb{R}$, oleh karena itu:

$$U(f)=\inf\quad\{U(f;P):P\in\mathcal{P}(I)\}.$$

ada nilanya dan berlaku $L(f)\le U(f)$.

Definisi 1

Misal $I=[a,b]$ interval tertutup dan terbatas, $f:I\to R$ fungsi terbatas. Fungsi *f* dikatakan terintegral Darboux pada *I* jika $L(f)=U(f)$. Dalam hal ini integral Darboux fungsi *f* pada *I* didefinisikan sebagai nilai $L(f)=U(f)$ dan dinotasikan dengan $\int_a^b f=U(f)=L(f)$.

Contoh 1

Misal $I=[a,b]$ interval tertutup dan terbatas dan $f:I\to R$ fungsi yang didefinsikan dengan aturan $f(x)=c$ untuk $x\in[a,b]$. Tunjukkan bahwa *f* terintegral Darboux pada *I* dan tentukan nilai integralnya.

Pembahasan:

Misal P = $\{x_0,x_1,x_3,\cdots,x_n\}$ sebarang partisi pada *I*.

$$m_k=\inf\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}=c,\text{untuk } k=1,2,3,\cdots,n$$

dan

$$M_k=\sup\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}=c$$

Oleh karena itu diperoleh:

$L(f;P)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} c(x_k - x_{k-1}) = c\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = c(b-a).$

$U(f;P)=\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} c(x_k - x_{k-1}) = c\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = c(b-a).$

Jadi diperoleh:

$$L(f) = \sup \quad \{L(f;P): P \in \mathcal{P}(I)\} = c(b-a)$$

dan

$$U(f) = \inf \quad \{U(f;P): P \in \mathcal{P}(I)\} = c(b-a)$$

Hal ini berarti

$$L(f) = U(f).$$

Jadi fungsi $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ dengan aturan $f(x) = c$ untuk $x \in [a,b]$ terintegral Darboux pada $[a,b]$ dan $\int_a^b f = m(b-a)$.

Contoh 2

Misal $I = [0,1]$ dan $f: I \to R$ fungsi yang didefinsikan dengan aturan $f(x) = x$ untuk $x \in [0,1]$. Tunjukkan bahwa *f* terintegral Darboux pada *I* dan tentukan nilai integralnya.

Pembahasan:

Misal P_n adalah partisi pada $I = [0,1]$ yang terdiri atas *n* subinterval yang diberikan oleh:

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\right\}.$$

Selanjutnya diperoleh:

$$m_1 = \inf\left\{f(x): x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]\right\} = 0$$

$$m_2 = \inf\left\{f(x): x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]\right\} = \frac{1}{n}$$

$$m_3 = \inf\left\{f(x): x \in \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right]\right\} = \frac{2}{n}$$

dan seterusnya

$$m_k = \inf\left\{f(x): x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right\} = \frac{k-1}{n}$$

$$m_n = \inf\left\{f(x): x \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]\right\} = \frac{n-1}{n}$$

Karena f merupakan fungsi naik monoton, maka untuk setiap subinterval $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ diperoleh $m_k = \inf\left\{f(x) : x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right\} = \frac{k-1}{n}$ dan $M_k = \sup\left\{f(x) : x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right\} = \frac{k}{n}$ dengan k = 1, 2, 3, ⋯ , n.

Perhatikan pula bahwa $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$ untuk semua k = 1, 2, 3, ⋯ , n. Oleh karena itu diperoleh:

$$L(f;P_n) = \frac{0+1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2} = \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) \text{ dan}$$

$$U(f;P_n) = \frac{1+2+3+4+\cdots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Jika P(I)} menyatakan koleksi semua partisi dari I, maka $\{P_n : n \in N\} \subseteq$ P(I)}, oleh karena itu diperoleh:

$$\frac{1}{2} = \sup\{L(f;P_n) : n \in N\} \leq \sup\ \{L(f;P) : P \in \mathrm{P}(I)\} = L(f)$$

dan

$$U(f) = \inf\ \{U(f;P) : P \in \mathrm{P}(I)\} \leq \inf\{U(f;P_n) : n \in N\} = \frac{1}{2}$$

Akibatnya diperoleh $\frac{1}{2} \leq L(f) \leq U(f) \leq \frac{1}{2}$, hal ini berarti $L(f) = U(f) = \frac{1}{2}$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa f terintegral Darboux pada $I = [0,1]$ dan $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$.

Contoh 3

Misal $I = [0,1]$ dan $f : I \to R$ fungsi yang didefinsikan dengan aturan $f(x) = x^2$ untuk $x \in [0,1]$. Tunjukkan bahwa f terintegral Darboux pada I dan tentukan nilai integralnya.

Pembahasan:

Misal P_n adalah partisi pada $I = [0,1]$ yang terdiri atas n subinterval yang diberikan oleh:

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\right\}.$$

Karena f merupakan fungsi naik monoton, maka untuk setiap subinterval $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ diperoleh

$m_k = \inf\left\{f(x) : x \in \left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\right\} = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2$ dan $M_k = \sup\left\{f(x) : x \in \left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\right\} = \frac{k^2}{n^2}$ dengan k = 1, 2, 3, ⋯ , n.

Perhatikan pula bahwa $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$ untuk semua k = 1, 2, 3, ⋯ , n. Oleh karena itu diperoleh:

$$\begin{aligned}
L(f;P_n) &= \frac{0^2+1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{6}\big((n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)\big)\right)\\
&= \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{6}\big((n-1)(n)(2n-2+1)\big)\right) = \frac{1}{6n^3}\big((n-1)(n)(2n-1)\big)\\
&= \frac{1}{6n^3}\big((n^2-n)(2n-1)\big) = \frac{1}{6n^3}(2n^3-n^2-2n^2+n) = \frac{1}{3}-\frac{1}{6n}+\frac{1}{6n^2}\\
&= \frac{1}{3}-\frac{1}{6n}\left(1-\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(f;P_n) &= \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{6}\big((n)(n+1)(2n+1)\big)\right)\\
&= \frac{1}{6n^3}(n^2+n)(2n+1) = \frac{1}{6n^3}(2n^3+n^2+2n^2+n)\\
&= \frac{1}{6n^3}(2n^3+3n^2+n) = \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\\
&= \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{3n}\right)
\end{aligned}$$

Jika P(I)} menyatakan koleksi semua partisi dari I, maka $\{P_n : n \in N\} \subseteq$ P(I)}, oleh karena itu diperoleh:

$$\frac{1}{3} = \sup\{L(f;P_n) : n \in N\} \leq \sup\ \{L(f;P) : P \in \mathrm{P}(I)\} = L(f)$$

dan

$$U(f) = \inf\ \{U(f;P) : P \in \mathrm{P}(I)\} \leq \inf\{U(f;P_n) : n \in N\} = \frac{1}{3}$$

Akibatnya diperoleh $\frac{1}{3} \leq L(f) \leq U(f) \leq \frac{1}{3}$, hal ini berarti $L(f) = U(f) = \frac{1}{3}$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa f terintegral Darboux pada $I = [0,1]$ dan $\int_0^1 f = \frac{1}{3}$.

Teorema 6 (Kriteria Keterintegralan)

Misal $I=[a,b]$ interval tertutup dan terbatas, $f: I \to R$ fungsi terbatas. Fungsi *f* terintegral Darboux pada *I* jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P_ε pada I sehingga $U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)<\varepsilon$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui *f* terintegral Darboux pada *I*, maka $L(f)=U(f)$.

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena *f* terintegral Darboux pada *I* , maka terdapat $P_1,\ P_2 \in$ P(*I*) sehingga:

$$U(f,P_1)<U(f)+\frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow U(f,P_1)-U(f)<\frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$L(f)-\frac{\varepsilon}{2}<L(f,P_2) \Leftrightarrow L(f)-L(f,P_2)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Diambil $P = P_1 \cup P_2$, maka

$$U(f,P) \le U(f,P_1) < U(f)+\frac{\varepsilon}{2} = L(f)+\frac{\varepsilon}{2} < L(f,P_2)+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \le L(f)+\varepsilon.$$

Jadi terdapat $P \in$ P(*I*) sehingga $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Perhatikan bahwa untuk setiap partisi $P \in$ P(*I*) berlaku:

$$L(f,P) \le L(f) \le U(f) \le U(f,P) \quad \text{……………………………………………….. (*)}$$

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Berdasarkan yang diketahui terdapat $P \in$ P(*I*) sehingga:

$$U(f) - L(f) \le U(f,P)-L(f,P) < \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka $U(f) \le L(f)$. Di lain pihak, berdasarkan (*) diperoleh $L(f) \le U(f)$. Akibatnya diperoleh $U(f) = L(f)$. Hal ini berarti *f* terintegral Darboux pada *I*.

Akibat 7

Misal $I=[a,b]$ interval tertutup dan terbatas, $f: I \to R$ fungsi terbatas. Fungsi *f* tidak terintegral Darboux pada *I* jika dan hanya jika terdapat $\varepsilon_0 > 0$ sehingga untuk setiap partisi *P* pada *I* sehingga $U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)\ge \varepsilon_0$.

Akibat 8

Misal $I = [a, b]$ interval tertutup dan terbatas, $f: I \to \mathbb{R}$ fungsi terbatas. Jika $(P_n: n \in \mathbb{N})$ menyatakan barisan partisi pada I sehingga $\lim_{n\to\infty}\big(U(f, P_n) - L(f, P_n)\big) = 0$, maka *f* terintegral Darboux pada *I* dan berlaku $\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n)$.

Bukti:

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $\lim_{n\to\infty}\big(U(f, P_n) - L(f, P_n)\big) = 0$, maka terdapat bilangan asli N_0 sehingga jika $n \geq N_0$ berlaku $|U(f, P_n) - L(f, P_n)| < \varepsilon$. Karena $L(f, P_n) \leq U(f, P_n)$ untuk semua partisi P_n pada $[a, b]$, maka diperoleh $U(f, P_n) - L(f, P_n) < \varepsilon$. Jadi terdapat partisi P_n pada $[a, b]$ dengan $n \geq N_0$, sehingga berlaku $U(f, P_n) - L(f, P_n) < \varepsilon$. Berdasarkan kriteria keterintegralan disimpulkan *f* terintegral Darboux pada *I*.

Diberikan $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$, dan karena

$$L(f) = \sup\ \{L(f, P_n): P_n \in \mathcal{P}([a, b]), n \in \mathbb{N}\},$$

untuk $n = 1$, terdapat partisi P_1 pada $[a, b]$ sehingga berlaku

$$|L(f) - L(f, P_1)| = L(f) - L(f, P_n) < 1.$$

untuk $n = 2$, terdapat partisi P_2 pada $[a, b]$ sehingga berlaku

$$|L(f) - L(f, P_2)| = L(f) - L(f, P_2) < \frac{1}{2}.$$

dan seterusnya

untuk bilangan asli n, terdapat partisi P_n pada $[a, b]$ sehingga berlaku

$$|L(f) - L(f, P_n)| = L(f) - L(f, P_n) < \frac{1}{n}.$$

Hal ini berarti barisan $\big(L(f, P_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $L(f)$, yaitu $\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = L(f)$.

Diberikan $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$, dan karena

$$U(f) = \inf\ \{U(f, P_n): P_n \in \mathcal{P}([a, b]), n \in \mathbb{N}\},$$

untuk $n = 1$, terdapat partisi P_1 pada $[a, b]$ sehingga berlaku

$$|U(f, P_1) - U(f)| = U(f, P_1) - U(f) < 1.$$

untuk $n = 2$, terdapat partisi P_2 pada $[a, b]$ sehingga berlaku

$$|U(f, P_2) - U(f)| = U(f, P_2) - U(f) < \frac{1}{2}.$$

dan seterusnya

untuk bilangan asli n, terdapat partisi P_n pada $[a, b]$ sehingga berlaku

$$|U(f,P_n)-U(f)| = U(f,P_n)-U(f) < \frac{1}{n}.$$

Hal ini berarti barisan $\left(U(f,P_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $U(f)$, yaitu $\lim\limits_{n\to\infty} U(f,P_n) = U(f)$.

Karena *f* terintegral Darboux pada $[a,b]$, maka $U(f) = L(f)$, dan diperoleh:

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = U(f) = \int_a^b f = L(f) = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n).$$

Terbukti bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} L(f,P_n) = \int_a^b f = \lim\limits_{n\to\infty} U(f,P_n)$.

Contoh 4

Misal $I = [-1,2]$ dan $f: I \to R$ fungsi yang didefinsikan dengan aturan:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika} \quad -1 \le x < 0 \\ 1/2 & \text{jika} \quad x = 0 \\ 2 & \text{jika} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{jika} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Tunjukkan bahwa *f* terintegral Darboux pada *I* dan tentukan nilai integralnya.

Pembahasan:

Untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dibentuk partisi $P_\varepsilon = \{-1, -\varepsilon, \varepsilon, 1-\varepsilon, 1, 2\}$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} U(f,P_\varepsilon) &= \textstyle\sum_{k=1}^{5} M_k(x_k - x_{k-1}) \\ &= 1(-\varepsilon+1) + 2\big(\varepsilon-(-\varepsilon)\big) + 2(1-\varepsilon-\varepsilon) + 2\big(1-(1-\varepsilon)\big) + 1(2-1) \\ &= -\varepsilon + 1 + 4\varepsilon + 2 - 4\varepsilon + 2\varepsilon + 1 \\ &= 4 + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(f,P_\varepsilon) &= \textstyle\sum_{k=1}^{5} m_k(x_k - x_{k-1}) \\ &= 1(-\varepsilon+1) + \frac{1}{2}\big(\varepsilon-(-\varepsilon)\big) + 2(1-\varepsilon-\varepsilon) + 2\big(1-(1-\varepsilon)\big) + 1(2-1) \\ &= -\varepsilon + 1 + \varepsilon + 2 - 4\varepsilon + 2\varepsilon + 1 \\ &= 4 - 2\varepsilon \end{aligned}$$

Jika $\mathcal{P}(I)$ menyatakan koleksi semua partisi pada *I*, maka $\{P_\varepsilon : \varepsilon > 0\} \subset \mathcal{P}(I)$, oleh karena itu diperoleh:

$$4 = \sup\{L(f,P_\varepsilon) : \varepsilon > 0\} \le \sup\{L(f,P) : P \in \mathcal{P}(I)\} = L(f)$$

dan

$$U(f) = \inf\{L(f,P) : P \in \mathcal{P}(I)\} \le \inf\{U(f,P_\varepsilon) : \varepsilon > 0\} = 4.$$

Akibatnya diperoleh $4 \le L(f) \le U(f) \le 4$, hal ini berarti $L(f) = U(f) = 4$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa *f* terintegral Darboux pada $I = [-1,2]$ dan $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 4$.

Contoh 5

Misal $I = [a, b]$ interval yang tertutup dan terbatas, dan $f: I \to \mathbb{R}$ fungsi yang didefinsikan dengan aturan:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x \text{ rasional} \\ 1 & \text{jika } x \text{ irasional} \end{cases}$$

Selidikilah apakah *f* terintegral Darboux pada *I* atau tidak.

Pembahasan:

Diberikan $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ sebarang partisi pada $[a, b]$. Untuk setiap $k = 1, 2, 3, \cdots, n$ didefinisikan bilangan-bilangan:

$$m_k = \inf \quad \{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

dan

$$M_k = \sup \quad \{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Perhatikan bahwa setiap subinterval $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, 3, \cdots, n$, memuat bilangan rasional dan sekaligus bilangan irasional. Oleh karena itu diperoleh $m_k = 0$ dan $M_k = 1$, untuk setiap $k = 1, 2, 3, \cdots, n$. Akibatnya diperoleh:

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = 0,$$

dan

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = 1 \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = b - a.$$

Akibatnya diperoleh:

$L(f) \;=\; \sup \{L(f, P): P \in \mathcal{P}(I)\} = 0.$

$U(f) \;=\; \inf \{U(f, P): P \in \mathcal{P}(I)\} = b - a.$

Hal ini berarti $L(f) \neq U(f)$, dengan demikian *f* tidak terintegral Darboux pada $[a, b]$.

Contoh 6

Misal $I = [0,1]$ dan $f: I \to \mathbb{N}$ fungsi yang didefinsikan dengan aturan $f(x) = x^2$ untuk $x \in [0,1]$. Tunjukkan bahwa *f* terintegral Darboux pada *I* dan tentukan nilai integralnya.

Pembahasan:

Misal P_n adalah partisi pada $I = [0,1]$ yang terdiri atas *n* subinterval yang diberikan oleh:

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\right\}.$$

Karena *f* merupakan fungsi naik monoton, maka untuk setiap subinterval $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ diperoleh

$$m_k = \inf\left\{f(x): x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right\} = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2$$

dan

$$M_k = \sup\left\{f(x): x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right\} = \frac{k^2}{n^2}$$

dengan $k = 1, 2, 3, \cdots, n$.

Perhatikan pula bahwa $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$ untuk semua $k = 1, 2, 3, \cdots, n$. Oleh karena itu diperoleh:

$$\begin{aligned}
L(f; P_n) &= \frac{0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{6}\big((n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)\big)\right) \\
&= \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{6}\big((n-1)(n)(2n-2+1)\big)\right) = \frac{1}{6n^3}\big((n-1)(n)(2n-1)\big) \\
&= \frac{1}{6n^3}\big((n^2-n)(2n-1)\big) = \frac{1}{6n^3}(2n^3 - n^2 - 2n^2 + n) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{6n} + \frac{1}{6n^2} \\
U(f; P_n) &= \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{6}\big((n)(n+1)(2n+1)\big)\right) \\
&= \frac{1}{6n^3}(n^2+n)(2n+1) = \frac{1}{6n^3}(2n^3 + n^2 + 2n^2 + n) \\
&= \frac{1}{6n^3}(2n^3 + 3n^2 + n) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}
\end{aligned}$$

Selanjutnya diperoleh

$$U(f; P_n) - L(f; P_n) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{4}{6n} = \frac{2}{3n},$$

dan diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}\big(U(f; P_n) - L(f; P_n)\big) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3n} = 0.$$

Berdasarkan **Akibat 8** disimpulkan fungsi *f* terintegral Darboux pada $[0,1]$, dan diperoleh

$$\int_0^1 x^2 = \lim_{n\to\infty} U(f; P_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}.$$